

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономическое моделирование и информатика»

***Математические методы
и статистическое моделирование***

Методические указания
к выполнению практических заданий
по дисциплинам «Математические методы принятия решений»
и «Математические модели и методы в управлении»
для студентов специальностей 060400, 061100
дневной и заочной форм обучения

Курган 2003

Кафедра “Экономическое моделирование и информатика”

Дисциплины «Математические методы принятия решений»
«Математические модели и методы в управлении»

Специальности: «Финансы и кредит» (060400),
«Менеджмент организации» (061100)

Составили: доцент Аликас В.Э.
ассистент Садов А.П.

Работа выполнена при равноценном участии авторов

Утверждены на заседании кафедры «17» октября 2003 г.

Рекомендованы редакционно-издательским советом университета

« ____ » _____ 2003 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Элементы линейной алгебры.....	4
1.1 Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Обратная матрица. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме.....	4
1.2 Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса. Правило Крамера.....	8
2 Математическое программирование.....	10
2.1 Примеры экономических задач, решаемых методами математического программирования. Геометрическое решение задач линейного программирования. Основные свойства решений.....	10
2.2 Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи. Основные способы построения начального плана.....	14
2.3 Нелинейное программирование. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.....	19
3 Теория вероятностей.....	21
3.1 Понятие теоретико-вероятностного эксперимента (испытания). Алгебра событий. Свойства операций над событиями. Классическое и статическое определения вероятности.....	21
3.2 Условная вероятность. Вероятность произведения и суммы событий. Формулы полной вероятности и Байеса.....	23
3.3 Случайные величины и их законы распределения. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных и дискретных случайных величин.....	26
3.4 Генеральная совокупность и выборка. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма и полигон частот. Несмещенность, эффективность и состоятельность оценок.....	28
3.5 Доверительная вероятность и доверительный интервал. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения. Эмпирическая функция распределения.....	31
Список литературы.....	34

Введение

Нельзя указать никакие конкретные явления природы или общества, которые были бы единственным объектом изучения математики. Математика применяется для развития естествознания, техники, экономики, создания новых методов и подходов к решению задач физики, инженерного дела и самой математики.

В наши дни математика существенно меняет свое лицо, она становится более абстрактной. Абстрактность означает, что объектами изучения математики являются логические модели, построенные для описания и исследования явлений. Через моделирование математика изучает соотношения между элементами модели, количественные связи между процессами и явлениями, их форму. Одна и та же модель может описывать свойства далеких друг от друга процессов (например, уравнение $y=kx$ описывает равномерное движение, стоимость товара в зависимости от цены, количество бензина в зависимости от расстояния и т.д.). Для математики, таким образом, важна не природа этих процессов, а отношения между ними.

Решение разнообразных практических задач привело к созданию ряда приложений и новых направлений в математике, как то теория вероятностей, математическое программирование, линейная алгебра, математическая статистика и пр. Знание этих разделов математики имеет большое значение при решении вопросов организации и планирования производства.

В данных методических указаниях разобран краткий теоретический материал по перечисленным направлениям математики с примерами решенных задач, приводится список рекомендованной учебной литературы, изучение которой необходимо для выполнения заданий. Задачи для самостоятельного выполнения вынесены в отдельный сборник, являющийся приложением к данным методическим указаниям.

1 Элементы линейной алгебры

1.1 Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Обратная матрица. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме

Задача 1

На предприятии для производства трех видов изделий установлены три технологические производственные линии. Владелец предприятия стремится полностью использовать эти линии в течение 8-часовой рабочей

смены. Данные о том, сколько времени (в часах) должна эксплуатироваться та или иная линия для изготовления одного изделия каждого вида, приведены в матрице $A=(a_{ij})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Величина элемента a_{ij} представляет собой затраты времени (в часах) i -той линии для изготовления единицы j -го изделия. Взяв в качестве неизвестных x_1 , x_2 и x_3 , составить систему уравнений, предполагающую полное использование линий. Найти с помощью обратной матрицы решение полученной системы.

