

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Курганский государственный университет

Кафедра автоматизации производственных процессов

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания и контрольные задания по курсу “Метрология, стандартизация и сертификация” для студентов заочной формы обучения специальностей 220301 (210200) “Автоматизация технологических процессов и производств” (в машиностроении), 140211 (100400) “Электроснабжение”

Курган 2005

Кафедра автоматизации производственных процессов

Дисциплина *“Метрология, стандартизация и сертификация”*
(специальности 220301 (210200), 140211 (100400))

Составила старший преподаватель кафедры АПП Дмитриева О.В.

Утверждены на заседании кафедры “ 23 ” декабря 2004г.

Рекомендованы методическим советом университета
“ _____ ” _____ 2005г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Расчет погрешностей средств измерений	5
2. Влияние методических погрешностей на результаты измерений	10
3. Обнаружение и исключение систематических погрешностей	14
4. Вероятностное описание случайных погрешностей	18
5. Грубые погрешности и методы их исключения	22
6. Обработка результатов прямых многократных измерений	25
7. Прямые однократные измерения	27
8. Обработка результатов косвенных измерений	31
Список литературы	34

Введение

Для целей исследования и оценивания погрешность описывается с помощью определенной модели (систематическая, случайная, методическая, инструментальная и т.д.). На выбранной модели определяют характеристики, пригодные для количественного выражения тех или иных ее свойств. Задачей обработки данных при измерениях и является нахождение оценок этих характеристик.

Выбор модели погрешности обусловлен сведениями об её источниках как априорными, так и полученными в ходе измерительного эксперимента. Для систематических погрешностей справедливы детерминистские модели, при которых систематическая погрешность может быть представлена постоянной величиной, либо известной зависимостью. Общей моделью случайной погрешности служит случайная величина, обладающая функцией распределения вероятностей.

В целях единообразия представления результатов и погрешностей измерений показатели точности и формы представления результатов измерений стандартизированы. Обработке подвергают принципиально неточные данные, и точность методов обработки должна быть согласована с требуемой точностью результата измерения и точностью исходных данных.

Распространенной ошибкой при оценивании результатов и погрешностей измерений является вычисление их и запись с чрезмерно большим числом значащих цифр. Необходимо помнить, что поскольку погрешности измерений определяют лишь зону недостоверности результатов, т.е. дают представление о том, какие цифры в числовом значении результата являются сомнительными, погрешности не требуется знать очень точно. Для технических измерений допустимой считается **погрешность оценивания погрешности в 15...20%. Стандартом установлено**, что в численных показателях точности измерений (в том числе и в погрешности) должно быть **не более двух значащих цифр**.

1. Расчет погрешностей средств измерений

Погрешность результата измерений в значительной мере зависит от погрешности средств измерений, являющейся важнейшей составляющей, от которой зависит качество измерений.

Технические характеристики, оказывающие влияние на результаты и на погрешности измерений, называются *метрологическими характеристиками средств измерений*. В зависимости от специфики и назначения средств измерений, нормируются различные наборы или комплекты метрологических характеристик. В соответствии со стандартом метрологические характеристики средств измерений используются для определения результата измерений и расчетной оценки характеристик инструментальной составляющей погрешности измерений, расчета метрологических характеристик каналов измерительных систем и оптимального выбора средств измерений.

Инструментальная погрешность измерения – погрешность из-за несовершенства средств измерений. Эта погрешность в свою очередь обычно подразделяется на основную погрешность средств измерения и дополнительную.

Основная погрешность средства измерений – это погрешность в условиях, принятых за нормальные, т.е. при нормальных значениях всех величин, влияющих на результат измерения (температуры, влажности, напряжения питания и др.):

$$\Delta = a \text{ или } \Delta = (a + bx), \quad (1.1)$$

где Δ и x выражаются в единицах измеряемой величины.

Абсолютной погрешностью прибора называется разность между показанием прибора и действительным значением измеряемой величины:

$$\Delta x = x_n - X. \quad (1.2)$$

Поправкой прибора называется разность между действительным значением измеряемой величины и показанием прибора. Численно поправка равна абсолютной погрешности, взятой с обратным знаком:

$$\nabla = -\Delta x. \quad (1.3)$$

Дополнительная погрешность возникает при отличии значений влияющих величин от нормальных. Обычно различают отдельные составляющие дополнительной погрешности, например, температурную погрешность, погрешность из-за изменения напряжения питания и т.п.

Относительная погрешность средств измерений - погрешность средств измерений, выраженная отношением абсолютной погрешности к действительному значению физической величины, в пределах диапазона измерений.

$$\delta = \pm \frac{\Delta x}{X} \cdot 100\% \approx \frac{\Delta x}{x_n} \cdot 100\%. \quad (1.4)$$

где Δx - абсолютная погрешность;

x_n - показания прибора.

Приведенная погрешность средств измерений - относительная погрешность, определяемая отношением абсолютной погрешности измерительного прибора к нормирующему значению. Нормирующее значение - это условно принятое значение, равное или верхнему пределу измерений, или диапазону измерений, или длине шкалы и т. д. Например, для милливольтметра термоэлектрического термометра с пределами измерений 200 и 600°C нормирующее значение $x_N = 400^\circ\text{C}$. Приведенную погрешность можно определить по формуле

$$\gamma = \frac{\Delta x_n}{x_N} \cdot 100\%. \quad (1.5)$$

где x_N — нормирующее значение.

Например, значения абсолютной, относительной, приведенной погрешности потенциометра с верхним пределом измерений 150°C при $x_n = 120^\circ\text{C}$, действительным значением измеряемой температуры $X = 120,6^\circ\text{C}$ и нормирующим значением верхнего предела измерений $x_N = 150^\circ\text{C}$ будут, соответственно, составлять $\Delta x_n = -0,6^\circ\text{C}$, $\delta = -0,5\%$, $\gamma = -0,4\%$.

Предел допускаемой погрешности средств измерений - наибольшая погрешность средств измерений, при которой оно может быть признано годным и допущено к применению. В случае превышения установленного предела средство измерений остается непригодным к применению.

Пределы допускаемой приведенной основной погрешности, определяемой по формуле (1.5),

$$\gamma = \frac{\Delta x_g}{x_N} = \pm p, \quad (1.6)$$

где p - отвлеченное положительное число, выбираемое из ряда: $1,0 \cdot 10^n$; $1,5 \cdot 10^n$; $1,6 \cdot 10^n$; $2 \cdot 10^n$; $2,5 \cdot 10^n$; $3 \cdot 10^n$; $4 \cdot 10^n$; $5 \cdot 10^n$; $6 \cdot 10^n$ (где $n=1; 0; -1; -2$ и т. д.).

Для средств измерений, используемых в повседневной практике, принято деление по точности на классы.

Класс точности средств измерений - обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами средств измерений, влияющими на точность, значения которых устанавливаются в стандартах на отдельные виды средств измерений.

Класс точности средств измерений характеризует их свойства в отношении точности, но не является непосредственным показателем точности измерений, выполненных с помощью этих средств.

Классы точности устанавливаются стандартами, содержащими технические требования к средствам измерений, подразделяемым по точности. Средства измерений должны удовлетворять требованиям, предъявляемым к метрологическим характеристикам, установленным для присвоенного им класса точности как при выпуске их из производства, так и в процессе эксплуатации.

Пределы допускаемых дополнительных погрешностей устанавливаются в виде долевого значения предела допускаемой основной погрешности для всей рабочей области влияющей величины или ее интервала, отношения предела допускаемой дополнительной погрешности, соответствующей интервалу величины, к этому интервалу, либо в виде зависимости предела, допускаемой относительной погрешности от номинальной или предельной функции влияния. Пределы всех основных и дополнительных допускаемых погрешностей выражаются не более чем двумя значащими цифрами, причем погрешность округления при вычислении пределов не должна превышать 5 %.