Решение. Обозначим число изделий 1-го, 2-го и 3-го видов через x_1 , x_2 и x_3 . Рассмотрим работу каждой из линий: для первой линии при изготовлении x_1 изделий 1-го вида затрачивается $1x_1$ часов, при изготовлении x_2 изделий 2-го вида - $3x_2$ часов и при изготовлении x_3 изделий 3-го вида - $1x_3$ часов. По условию задачи первая линия работает 8 часов, поэтому имеем уравнение:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 8.$$

Аналогично для второй линии:

$$4x_2 + 2x_3 = 8,$$

и для третьей линии:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

Решение исходной задачи сведено к нахождению решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью обратной матрицы, записав ее предварительно в матричной форме:

$$AX=B,$$

где A – матрица коэффициентов при переменных,

X и B – матрицы-столбцы переменных и свободных членов.

В нашем случае:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в матричной форме система имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Уравнение можно решить, если матрица A - неособенная, так как в этом случае существует обратная матрица A^{-1} и $X=A^{-1}B$.

Для нахождения матрицы A^{-1} необходимо, прежде всего, вычислить определитель матрицы A и убедиться в том, что она неособенная. Для этого воспользуемся теоремой Лапласа.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A .

Используя определитель, получим:

$$|A| = 1 \cdot 6 + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 = 8 \neq 0.$$

Следовательно,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2.$$

Комментарий. Заметим, что алгебраическое дополнение A_{21} можно было бы здесь и не находить, так как $a_{21} = 0$.

Продолжение решения. Итак, $|A| \neq 0$. Следовательно, матрица A неособенная, и для нее существует обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A},$$

где \bar{A} – матрица, присоединенная к матрице A . В нашем случае:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы первой строки матрицы \bar{A} уже найдены. Находим остальные элементы:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Таким образом, присоединенная матрица:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зная \bar{A} и $|A|$, находим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} \\ -\frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Мы воспользовались определением произведения матрицы на число, в нашем случае равное $\frac{1}{8}$.

Проверим правильность вычислений, т.е. $AA^{-1}=E$, где E – единичная матрица 3-го порядка. По определению произведения матриц получим:

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left[1 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] & \left[1 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) + 3 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} \right] & \left[1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} \right] \\ \left[0 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] & \left[0 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) + 4 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} \right] & \left[0 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \right] \\ \left[1 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right] & \left[1 \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} \right] & \left[1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \right] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Проверка подтвердила правильность найденной нами матрицы.

И, наконец, находим матрицу-столбец неизвестных:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \cdot 8 + \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 8 \\ \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 8 \\ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. Сделаем проверку, подставив найденное решение в каждое уравнение системы.

Проверка:

$$3 + 3 \cdot 1 + 2 = 8; \quad 8 = 8;$$

$$4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8; \quad 8 = 8;$$

$$3 + 1 + 2 \cdot 2 = 8; \quad 8 = 8.$$

Итак, мы видим, что после подстановки в систему каждое уравнение обратилось в числовое тождество.

Ответ: будет произведено 3 изделия 1-го вида, 1 изделие 2-го вида и 2 изделия 3-го вида.

1.2 Системы m линейных уравнений с n неизвестными. Метод Гаусса. Правило Крамера

Задача 2

Художественная компания производит 4 вида различных бронзовых скульптур А, В, С и D. Художественная мастерская имеет в распоряжении максимум 180 рабочих часов для отливки всех скульптур, 140 часов для грубой обработки и 130 часов для шлифовки всех скульптур.

Отливки скульптуры А поступают в мастерскую готовыми, далее они требуют 20 часов для грубой обработки и 10 часов для шлифовки каждая.

Скульптура В требует для отливки 10 часов, для грубой обработки 10 часов и для шлифовки - 10 часов каждая.

Скульптура С, соответственно, отливка – 30 часов, грубая обработка – 10 часов, шлифовка – 15 часов.

Скульптура D – отливка – 80 часов, грубая обработка – 60 часов, шлифовка – 55 часов.

Какие варианты плана выпуска скульптур четырех видов можно составить для этой художественной мастерской, если мастерская будет работать с максимальной производительностью? (Найти решение, используя метод Гаусса).

Решение. Данные задачи удобно представить в виде следующей таблицы 1.

Таблица 1

	А	В	С	Д	Мах рабочих часов
Отливка	0	10	30	80	180
Грубая обработка	20	10	10	60	140
Шлифовка	10	10	15	55	130

Обозначим через x_1 – количество скульптур А, выпущенных художественной мастерской, x_2 - количество скульптур В, x_3 - количество скульптур С, x_4 - количество скульптур D. Тогда количество часов для

отливки всех скульптур А составит $0x_1$ часов, отливка всех скульптур В займет $10x_2$ часов, соответственно, С и D - $30x_3$ и $80x_4$ часов.

Таким образом, первое уравнение будет выглядеть так:

$$10x_2 + 30x_3 + 80x_4 = 180.$$

Аналогично составляются остальные два уравнения для процессов грубой обработки и шлифовки:

$$20x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 60x_4 = 140;$$

$$10x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 55x_4 = 130.$$

Упростим уравнения, разделив каждое из них на 10. Получившаяся система будет равносильна исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 5,5x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 14, \\ x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 18. \end{cases}$$

Комментарий. Мы также поменяли местами первое и третье уравнения для того, чтобы в первой разрешающей строке коэффициент при x_1 был бы отличен от нуля.

Продолжение решения. На первом шаге с помощью первого уравнения исключим переменную x_1 из всех остальных уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 2, а третье оставляем без изменения, так как в нем это неизвестное отсутствует. Полученная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 5,5x_4 = 13, \\ -x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -12, \\ x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 18. \end{cases}$$

Первое уравнение в дальнейших преобразованиях не участвует. На втором шаге разрешающим будет второе уравнение. Оно остается без изменений, но с его помощью исключим переменную x_2 из третьего уравнения. Для этого прибавим к третьему уравнению второе. В результате система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1,5x_3 + 5,5x_4 = 13, \\ -x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -12, \\ x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Полученная система ступенчатого вида равносильна исходной. Эта система совместна, так как в ней нет уравнений вида:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = a, \quad (a \neq 0).$$

Количество уравнений меньше числа неизвестных. Следовательно, система неопределенная. Ее общее решение мы найдем, выразив базисные неизвестные через свободное неизвестное x_4 , начиная с последнего уравнения: $x_3 = 6 - 3x_4$.

Полученное выражение подставим во второе уравнение, откуда найдем $x_2 = x_4$.

И, наконец, подставляя все в первое уравнение и разрешая его относительно x_1 , имеем:

$$x_1 = 4 - 2x_4.$$

Итак, найдено общее решение системы:

$$x_1 = 4 - 2x_4; \quad x_2 = x_4; \quad x_3 = 6 - 3x_4.$$

Очевидно, что по смыслу задачи неизвестные x_1 , x_2 , x_3 и x_4 могут принимать только целые неотрицательные значения. Так, x_4 в нашем случае может быть равным только 0, 1 и 2. Каждому из этих значений соответствует частное решение системы.

Найдем их и для удобства представим в виде таблицы 2:

Таблица 2

A	B	C	D
x_1	x_2	x_3	x_4
4	0	6	0
2	1	3	1
0	2	0	2

То есть данная художественная мастерская за одно и то же рабочее время может осуществить один из трех вариантов плана: либо она выпустит 4 скульптуры А, ни одной скульптуры В, 6 скульптур С и ни одной скульптуры D, либо 2 скульптуры А, 1 – В, 3-С, 1-В, либо ни одной скульптуры А, 2-В, ни одной С и 2 скульптуры D.

Комментарий. Обычно из множества решений неопределенной системы выделяется базисное решение, в котором свободные неизвестные имеют нулевые значения. В нашем случае базисное решение имеет вид:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 6; \quad x_4 = 0.$$

(Это решение совпадает с первым вариантом плана).