Обозначения классов точности наносятся на циферблаты, щитки и корпуса средств измерений, приводятся в нормативно-технических документах.

Пример

Десять одинаковых осветительных ламп соединены параллельно. Ток каждой лампы $I_n = 0,3$ А. Определить абсолютную и относительную погрешности амперметра, включенного в неразветвленную часть цепи, если его показания $I_1 = 3,3$ А.

Решение

1. Ток в неразветвленной части цепи

$$I = n \cdot I_n = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ А} .$$

2. Абсолютная погрешность

$$\Delta I = I_1 - I = 3,3 - 3 = 0,3 \text{ А.}$$

3. Относительная погрешность

$$\delta_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\% = \frac{0,3}{3} \cdot 100\% = 10\%.$$

Задачи

1. Температура в термостате измерялась техническим термометром со шкалой $0 \dots 500^\circ\text{C}$, имеющим пределы допускаемой основной погрешности $\pm 4^\circ\text{C}$. Показания термометра составили 346°C . Одновременно с техническим термометром в термостат был погружен лабораторный термометр, имеющий свидетельство о поверке. Показания лабораторного термометра составили 352°C , поправка по свидетельству составляет -1°C . Определите, выходит ли за пределы допускаемой основной погрешности действительное значение погрешности показаний технического термометра.
2. Было проведено однократное измерение термо-ЭДС автоматическим потенциометром класса $0,5$ градуировки ХК со шкалой $200 \dots 600^\circ\text{C}$. Указатель стоит на отметке 550°C . Оцените максимальную относительную погрешность измерения термо-ЭДС потенциометром на отметке 550°C . Условия работы нормальные.
3. Определить относительную погрешность измерения напряжения 100 В вольтметром класса точности $2,5$ на номинальное напряжение 250 В .
4. Амперметр с верхним пределом измерения 10 А показал ток $5,3 \text{ А}$ при его действительном значении, равном $5,23 \text{ А}$. Определить абсолютную, относительную и относительную приведенную погрешности амперметра, а также абсолютную поправку.
5. При поверке амперметра с пределом измерения 5 А в точках шкалы: $1; 2; 3; 4$ и 5 А получены следующие показания образцового прибора: $0,95; 2,06; 3,05; 4,07$ и $4,95 \text{ А}$. Определить абсолютные, относительные и относительные приведенные погрешности в каждой точке шкалы и класс точности амперметра.
6. При поверке технического амперметра получены следующие показания приборов: поверяемый амперметр $1-2-3-4-5-4-3-2-1 \text{ А}$,
образцовый $\left\{ \begin{array}{l} \text{ход вверх } 1,2-2,2-2,9-3,8-4,8 \text{ А} \\ \text{ход вниз } 4,8-3,9-2,9-2,3-1,1 \text{ А} \end{array} \right.$

Найти абсолютную и относительную приведенную погрешности, а также вариации показаний прибора. Определить, к какому классу точности его можно отнести.

7. Поверка вольтметра методом сравнения с показаниями образцового прибора дала следующие результаты:

Образцовый прибор, V	Поверяемый прибор, V	
	при увеличении	при уменьшении
1	1,020	1,025
2	1,990	2,010
3	2,980	2,990
4	3,975	3,980
5	4,950	4,975

Определить наибольшую относительную приведенную погрешность и класс точности.

8. Определить относительную погрешность измерения напряжения, если показание вольтметра класса 1,0 с пределом измерения 300 В составило 75 В.
9. Определить абсолютную и относительную погрешности измерений, если вольтметр с пределом измерений 300 В класса 2,5 показывает 100 В.
10. Для измерения напряжения используются два вольтметра: $V_1(U_{\text{ном}}=30 \text{ В}; K_v=2,5)$ и $V_2(U_{\text{ном}}=150 \text{ В}; K_v=1,0)$. Определить, какой вольтметр измеряет напряжение точнее, если первый показал 29,5 В, а другой - 30 В.
11. В цепь током 15 А включены три амперметра со следующими параметрами: класса точности 1,0 со шкалой на 50 А, класса 1,5 на 30 А и класса 2,5 на 20 А. Определить, какой из амперметров обеспечит большую точность измерения тока в цепи.
12. Имеются три вольтметра: класса 1,0 номинальным напряжением 300 В класса 1,5 на 250 В и класса 2,5 на 150 В. Определить, какой из вольтметров обеспечит большую точность измерения напряжения 130 В.
13. Показания амперметра $I_1=20 \text{ А}$, его верхний предел $I_n=50 \text{ А}$; показания образцового прибора, включенного последовательно, $I=20,5 \text{ А}$. Определить относительную и приведенную относительную погрешности амперметра.
14. Определить относительную погрешность измерения тока 10 А амперметром с $I_n=30 \text{ А}$ класса точности 1,5.
15. При измерении мощности ваттметром класса точности 0,5, рассчитанным

на номинальную мощность $P_H = 500$ Вт записано показание $P_1 = 150$ Вт. Найти пределы, между которыми заключено действительное значение измеряемой мощности.

16. Сопротивления включены по схеме, изображенной на рис.1.1. Ток в неразветвленной части цепи $I = 12$ А, в сопротивлениях $I_1 = 3$ А; $I_2 = 5$ А. Чему равны абсолютная и относительная погрешности амперметра, указанного на схеме, если его показания $I_3 = 3,8$ А?

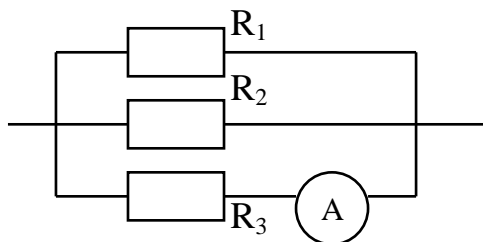


Рис.1.1. Схема измерения тока

2. Влияние методических погрешностей на результаты измерений

Методическая погрешность – погрешность измерения, происходящая из-за несовершенства метода измерений. Эта погрешность может возникать из-за принципиальных недостатков используемого метода, из-за неполноты знаний о происходящих при измерении процессах, из-за неточности применяемых расчетных формул. Методическая погрешность может и должна быть оценена только самим экспериментатором с учетом конкретных условий эксперимента.

Пример

Оценить погрешность измерения мощности методом двух приборов (рис.2.1).

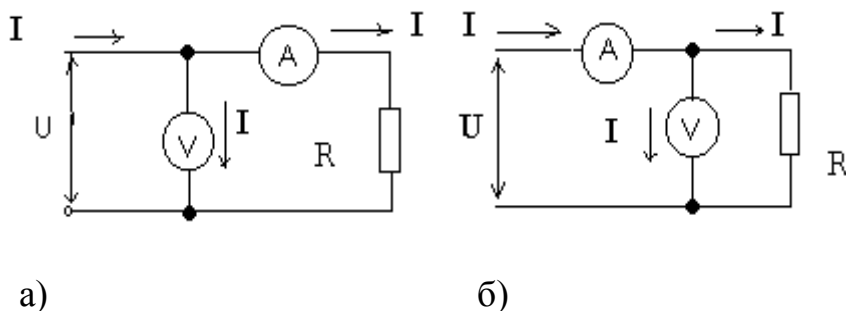


Рис.2.1. Схема измерения мощности: I_a – ток, измеряемый амперметром; I_H – ток, протекающий через сопротивление нагрузки; I_v – ток, протекающий через вольтметр; P_H – действительное значение измеряемой мощности.

Измеренное значение в случае а)

$$P = I_H U = I_H (U_H + U_a) = I_H U_H + I_H U_a = P_H + I_H U_a.$$

Абсолютная погрешность $\Delta_p = P - P_H = P_H + I_H U_a - P_H = I_H U_a$.

Относительная погрешность

$$\delta_{p1} = \Delta_p / P_H = I_H U_a / I_H U_H = U_a / U_H = (I_H R_a) / (I_H R_H) = R_a / R_H.$$

$\delta_{p1} \rightarrow 0$ при $R_a \rightarrow 0$ или $R_H \rightarrow \infty$.

Измеренное значение в случае б):

$$P = I U_H = (I_H + I_V) U_H = I_H U_H + I_V U_H = P_H + I_V U_H.$$

Абсолютная погрешность $\Delta_p = P - P_H = P_H + I_V U_H - P_H = I_V U_H$.

Относительная погрешность

$$\delta_{p2} = \Delta_p / P_H = I_V U_H / I_H U_H = I_V / I_H = (U_H / R_V) / (U_H / R_H) = R_H / R_V.$$

$\delta_{p2} \rightarrow 0$ при $R_H \rightarrow 0$ или $R_V \rightarrow \infty$.

$$\delta_{p1} = \delta_{p2} \Rightarrow R_H / R_V = R_a / R_H \Rightarrow R_H = \sqrt{R_a R_V}.$$

При $R_a = 0,002$ Ом; $R_V = 1000$ Ом; $R_H = 1,41$ Ом; $\delta_p = 0,14\%$.

Пример

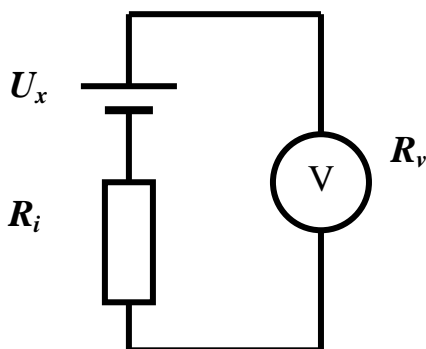


Рис.2.2. Схема измерения напряжения

Оценить систематическую погрешность измерения напряжения U_x источника, обусловленную наличием внутреннего сопротивления вольтметра. Внутреннее сопротивление источника напряжения $R_i = 50$ Ом; сопротивление вольтметра $R_v = 5$ кОм; показание вольтметра $U_{изм} = 12,2$ В.

Решение

Здесь $U_{изм} = \frac{R_v}{R_v + R_i} \cdot U_x$ и относительная систематическая

$$\text{погрешность } \frac{\Delta}{U_x} = \frac{U_{изм} - U_x}{U_x} \cdot 100\% = -\frac{R_i}{R_i + R_v} \cdot 100\% = 0,99\%.$$

Это достаточно ощутимая погрешность и ее следует учесть введением поправки. Поправка ∇ равна погрешности, взятой с обратным знаком.

$$\nabla = 0,99 \cdot 10^{-2} \cdot 12,2 = +0,12 \text{ В.}$$

$$U_x = 12,2 + 0,12 = 12,32 \text{ В.}$$

Полученная оценка имеет погрешность из-за погрешностей в определении показаний вольтметра (личная или субъективная погрешность), а также из-за инструментальной погрешности вольтметра. Эта погрешностью при введении поправки не исключается и называется *неисключенным остатком систематической погрешности*.

Личные систематические погрешности связаны с индивидуальными особенностями наблюдателя. Для уменьшения этого вида погрешностей надо точно соблюдать правила эксплуатации средств измерений и иметь навыки работы с измерительной техникой.

Задачи

1. Элемент, у которого $E = 1,5 \text{ В}$, а внутреннее сопротивление $R_0 = 0,2 \text{ Ом}$, замкнут на внешнее сопротивление $R = 14,8 \text{ Ом}$. Определить, чему будет равна относительная погрешность при расчете тока в цепи, если внутренним сопротивлением элемента пренебречь. Как изменится относительная погрешность, если при прочих равных условиях внешнее сопротивление вместо $14,8$ станет равным $0,3 \text{ Ом}$?
2. Какова относительная погрешность измерения ЭДС генератора, изображенного на рис.2.3., при измерении ее вольтметром с сопротивлением 10 кОм ? Внутреннее сопротивление генератора $R_{\text{я}} = 0,2 \text{ Ом}$.

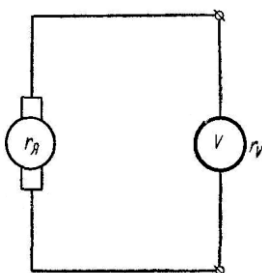
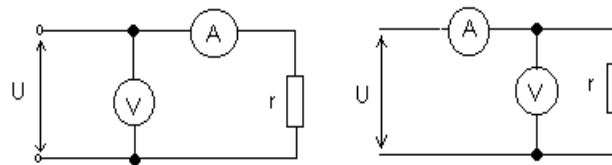


Рис.2.3. Схема измерения ЭДС генератора

3. С помощью амперметра с внутренним сопротивлением R_A измерено значение тока, протекающего через резистор R , подключенный к источнику напряжения с внутренним сопротивлением R_i . Определить относительную систематическую погрешность δ_c измерения тока, вызванную сопротивлением амперметра
4. Амперметр сопротивлением $R_A = 0,01 \text{ Ом}$ и вольтметр сопротивлением $R_V = 25 \text{ Ом}$ применяются в схеме для измерения сопротивления якоря электродвигателя. Составить схему измерения методом амперметра и вольтметра, а также определить приближенное и точное значение

сопротивления и относительную погрешность, допускаемую при определении сопротивления по приближенной формуле, если наиболее вероятные значения тока и напряжения, полученные в результате повторных измерений, следующие: $I=8,5$ А , $U=1,25$ В.

5. Определить относительную погрешность измерения сопротивления последовательной обмотки возбуждения электродвигателя, если ток $I=1,1$ А, напряжение $U=33$ мВ, сопротивление амперметра $0,1$ Ом, милливольтметра 10 Ом. Составить схему измерения.
6. Для измерения сопротивления $R=200$ Ом используются амперметр сопротивлением $R_A=0,05$ Ом, вольтметр сопротивлением $R_V=10$ кОм. Какая из двух схем (рис.2.4 а и б) измерения сопротивления методом амперметра и вольтметра дает меньшую погрешность измерения?



а).

б).

Рис.2.4. Схема измерения сопротивления

7. Для определения ЭДС генератора к его зажимам присоединен вольтметр сопротивлением $R_V = 1200$ Ом. Внутреннее сопротивление генератора $R_г = 0,6$ Ом. Какую ошибку мы допускаем, считая показание вольтметра равным Э. Д. С. генератора?
8. При измерении напряжения на нагрузке сопротивлением 7 Ом вольтметр показал $13,5$ В. ЭДС. источника $E = 14,2$ В, а его внутреннее сопротивление $R_0 = 0,1$ Ом. Определить абсолютную и относительную погрешности измерения.
9. По схеме амперметра и вольтметра измеряется сопротивление нагрузки R_H . За измеренное значение принимается сопротивление, найденное по закону Ома. Определить, какая из схем дает большую погрешность, если известно, что ток $I_H= 5$ А, напряжение $U_H=120$ В, $R_V=20$ кОм, $R_A=0,01$ Ом. Составить схемы измерения.
10. При измерении сопротивления обмотки якоря методом амперметра и вольтметра применяемые приборы имели следующие показания: амперметр с пределом измерения $0,75$ А - 90 делений; вольтметр с пределом измерения $7,5$ В и сопротивлением $2,5$ кОм - $113,5$ делений.

Шкалы обоих приборов имеют 150 делений. Составить схему измерения и определить сопротивление якоря.