2 Математическое программирование

2.1 Примеры экономических задач, решаемых методами математического программирования. Геометрическое решение задач линейного программирования. Основные свойства решений

Задача 3

На трех станках обрабатываются детали двух видов (А и Б), причем, каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известно время обработки детали на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль от продажи одной детали каждого вида (данные приведены в таблице 3). Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Таблица 3

Станки	Время обработки деталей (час)		Время работы станка за цикл производства (час)
	А	Б	
I	1	2	16
II	1	1	10
III	3	1	24
Прибыль на одну деталь (тыс.рублей)	4	2	

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц деталей видов А и Б, планируемое к выпуску. Тогда время обработки x_1 деталей вида А на первом станке составляет $1x_1$; x_2 деталей вида Б, соответственно, $2x_2$. Следовательно, суммарное время работы станка I для изготовления планируемого количества деталей равно x_1+2x_2 , и оно ограничено 16-ю часами работы этого станка в течение одного цикла производства. Поэтому должно выполняться следующее неравенство:

$$x_1 + 2x_2 \leq 16.$$

Для остальных станков – II и III – аналогично составляются неравенства:

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad \text{и} \quad 3x_1 + x_2 \leq 24.$$

Кроме того, очевидно, что по смыслу определения введенных величин x_1 и x_2 должны выполняться неравенства:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Объединим полученные неравенства в систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

которая называется **системой ограничений** задачи.

Любое решение $(x_1; x_2)$ системы ограничений называется **допустимым планом выпуска** продукции или **допустимым планом** задачи.

Прибыль от реализации x_1 единиц деталей вида А равна $4x_1$, а прибыль от реализации x_2 единиц деталей вида Б равна $2x_2$. Следовательно, суммарная прибыль от реализации продукции, выпущенной согласно плану $(x_1; x_2)$, равна

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 2x_2 \quad (\text{тыс. рублей}).$$

Линейная функция двух переменных $F(x_1; x_2)$ называется **целевой функцией** задачи. По условию задачи требуется найти такой план $(x_1; x_2)$, при котором прибыль была бы максимальной.

Таким образом, построена математическая модель нашей задачи как задачи линейного программирования:

$$F(x_1; x_2) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 24, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Итак, необходимо среди допустимых планов задачи найти оптимальный $(x_1; x_2)$, то есть такой план, при котором целевая функция принимает свое наибольшее значение.