11. В лаборатории при измерении двух сопротивлений методом амперметра и вольтметра применены: миллиамперметр с сопротивлением 10 Ом; вольтметр с сопротивлением 400 Ом. Показания приборов по схеме рис.2.4,а при измерении первого сопротивления были $U_1=0,7$ В, $I_1=50$ мА, а при измерении второго сопротивления соответствующие измерения дали $U_2=1,32$ В, $I_2=26,5$ мА; Определить значения сопротивлений и относительную погрешность измерения.
12. В лаборатории при измерении двух сопротивлений методом амперметра и вольтметра применены: миллиамперметр с сопротивлением 10 Ом; вольтметр с сопротивлением 400 Ом. Показания приборов по схеме рис.2.4,б $U_1=0,2$ В, $U_2=1,05$ В, токи $I_1=50$ мА, $I_2=29$ мА. Определить значения сопротивлений и относительную погрешность измерения.

3. Обнаружение и исключение систематических погрешностей

В зависимости *от характера и причин появления* погрешности измерений и средств измерений делят на *систематические (детерминированные) и случайные (стохастические)*. Различают ещё грубые погрешности и промахи.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, которая при повторении равноточных измерений неизменного размера остается постоянной или закономерно изменяется. Систематические погрешности могут быть изучены, при этом результат измерения может быть уточнен или путем внесения поправок, если числовые значения этих погрешностей определены, или путем применения таких способов измерения, которые дают возможность исключить влияние систематических погрешностей без их определения. Числовые значения систематических погрешностей определяются путем поверки средств измерений.

В настоящее время, особенно после введения одного из основополагающих метрологических стандартов ГОСТ 8.009-84 “ГСИ. Основные метрологические характеристики средств измерений”, понятие “систематическая погрешность” несколько изменилось по отношению к определению, данному ГОСТ 16263-70 “ГСИ. Метрология Термины и определения”. Систематическая погрешность считается

специфической, “вырожденной” случайной величиной, обладающей некоторыми, но не всеми свойствами случайной величины, изучаемой в теории вероятностей и математической статистике. Свойства систематической погрешности, которые необходимо учитывать объединении составляющих погрешности, отражаются такими характеристиками, что и свойства “настоящих” случайных величин - дисперсией (СКО) и коэффициентом взаимной корреляции.

При проведении измерений стараются в максимальной степени исключить или учесть влияние систематических погрешностей. Постоянная систематическая погрешность не устраняется при многократных измерениях. Для устранения постоянных систематических погрешностей применяют графические и специальные статистические методы. К последним относятся способ последовательных разностей, дисперсионный анализ и др. **Способ последовательных разностей (критерий Аббе)** применяется для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности и состоит в следующем. Дисперсию результата измерений можно оценить двумя способами: обычным

$$S^2[x] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.1)$$

и вычислением суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_{i+1} - x_i)^2$

$$Q^2[x] = \frac{1}{2n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \quad (3.2)$$

Если в процессе измерений происходило смещение центра группирования результатов наблюдений, т.е. имела место переменная систематическая погрешность, то $S^2[x]$ дает преувеличенную оценку дисперсии результатов наблюдений. Это объясняется тем, что на $S^2[x]$ влияют вариации \bar{x} . В то же время изменения центра группирования \bar{x} весьма мало сказываются на значениях последовательных разностей $d_i = x_{i+1} - x_i$ поэтому смещения \bar{x} почти не отражаются на значении $Q^2[x]$.
Отношение

$$v = Q^2[x] / S^2[x] \quad (3.3)$$

является критерием для обнаружения систематических смещений центра группирования результатов наблюдений. Критическая область для этого критерия (критерия Аббе) определяется как $P(v < v_q) = q$, где $q = 1 - P$ – уровень

значимости, P - доверительная вероятность. Значения v_q для разных уровней значимости q и числа наблюдений n приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Значения критерия Аббе

n	v_q при q , равном			n	v_q при q , равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,445	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Если полученное значение критерия Аббе меньше v_q , при заданных q и n , то гипотеза о постоянстве центра группирования результатов наблюдений отвергается, т.е. обнаруживается переменная систематическая погрешность результатов измерений.

Пример

Таблица 3.2

Результаты наблюдений

n	x_i	$d_i = x_{i+1} - x_i$	d_i	$v_i = x_{i+1} - x_i$	v_i^2
1	13,4	-0,1	0,01	-0,6	0,36
2	13,3	+1,2	1,44	-0,7	0,49
3	14,5	-0,7	0,49	+0,5	0,25
4	13,8	+0,7	0,49	-0,2	0,04
5	14,5	+0,1	0,01	+0,5	0,25
6	14,6	-0,5	0,26	+0,6	0,86
7	14,1	+0,2	0,04	+0,1	0,01
8	14,3	+0,3	0,09	+0,3	0,09
9	14,0	+0,3	0,09	0,0	0,0
10	14,3	-1,1	1,21	+0,3	0,09
11	13,2	-	-	-0,8	0,64
Σ 154,0		-0,2	4,12	0,0	2,58

Используя способ последовательных разностей, определить, присутствует ли систематическая погрешность в ряду результатов наблюдений, приведенных во втором столбце табл.3.2.

Для приведенного ряда результатов вычисляем: среднее арифметическое $\bar{x}=154,0/11=14$; оценку дисперсии $S^2[x]=2,58/10=0,258$; значение $Q^2[x]=4,12/(2 \cdot 10)=0,206$; критерий Аббе $\nu=0,206/0,258=0,8$. Как видно из табл.3.1, для всех уровней значимости ($q=0,001$; $0,01$ и $0,05$) при $n=11$ имеем $\nu > \nu_q$, т.е. подтверждается нулевая гипотеза о постоянстве центра группирования. Следовательно, условия измерений для приведенного ряда оставались неизменными, и систематических расхождений между результатами наблюдений нет.

Задача

Используя способ последовательных разностей, определить, присутствует ли систематическая погрешность в ряду результатов наблюдений, приведенных в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Результаты измерений

№ варианта	U, В									
1	2									
1	12,38	11,97	12,34	11,46	11,75	12,05				
	11,88	11,81	14,05	12,33	12,45					
	12,07	11,78	11,23	11,91	11,74					
2	12,91	12,88	12,99	13,09	13,33	13,43				
	13,72	13,06	12,76	13,23	10,57					
	11,98	12,78	12,95	13,07	13,25					
3*	14,38	14,44	14,32	14,21	13,78	14,22	13,59	14,21	13,77	
	13,88	14,01	13,67	14,09	13,06	13,69	13,89	13,75		
4*	14,88	14,43	15,79	14,66	15,34	14,99				
	15,21	16,98	15,57	14,69	15,32	15,27				
	15,36	14,45	14,79	15,37	15,01					
5	16,31	16,02	15,58	15,88	15,92	16,01	15,88	15,82	15,94	
	16,69	16,09	15,97	15,94	16,01	16,04	15,69	15,87		
6*	17,09	17,35	17,34	16,99	16,85	17,21	17,11	16,44		
	17,22	16,81	17,72	17,15	17,25	17,89	17,13	17,09		
7	18,11	18,21	18,32	18,41	17,88	17,67	17,79			
	17,91	17,67	18,25	18,32	15,44	17,98	18,44			
	18,24	18,12	18,28	18,22	17,93	17,86				
8	19,09	19,03	18,77	18,98	18,75	19,36				
	18,66	16,88	18,71	19,61	19,49	19,22				
	18,83	18,79	19,29	19,74	19,33					
9*	19,98	19,89	20,03	20,14	20,28	19,84	20,08	20,23		
	19,99	19,83	20,33	20,11	19,76	22,16	20,41	20,77		