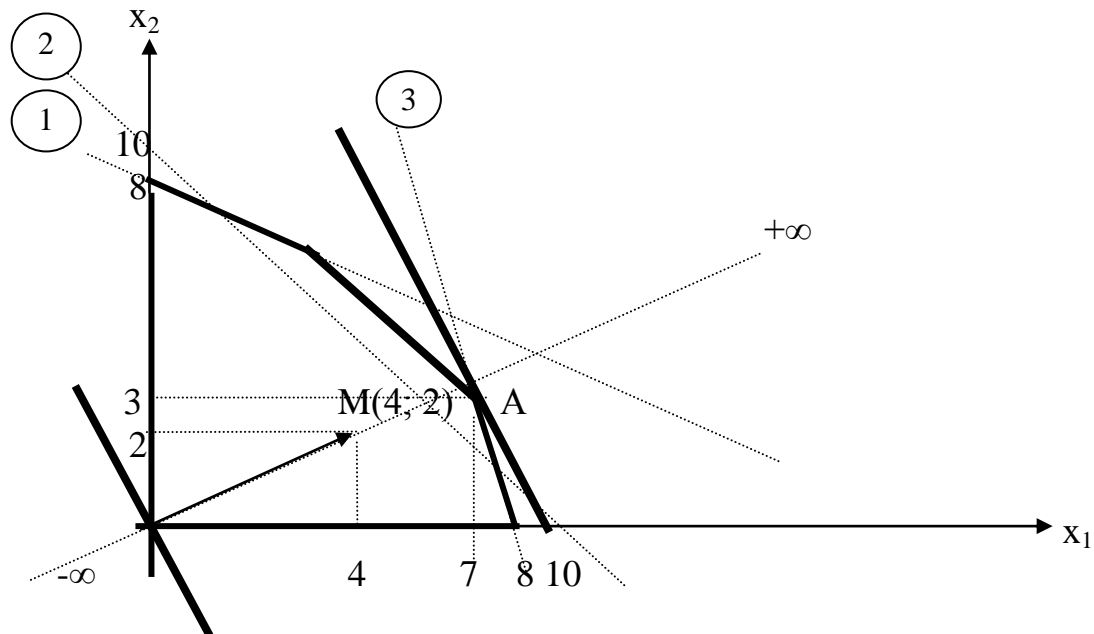


Рисунок 1

Область решений системы ограничений, то есть совокупность всех допустимых планов задачи, представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости Ox_1x_2 . Для построения многоугольника нам необходимо последовательно построить области решений каждого из неравенств системы ограничений. Напомним, что областью решений линейного неравенства является полуплоскость. Построим область решений первого неравенства системы ограничений $x_1 + 2x_2 \leq 16$.

Сначала построим прямую, заданную уравнением $x_1 + 2x_2 = 16$, которая на рисунке 1 обозначена 1.

Для определения полуплоскости решений нашего неравенства возьмем произвольную точку на плоскости, не лежащую на прямой

$x_1 + 2x_2 = 16$, например, $(0;0)$ и подставим ее координаты в неравенство $x_1 + 2x_2 \leq 16$. В результате подстановки получили верное числовое неравенство $0 \leq 16$, а это означает, что начало координат лежит в полуплоскости решений нашего неравенства. Противоположную полуплоскость мы заштрихуем (см. рисунок 1).

Аналогично строим полуплоскости решений остальных неравенств системы ограничений, каждый раз заштриховывая «ненужную» полуплоскость (прямые $x_1 + x_2 = 10$ и $3x_1 + x_2 = 24$ обозначены 2 и 3).

Комментарий. Левая и нижняя полуплоскости вычеркиваются по смыслу двух последних неравенств ($x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$).

Продолжение решения. Незаштрихованная часть плоскости и представляет собой искомый многоугольник допустимых планов задачи (см. рисунок 1). Теперь нужно среди точек построенного многоугольника найти такую, в которой целевая функция $F(x_1; x_2) = 4x_1 + 2x_2$ достигает максимального значения. Для этого построим прямую, заданную уравнением $4x_1 + 2x_2 = 0$, которая является линией нулевого уровня функции $F(x_1; x_2)$. Как известно, линии уровня линейной функции образуют на плоскости семейство параллельных прямых, на каждой из которых функция принимает постоянное значение. При переходе от одной линии уровня к другой значение функции изменяется.

Направление возрастания линейной функции $F(x_1; x_2) = 4x_1 + 2x_2$ указывает вектор с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $M(4;2)$, координаты которого равны коэффициентам при соответствующих переменных функции F .

Для нахождения оптимального плана нужно «передвигать» линию нулевого уровня функции F параллельно самой себе в направлении, указанном построенным вектором до точки ее «последней встречи» с многоугольником, которая и является оптимальным планом задачи. В нашем случае это вершина A многоугольника – точка пересечения прямых 2 и 3. Координаты $(x_1; x_2)$ точки A найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ 3x_1 + x_2 = 24; \end{cases}$$

откуда $x_1 = 7$, $x_2 = 3$.

Найден оптимальный план производства, по которому в течение одного цикла следует обрабатывать 7 деталей вида A и 3 детали вида B .

Найдем соответствующее значение целевой функции:

$$F(x_1; x_2) = F(7; 3) = 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 34 \text{ (тыс. рублей)}.$$

Это максимальное значение функции цели на рассматриваемом многоугольнике допустимых планов.

Комментарий. Если бы требовалось найти минимум функции F , то исходную линию нулевого уровня следовало бы передвигать до «первой

встречи» с многоугольником или в направлении, противоположном вектору \overline{OM} .

Как правило, задачи, в которых целевая функция представляет собой затраты производства, требуют минимизации этой функции.