Продолжение табл.3.3

1	2								
10	21,09	20,87	21,33	21,34	21,21	20,09			
	21,04	21,24	21,24	21,22	21,19	21,41			
	21,13	20,67	20,94	21,12	21,19				
11	22,12	22,28	22,44	24,06	21,75	21,32			
	21,88	21,81	22,33	22,45	22,02	21,97			
	21,91	22,07	22,34	21,74	21,46	21,32			
12	22,75	22,87	22,29	23,43	23,33				
	23,72	23,06	23,23	20,57	22,96				
	22,98	21,99	27,07	23,25	23,09				
13	24,38	23,96	23,59	23,75	24,07				
	24,29	24,35	23,97	26,05	23,77				
	23,78	23,69	24,21	23,93	24,44				
14*	25,79	24,93	25,03	24,88	25,29	25,11	24,99	24,79	
	25,02	25,06	24,95	25,13	26,98	24,68	25,08	25,03	
15	28,88	25,82	25,87	25,97	26,55	26,11	26,31	26,09	25,88
	25,69	25,92	25,94	24,09	26,02	26,88	26,69	25,58	
16	27,09	26,77	27,22	26,93	24,69	26,44	26,96	26,85	
	26,91	26,89	26,76	27,72	27,22	27,08	26,81	27,09	
17	28,24	27,88	28,85	25,43	27,67	27,86	28,44	28,22	
	28,32	28,12	27,93	28,41	28,32	28,21	28,11	27,91	
18	29,74	28,83	28,66	29,03	29,29	28,71	29,61	29,33	29,36
	28,98	29,09	28,79	26,88	28,77	28,75	29,49	29,22	28,77
19*	29,88	29,99	30,11	30,34	30,28	30,33	30,06	32,16	
	30,12	30,01	29,95	29,78	30,05	30,12	30,13	30,03	
20*	31,113	31,27	31,20	31,19	30,52	31,17	31,23	31,07	31,18
	31,25	31,01	30,24	30,66	30,48	31,33	30,09	28,76	31,12

4. Вероятностное описание случайных погрешностей

Когда при проведении в одинаковых условиях повторных измерений одной и той же постоянной величины получаем результаты, отличающиеся друг от друга, это свидетельствует о наличии в них случайных погрешностей. Эта погрешность возникает вследствие одновременного воздействия на результат многих случайных возмущений и сама является случайной величиной. Для установления вероятностных (статистических) закономерностей появления случайных погрешностей и количественной оценки результата измерений и его случайной погрешности используются методы теории вероятностей и математической статистики.

Для характеристики свойств случайной величины в теории вероятностей используют понятие *закона распределения вероятностей случайной величины*. В метрологии преимущественно используется дифференциальная

форма – закон *распределения плотности вероятностей случайной величины*.

Рассмотрим формирование дифференциального закона.

1. Проведем n измерений одной величины X .
2. Получим группу наблюдений $x_1; x_2, \dots, x_n$.
3. Расположим результаты в порядке возрастания от x_{min} до x_{max} .
4. Найдем размах ряда $L = x_{max} - x_{min}$.
5. Разделим размах ряда на k равных интервалов $\Delta l = L/k$.
6. Подсчитаем количество наблюдений n_k , попадающих в каждый интервал.
7. Изобразим полученные результаты графически (по оси абсцисс – значения физической величины с границами интервалов; по оси ординат – относительная частота попаданий n_k/n).
8. Достроив по полученным точкам соответствующие прямоугольники, получим гистограмму, дающую представление о плотности распределения результатов наблюдений в данном опыте.

Пример. $N=50$ измерений.

№ интервала	1	2	3	4	5
n_k	5	10	18	11	6
n_k/n	0,1	0,2	0,36	0,22	0,12

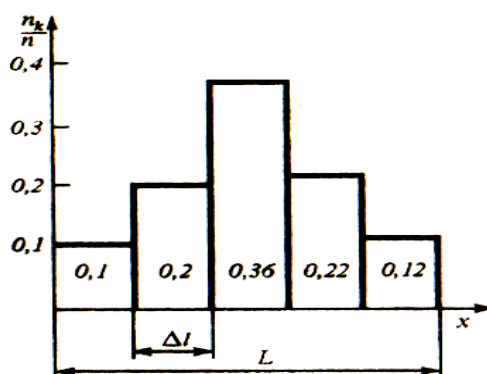


Рис.4.1. Гистограмма

Если распределение случайной величины статистически устойчиво, то можно ожидать, что при повторных сериях наблюдений той же величины в тех же условиях, относительные частоты попаданий в каждый интервал будут близки к первоначальным. Следовательно, по гистограмме можно предсказывать распределение результатов измерений по интервалам.

При бесконечном увеличении числа наблюдений $n \rightarrow \infty$ и бесконечном уменьшении ширины интервалов $\Delta l \rightarrow 0$, ступенчатая кривая, огибающая

гистограмму, перейдет в плавную кривую $f(x)$, которая называется **кривой плотности распределения вероятностей случайной величины**, а уравнения ее описывающие **дифференциальным законом распределения**.

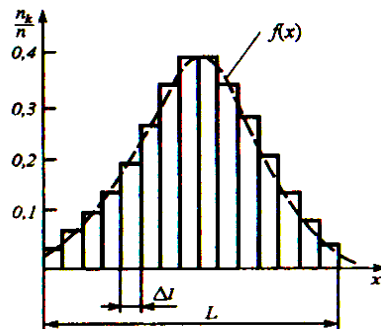


Рис.4.2. Кривая плотности распределения вероятностей

Кривая плотности распределения вероятностей всегда неотрицательна и подчинена условию нормирования в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (4.1)$$

Если известен закон распределения случайной величины $f(x)$, то вероятность P ее попадания в интервал от x_1 до x_2

$$P\{x_1 \leq x \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (4.2)$$

Числовые характеристики случайных величин вычисляются по следующим формулам:

- среднее арифметическое значение исправленных результатов наблюдений \bar{x} , которое принимается за результат измерения, если подтверждается гипотеза о нормальном распределении результатов наблюдений и ряд наблюдений не содержит промахов.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (4.3)$$

- смещенная (S^*) и несмещенная (S) среднеквадратическая погрешность ряда измерений

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}; \quad (4.4)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (4.5)$$

- среднеквадратическая погрешность среднеарифметического значения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (4.6)$$

Методика проверки гипотезы о том, что результаты наблюдений распределены нормально, зависит от числа наблюдений:

- если $n \geq 50$, используют критерий χ^2 Пирсона;
- если $15 < n < 50$, то используют составной критерий;
- если $n \leq 15$, то гипотезу не проверяют (в этом случае данная методика обработки результатов может применяться, если априорно известно, что наблюдения распределены нормально).

Рассмотрим методику проверки гипотезы о нормальном законе распределения результатов наблюдений при $15 < n < 50$. В этом случае используется *составной критерий*, включающий в себя критерий 1 и критерий 2. Гипотеза считается не противоречащей результатам наблюдений при уровне значимости $\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2$, если требования критерия 1 выполняются при уровне значимости α_1 , а критерия 2 – при уровне значимости α_2 . Рекомендуются значения уровня значимости α от 0,02 до 0,10.

Критерий 1. Вычисляют значение d

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{nS^*}. \quad (4.7)$$

Затем задаются уровнем значимости α_1 и по табл.4.1. находят значения d_1 и d_2 . Гипотеза удовлетворяет критерию 1, если $d_1 < d < d_2$.

Критерий 2. Определяют значение m :

$$m = \begin{cases} 1 & \text{при } 15 < n \leq 20, \\ 2 & \text{при } 20 < n < 50. \end{cases}$$

Затем задаются уровнем значимости α_2 и по табл.4.2. находят значение z . Далее находят число m_1 разностей $(x_i - \bar{x})$, удовлетворяющих неравенству $|x_i - \bar{x}| > z \cdot S$.

Гипотеза, удовлетворяет критерию 2, если $m_1 \leq m$.