Ответ. Для обеспечения максимальной прибыли от реализации готовой продукции предприятию необходимо обрабатывать 7 деталей вида А и 3 детали вида Б. При таком плане прибыль от реализации составит 34 тыс. рублей.

2.2 Экономическая и математическая формулировки транспортной задачи. Основные способы построения начального плана

Задача 4

Ниже приведена таблица 4, в которой указаны запасы некоторого груза у поставщиков A_1, A_2, A_3 , потребности в этом грузе потребителей B_1, B_2, B_3 , а также стоимости (тарифы) $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{33}$ перевозки единицы этого груза от каждого поставщика каждому потребителю (тариф c_{ij} означает стоимость перевозки единицы груза от поставщика A_i потребителю B_j); величины c_{ij} указаны в некоторых денежных единицах. Составьте оптимальный план перевозок - такой, чтобы все потребности были удовлетворены, и при этом стоимость всех перевозок была возможно меньшей.

Таблица 4

Поставщики	Потребители			Запасы
	B_1	B_2	B_3	
A_1	3	4	1	70
A_2	4	1	3	40
A_3	2	2	4	80
Потребности	60	90	40	Итого 190

Решение

1 Составление начального плана перевозок.

60		10 40 80
	90 40	

а) **метод "северо-западного угла":**

заполним клетку a_{11} - "северо-западный угол" матрицы перевозок. В нее можно запланировать перевозку 60 единиц груза: потребность потребителя B_1 равна 60 единицам, а у поставщика A_1 имеется возможность поставить

B_1 весь требуемый груз (60 единиц из имеющихся у него 70). При этом 1-й столбец матрицы перевозок будет закрыт, а в первую строку останется в дальнейшем разместить перевозку 10 единиц груза (см. рисунок 2).

60	10	-	-
-	-	-	40
-	-	-	80
-	80	40	

Рисунок 3

Заполняем "северо-западный угол" оставшейся незаполненной части таблицы - клетку a_{12} . В нее можно запланировать перевозку 10 единиц груза, оставшихся у поставщика A_1 потребителю B_2 , при этом все возможности A_1 будут исчерпаны, а B_2 надо будет поставить еще 80 единиц груза; при этом 1-я строка матрицы перевозок будет закрыта (см. рисунок 3).

60	10	-	-
-	40	-	-
-	-	-	80
	40	40	

Рисунок 4

Снова заполняем "северо-западный угол" незаполненной части таблицы - клетку a_{22} . В нее можно запланировать перевозку 40 единиц груза, имеющихся у A_2 , потребителю B_2 ; при этом все возможности A_2 будут исчерпаны, а потребителю B_2 надо будет поставить еще 40 единиц груза; вторая строка матрицы будет закрыта (см. рисунок 4).

60	10	-	-
-	40	-	-
-	40	-	-

Рисунок 5

В оставшейся незаполненной части последней строки матрицы перевозок заполняем сначала "северо-западный угол" - клетку a_{32} (в нее ставим, естественно, 40 единиц груза и закрываем 2-й столбец), а затем - оставшуюся клетку a_{33} (снова "северо-западный угол" оставшейся незаполненной части таблицы); получаем план перевозок (рисунок 5).

Подсчитаем стоимость затрат на перевозки по этому плану. Для этого объем перевозки, указанный в каждой заполненной клетке, надо умножить на тариф этой клетки и сложить все полученные произведения:

$$60 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 4 = 500 \text{ (ед.)}.$$

Комментарий. Метод "северо-западного угла" очень простой, он никак не учитывает стоимость перевозок. Точно также можно применять метод "юго-восточного угла" или какого-нибудь другого, важно лишь четко сформулировать правило (алгоритм) составления плана.