Таблица 4.1

Значения d_1 и d_2

n	$\alpha_1=0,02$		$\alpha_1=0,10$	
	d_1	d_2	d_1	d_2
16	0,6829	0,9137	0,7236	0,8884
21	0,6950	0,9001	0,7304	0,8768
26	0,7040	0,8901	0,7360	0,8686
31	0,7110	0,8826	0,7404	0,8625
36	0,7167	0,8769	0,7440	0,8578
41	0,7216	0,8722	0,7470	0,8540
46	0,7256	0,8682	0,7496	0,8508
51	0,7291	0,8648	0,7518	0,8481

Таблица 4.2

Значения z

n α_2	16	20	24	28	32	36	40	44	49
0,01	2,5	2,6	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6
0,02	2,5	2,6	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6
0,05	2,3	2,4	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4

Задача

По данным, приведенным в табл.3.3. проверить гипотезу о согласованности эмпирического и теоретического распределения по составному критерию.

5. Грубые погрешности и методы их исключения

Грубая погрешность или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Источником грубых погрешностей являются резкие изменения условий измерения и ошибки, допущенные оператором.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не содержит грубой

погрешности, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удастся, то результат измерений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью q (уровнем значимости) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений.

Критерий «трех сигм» применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. По этому критерию считается, что результат, возникающий с вероятностью $q \leq 0,003$, маловероятен и его можно считать промахом, если $|\bar{x} - x_i| > 3S_x$, где S_x - оценка СКО измерений.

Данный критерий надежен при $n \geq 20 \dots 50$ и выполняем только для нормального закона распределения.

Критерий Романовского применяется, если число измерений $n < 20$. При этом выполняется отношение

$$\left| \frac{(\bar{x} - x_i)}{S_x} \right| = \beta \quad (5.1)$$

и сравнивается с критерием β_T , выбранным в табл.5.1. Если $\beta \geq \beta_T$, то результат x_i считается промахом и отбрасывается.

Таблица 5.1

Значения критерия Романовского $\beta=f(n)$

$q \backslash n$	4	6	8	10	12	15	20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Вариационный критерий Диксона – удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок). При его применении полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возрастающий ряд

$$x_1; x_2; \dots; x_n \quad (x_1 < x_2 < \dots < x_n).$$

Критерий Диксона определяется как

$$K_D = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}. \quad (5.2)$$

Критическая область для этого критерия $P(K_D > Z_q) = q$. Значения Z_q приведены в табл.5.2.

Таблица 5.2

Значения критерия Диксона

n	Z_q при q , равном			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

Пример

1. При диагностировании топливной системы автомобиля результаты пяти измерений расхода топлива составили: **22, 24, 26, 28, 32** л на 100 км. Последний результат вызывает сомнение. Проверить по критерию Романовского, не является ли он промахом.

Решение

Найдем среднее арифметическое значение расхода топлива и его СКО без учета последнего результата, т.е. для четырех измерений. Они соответственно равны:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{22 + 24 + 26 + 28}{4} = 25 \text{ л};$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} (9 + 1 + 1 + 9)} \approx 2,6.$$

Поскольку $n < 20$, то по критерию Романовского при уровне значимости **0,01** и $n=4$ табличный коэффициент $\beta_T = 1,73$.

Вычисленное для последнего, пятого измерения значение коэффициента

$$\left| \frac{(25 - 32)}{2,6} \right| = 2,69 > 1,73.$$

Критерий показывает, что последний результат необходимо отбросить.

2. Было проведено пять измерений напряжения в электросети. Получены следующие данные: $127,1; 127,2; 126,9; 127,6; 127,2$ В. Результат $127,6$ В существенно отличается от остальных. Проверить, не является ли он промахом.

Решение

Составим вариационный ряд из результатов измерений:

$126,9; 127,1; 127,2; 127,2; 127,6$ В.

Для последнего члена этого ряда критерий Диксона

$$K_D = (127,6 - 127,2) / (127,6 - 126,9) = 0,4 / 0,7 \approx 0,57.$$

Как следует из табл.5.2. этот результат может быть отброшен как промах лишь на уровне значимости $q=0,10$.

Задача

Для измерения действующего значения напряжения переменного тока произведено несколько наблюдений этого напряжения. Полученные результаты приведены в табл.3.3. Используя вышеприведенные критерии проверить, не содержат ли результаты измерений грубые погрешности. В вариантах, помеченных *, использовать критерий Романовского, в остальных случаях критерий Диксона.

6. Обработка результатов прямых многократных измерений

Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями производится в случаях, когда средними квадратическими отклонениями погрешностей нельзя пренебречь по сравнению с неисключенными остатками систематических погрешностей. Обработка производится по методике ГОСТ 8.207-76 «ГСИ. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений».

Данная методика применима при следующих условиях:

- наблюдения независимы и равноточны;
- результаты наблюдений распределены нормально;
- неисключенные остатки систематических погрешностей распределены по законам равномерной плотности.

Обработку наблюдений рекомендуется проводить в такой последовательности:

1. Исключить известные систематические погрешности из результатов измерений.

2. Вычислить среднее арифметическое значение исправленных результатов наблюдений \bar{x} , которое принимается за результат измерения, если подтверждается гипотеза о нормальном распределении результатов наблюдений и ряд наблюдений не содержит промахов по формуле (4.3).

3. Вычислить смещенную (S^*) и несмещенную (S) среднеквадратическую погрешность ряда измерений по формулам (4.4) и (4.5).

4. Вычислить среднеквадратическую погрешность среднеарифметического значения по формуле (4.6).

5. Проверить гипотезу о нормальном распределении результатов наблюдений.

6. Выявить грубые погрешности (промахи).

7. Вычислить доверительные границы (пределы допускаемых значений) случайной составляющей погрешности измерений.

$$\Delta = \pm t_p \cdot S_x,$$

где t_p – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа наблюдений n и выбранной доверительной вероятности. Значения коэффициента приведены в табл.6.2.

Таблица 6.2

Коэффициент распределения Стьюдента t_p

n	При доверительной вероятности p					n	При доверительной вероятности p				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999		0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62	12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60	13	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92	14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61	15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87	16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96	17	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41	18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04	19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78	20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
11	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59	∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Пример

Определить наиболее достоверное значение напряжение U постоянного тока, измеренного компенсатором постоянного тока и предельную

погрешность найденного значения при заданной доверительной вероятности $P=0,99$. Результаты 13 равнозначных измерений следующие: 100,08 мВ; 100,09 мВ; 100,07 мВ; 100,10 мВ; 100,05 мВ; 100,06 мВ; 100,04 мВ; 100,06 мВ; 99,95 мВ; 99,92 мВ; 100,02 мВ; 99,98 мВ; 99,97 мВ.

Решение

Среднее арифметическое значение ряда измерений

$$\bar{U} = \frac{1}{13} \sum_{i=1}^{13} U_i = 100,03 \text{ мВ}.$$

Сумма остаточных погрешностей $\sum_{i=1}^{13} (U_i - \bar{U}) = 0$, что свидетельствует о

правильности расчета \bar{U} .

Среднеквадратическая погрешность ряда измерений

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{13} (U_i - \bar{U})^2}{13 - 1}} = 0,057 \text{ мВ}.$$

Среднеквадратическая погрешность среднеарифметического значения

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0,057}{\sqrt{13}} = 0,016 \text{ мВ}.$$

Доверительный интервал $\Delta = 2,33 \cdot S_x = 2,33 \cdot 0,016 \approx 0,04 \text{ мВ}$.

Наиболее достоверное значение напряжения $U=(100,03 \pm 0,04) \text{ мВ}$, $P=0,98$.

Задача

По результатам, полученным при решении задачи №5 (с исключенными промахами), провести обработку результатов измерений и определить наиболее достоверное значение напряжения и предельную погрешность найденного значения.

7. Прямые однократные измерения

Для производственных процессов характерны однократные измерения. За результат прямого однократного измерения принимается полученная величина. При определении доверительных границ погрешности результата измерения доверительная вероятность принимается равной $0,95$.

Методика обработки результатов прямых однократных измерений приведена в рекомендациях МИ 1552-86 «ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей результатов измерений». Абсолютная погрешность результата измерения Δ (погрешность измерения) определяется тремя составляющими: инструментальной Δ_u , методической Δ_m и погрешности отсчитывания Δ_{omc} . В большинстве случаев полагают, что

$$\Delta = \Delta_u + \Delta_m + \Delta_{omc}. \quad (7.1)$$

По нормируемым метрологическим характеристикам можно определить только предельные значения составляющих погрешности Δ_i погрешности

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i.$$

В этом случае результат измерения можно представить в виде

$$x \pm \Delta; P=1, \quad (7.2)$$

где x – значение измеряемой величины;

Δ – предел погрешности результата измерения;

P – доверительная вероятность.

При наличии нескольких систематических погрешностей, заданных своими границами $\pm \Theta_i$ или доверительными границами $\pm \Theta_i(P)$, доверительная граница результата может быть рассчитана по формуле;

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \Theta_i^2} \quad (7.3)$$

$$\Theta(P) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Theta_i^2(P_j)}{k_j^2}} \quad (7.4)$$

где $\Theta_i(P_j)$ – доверительная граница i -й неисключенной систематической погрешности, соответствующая доверительной вероятности P_j ;

k_j - коэффициент, зависящий от P_j и определяемый так же, как и коэффициент k ;

$k=k(m:P)$ – коэффициент, равный **0,95** при $P=0,9$ и **1,1** при $P=0,95$ (при других доверительных вероятностях он определяется в соответствии с ГОСТом 8.207-76).

В практике имеет место приближенное оценивание погрешности полученного результата на основе метрологических характеристик, приведенных в нормативно-технической документации на используемые средства измерений. В простейшем случае, когда влияющие величины соответствуют нормальным условиям, погрешность результата прямого

однократного измерения равна пределу основной погрешности средства измерений, определяемой по нормативно-технической документации. Доверительная вероятность подразумевается равной **0,95**.

Пример

Оценить погрешность результата измерения напряжения $U=0,9 \text{ В}$ на сопротивлении $R=4 \text{ Ом}$, выполненного вольтметром класса точности **0,5** с верхним пределом измерения $U_N=1,5 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $R_V=1000 \text{ Ом}$. Известно, что дополнительные погрешности показаний вольтметра из-за магнитного поля и температуры не превышают соответственно $\Theta_{МП} = \pm 0,75\%$ и $\Theta_T = \pm 0,3\%$ допускаемой предельной погрешности.

Решение

Методическая погрешность измерения напряжения составляет

$$\delta_m = \frac{U_v - U}{U} \cdot 100\% = -\frac{R}{R + R_v} \cdot 100\%,$$

где U_v – показания вольтметра, В;

U – измеряемое напряжение, В.

$$\delta_m = -\frac{4}{4 + 1000} \cdot 100\% \approx -0,4\%.$$

Данная погрешность является систематической и должна быть внесена в результат в виде поправки $q = -\delta_m = -0,4\%$ или в абсолютной форме $\nabla = q \cdot U = 0,4 \cdot 0,9 \approx 0,004 \text{ В}$.

Результат измерения с учетом поправки $U' = 0,9 + 0,004 = 0,904 \text{ В}$.

Предел допускаемой относительной погрешности вольтметра на отметке **0,9 В** составляет $\delta_v = \frac{\gamma \cdot U_N}{U} \cdot 100\%$,

где γ – относительная приведенная погрешность прибора.

$$\delta_v = \frac{0,5 \cdot 1,5}{0,9} \cdot 100\% = 0,83\%.$$

Следовательно, $\Theta_v = \pm 0,83\%$.

Поскольку основная и дополнительная погрешности заданы своими граничными значениями, то они могут рассматриваться как неисключенные систематические погрешности и соответственно суммироваться.

При доверительной вероятности **0,95** доверительная граница неисключенной систематической погрешности согласно формуле (7.3)

$$\Theta = 1,1 \sqrt{\Theta_v^2 + \Theta_{мп}^2 + \Theta_T^2},$$

$$\Theta = 1,1\sqrt{0,83^2 + 0,75^2 + 0,3^2} \approx 1,3\%.$$

В абсолютной форме $\Delta = \Theta \cdot U' = 1,3 \cdot 0,904 \approx 0,012 В$.

Окончательный результат измерения записывается в виде $U=(0,904\pm 0,012) В$ при $P=0,95$.

Задача

Таблица 7.1

Результаты измерений

№ варианта	U, В	U _N , В	R, Ом	R _V , Ом	Класс точности	Нормальная температура, °С	Рабочая температура, °С
1	5	7,5	5	90	0,2	20±2	25
2	24	30	4·10 ⁴	30·10 ⁶	2,5	20±5	11
3	16	20	4·10 ⁴	10·10 ⁶	0,1	20±5	6
4	13	15	4	180	0,2	20±2	9
5	0,1	0,3	10 ⁵	30·10 ⁶	2,5	20±5	6
6	160	200	10 ⁶	10·10 ⁶	0,1	20±5	14
7	25	30	10	500	0,2	20±2	16
8	80	100	10 ⁶	30·10 ⁶	2,5	20±5	36
9	14	20	10 ⁶	10·10 ⁶	0,1	20±5	10
10	22	60	120	10 ⁶	0,2	20±2	15
11	230	300	10 ⁵	30·10 ⁶	2,5	20±5	4
12	18	20	5·10 ⁵	10·10 ⁶	0,1	20±5	34
13	27	30	100	500	0,2	20±2	12
14	25	30	5	30·10 ⁶	2,5	20±5	14
15	170	200	100	10·10 ⁶	0,1	20±5	14
16	260	300	5·10 ⁵	30·10 ⁶	2,5	20±5	5
17	8	10	5·10 ⁵	30·10 ⁶	2,5	20±5	12
18	5	10	10 ⁶	30·10 ⁶	2,5	20±5	36
19	20	30	50	500	0,2	20±2	15
20	18	30	50	500	0,2	20±2	8

Необходимо измерить напряжение постоянного тока на выходе активного двухполюсника в режиме холостого хода. Используя данные, приведенные в табл.7.1, оценить погрешность результата однократного измерения напряжения U на сопротивлении R , учитывая дополнительную температурную погрешность. В соответствии с ГОСТом 22261-82 дополнительная температурная погрешность для данного типа приборов не превышает основной при изменении температуры на каждые 10°С.

8. Обработка результатов косвенных измерений

При косвенных измерениях искомое значение величины находят расчетом на основе измерения других величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью

$$A = f(a_1, \dots, a_n). \quad (8.1)$$

Результатом косвенного измерения является оценка величины A , которую находят подстановкой в формулу (8.1) оценок аргументов a_i . Поскольку каждый из аргументов a_i измеряется с некоторой погрешностью, то задача оценивания погрешности результата сводится к суммированию погрешностей измерения аргументов. Методика обработки результатов косвенных измерений приведена в документе МИ 2083-90 «ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание погрешностей».

При сложной функции (8.1) и в особенности, если это функция нескольких аргументов, отыскание закона распределения погрешности результата связано со значительными математическими трудностями. В основе приближенного оценивания погрешности нелинейных косвенных измерений лежит линеаризация функции (8.1) и дальнейшая обработка результатов, как при линейных измерениях.

Применяя некоторые упрощения, получим несколько простых правил оценивания погрешности результата косвенного измерения.

П р а в и л о 1. Погрешности в суммах и разностях.

Если a_1 и a_2 измерены с погрешностями Δa_1 и Δa_2 и измеренные значения используются для вычисления суммы или разности $A = a_1 \pm a_2$, то суммируются абсолютные погрешности (без учета знака):

$$\Delta A = \Delta a_1 + \Delta a_2. \quad (8.2)$$

П р а в и л о 2. Погрешности в произведениях и частных.

Если измеренные значения a_1 и a_2 используются для вычисления $A = a_1 \cdot a_2$ или $A = a_1 / a_2$, то суммируются относительные погрешности

$$\delta A = \delta a_1 + \delta a_2. \quad (8.3)$$

где $\delta a = \Delta a / a$.

П р а в и л о 3. Измеренная величина умножается на точное число.

Если a используется для вычисления произведения $A = B a$, в котором B не имеет погрешности, то

$$\delta A = |B| \delta a. \quad (8.4)$$

П р а в и л о 4. Возведение в степень.

Если a используется для вычисления степени $A = a^n$, то

$$\delta A = n \delta a. \quad (8.5)$$

П р а в и л о 5. Погрешность в произвольной функции одной переменной. Если a используется для вычисления функции $A(a)$, то

$$\delta A = \frac{dA}{da} \delta a. \quad (8.6)$$

Использование правил позволяет получить не слишком завышенную оценку предельной погрешности результата нелинейного косвенного измерения при не слишком большом числе аргументов ($m < 5$).

Пример

1. Производится косвенное измерение электрической мощности, рассеиваемой на резисторе сопротивлением R при протекании по нему тока I . Так как $P = I^2 R$, то, применяя *правила 2 и 4*, получим $\delta P = \delta R + 2 \delta I$.

2. Измерением найдено значение угла $\Theta = (20 \pm 3)^\circ$. Необходимо найти $\cos \Theta$. Наилучшая оценка для $\cos 20^\circ = 0,94$. Погрешность $\Delta \Theta$ должна быть выражена в радианах, т.е. $\Delta \Theta = 3^\circ = 0,05$ рад. Тогда по *правилу 5* $\delta(\cos \Theta) = (\sin 20^\circ) \cdot 0,05 = 0,34 \cdot 0,05 = 0,017$. Окончательно $\cos \Theta = 0,94 \pm 0,02$.

Задачи

1. Для определения электрической мощности, выделяемой в активном сопротивлении, были измерены: напряжение 125 В вольтметром с номинальным напряжением 150 В класса точности 1,5 и сопротивление нагрузки 20 Ом одинарным мостом с погрешностью 0,2%. Найти мощность в нагрузке и наибольшую возможную относительную погрешность при ее измерении.
2. Для измерения затрат энергии в течение суток были замерены напряжение сети 215 В вольтметром на номинальное напряжение 250 В класса точности 1,5 и ток 120 А амперметром на 150 А класса точности 1,0. Определить количество энергии, расходуемое в печи за сутки, и наибольшую возможную абсолютную и относительную погрешности при ее измерении, если время измеряется с точностью до 1 мин.
3. Определить наибольшую возможную относительную погрешность при измерении электрической энергии ваттметром на номинальную мощность 750 Вт класса точности 0,5 за время 2 минуты, измеренное с точностью 2 секунды, если ваттметр показывает 200 Вт.
4. Определить наибольшую возможную относительную погрешность при измерении сопротивления с помощью вольтметра и амперметра, если

приборы показывают 25 В и 12,5 А. Вольтметр на номинальное напряжение 30 В класса точности 2,5 сопротивлением 2,5 кОм, амперметр на номинальный ток 15 А класса точности 1,5 сопротивлением 0,2 Ом. Составить схему измерения.

5. При измерении расхода калориметрическим расходомером измерение мощности нагревателя производилось по показаниям амперметра и вольтметра. Оба эти прибора имели класс точности 0,5, работали в нормальных условиях и имели, соответственно, шкалы 0...5 А и 0...30 В. Номинальные значения силы тока 3,5 А и напряжения 24 В. Оцените погрешность, с которой производится измерение мощности.
6. Для измерения мощности, потребляемой активной нагрузкой обладающей сопротивлением $11 \pm 0,5$ Ом, применялся вольтметр на номинальное напряжение 300 В класса точности 1,5. Определить потребляемую мощность и наибольшую относительную погрешность, если вольтметр показывает 240 В.
7. Определить класс точности амперметра на номинальный ток 500А, необходимого для измерения мощности нагрузки с погрешностью не более 3%, если напряжение сети 220 В измеряется с точностью 2%, а ток, потребляемый нагрузкой 320 А.
8. Для определения мощности электропечи были измерены: напряжение сети 220 В вольтметром на 300 В класса точности 1,5; ток 350 А амперметром на 500 А класса точности 2,5. Рассчитать мощность печи и наибольшую возможную абсолютную и относительную погрешности при ее измерении.
9. Определить напряжение на сопротивлении R_2 и наибольшую возможную относительную погрешность при его определении, если напряжение сети равно 220 В, а напряжение на сопротивлении R_1 U_1 равно 180 В. Для измерения используются вольтметры класса 1,0 на 250 В. (Рис.8.2.)

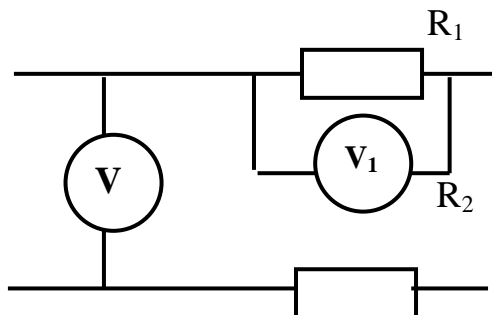


Рис.8.1. Схема измерения напряжения

10. Определить абсолютную ΔR и относительную погрешности косвенных измерений сопротивления резистора (рис.8.3), если показания

вольтметра 10 В, миллиамперметра 100 мА. Предел измерения вольтметра 15 В, класс точности 1,0; предел измерения амперметра 150 мА, класс точности 1,5.

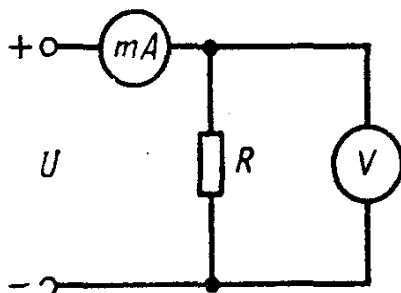


Рис.8.2. Схема измерения сопротивления резистора

11. Для измерения энергии были найдены напряжение с погрешностью $\gamma_U = +1\%$, сопротивление с погрешностью $\gamma_r = +0.5\%$, время с погрешностью $\gamma_t = +1.5\%$. Определить относительную погрешность измерения.
12. Вычислить наибольшую возможную относительную погрешность определения тока в неразветвленной части цепи, если измеряются токи в двух параллельных ветвях амперметрами класса точности 1,5 на номинальный ток 100 А. Показания приборов $I_1=60$ А, $I_2=50$ А. Составить схему включения приборов.

Список литературы

1. Тартаковский Д.Ф., Ястребов А.С. Метрология, стандартизация и технические средства измерений.-М.:Высшая школа,2001.-205с.
2. Сергеев А.Г. Крохин В.В. Метрология:Уч.пособие для вузов.-М.: ЛОГОС,2000.-408с.
3. Маркин Н.С. Практикум по метрологии: Уч.пособие.- М: Изд-во стандартов, 1994.-188с.

Дмитриева Ольга Венедиктовна

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Методические указания и контрольные задания по курсу “Метрология, стандартизация и сертификация” для студентов заочной формы обучения специальностей 220301 (210200) “Автоматизация технологических процессов и производств” (в машиностроении), 140211 (100400) “Электроснабжение”

Редактор Н.М.Кокина

Подписано к печати		Бумага тип.№1
Формат 60x84 1/16	Усл.печ.л. 2,25	Уч.изд.л. 2,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г.Курган, ул.Гоголя 25.
Курганский государственный университет, ризограф.