Продолжение решения

б) метод наименьшей стоимости:

находим клетку матрицы перевозок с наименьшим тарифом: таких клеток две, a_{22} и a_{13} , тарифы в них равны единице. Поскольку в клетку a_{22}

-	-	40	30
-	-	-	40
-	-	-	80
60	90		

Рисунок 6

можно поместить 40 единиц груза (его наименьшее из чисел 40 и 90, соответственно, запасов A_2 и потребностей B_2), а в клетку a_{13} - тоже 40 единиц, выбираем одну из них произвольно - например, клетку a_{13} , и закрываем третий столбец. а у

поставщика A_1 оставляем $70-40=30$ единиц груза (см. рисунок 6).

-	-	40	30
-	40	-	-
-	-	-	80
60	50		

Рисунок 7

В оставшейся незаполненной части матрицы перевозок наименьший тариф имеет клетка a_{22} . Заполняем ее: ставим перевозку 40, закрываем вторую строку, а потребителю B_2 останется еще получить 50 единиц груза (рисунок 7).

-	-	40	30
-	40	-	-
60	-	-	20
	50		

Рисунок 8

В оставшейся незаполненной части матрицы перевозок наименьший тариф (две денежных единицы) имеют клетки a_{31} и a_{32} . В первую из них помещаем требуемые там 60 единиц груза (во вторую можно поместить лишь 50 единиц - меньше), закрываем первый столбец, уменьшая запасы A_3 до $80-60 = 20$ единиц груза (рисунок 8).

Дальше матрица заполняется однозначно - в незаполненные клетки

-	30	40	
-	40	-	
60	20	-	

Рисунок 9

a_{12} и a_{32} ставим требуемые там 30 и 20 единиц груза соответственно. План составлен (рисунок 9).

Подсчитаем стоимость затрат по составленному плану:

$$30 \cdot 4 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 60 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 360 \text{ (ед.)}.$$

Комментарий. Метод наименьшей стоимости дал более выгодный план, поэтому далее будем рассматривать именно его в качестве начального. Отметим еще два обстоятельства. В обоих планах оказалось заполненным одинаковое число клеток. Это не случайно. Для невырожденных задач это число равно, как известно из теории, $m + n - 1$, где m и n - размеры матрицы перевозок. В нашем случае $m = n = 3$, поэтому должны быть заполнены $3+3-1=5$ клеток, что и получилось. "Невырожденность" здесь означала, что на каждом этапе решения мы "закрывали" либо столбец, либо строку матрицы перевозок, но никогда столбец и строку одновременно. Если бы случилась необходимость их одновременного закрытия, нам пришлось бы вводить фиктивную нулевую перевозку, чтобы соблюсти указанный принцип. Кроме того, мы решали так называемую «закрытую» транспортную задачу: сумма запасов поставщиков равнялась сумме потребностей потребителей; иначе нам тоже пришлось бы вводить либо "фиктивных поставщиков", либо "фиктивных потребителей". Осталось напомнить, что, очевидно, достаточно составить исходный план лишь одним способом; мы привели два способа из методических соображений.

Теперь надо выяснить, оптимален ли план, приведенный на рисунке 9. Для этого надо провести оценку каждой свободной клетки, составить для нее цикл, а по нему - знакочередующуюся сумму тарифов клеток, входящих в этот цикл; если эта оценка окажется для какой-то клетки

неотрицательный, ее невыгодно включать в новый план; если же она окажется отрицательной, то рассматриваемый план не оптимален и эту клетку целесообразно включить в новый, более выгодный план.

Как только в некотором плане все свободные клетки будут иметь неотрицательные оценки, мы получим оптимальный план.

Продолжение решения. Исследуем исходный план на оптимальность. Найдем последовательно оценки всех свободных клеток плана перевозок, изображенного на рисунке 9.

3		4	
2		2	

Рисунок 10

Клетка a_{11} . Цикл: $a_{11} - a_{12} - a_{32} - a_{31}$ (рисунок 10).

$$a_{11} = 3 - 4 + 2 - 2 = -1 < 0$$

Клетка a_{21} . Цикл: $a_{21} - a_{22} - a_{32} - a_{31}$ (рисунок 11).

$$a_{21} = 4 - 1 + 2 - 2 = 3 < 0.$$

4		1	
2		2	

Рисунок 11

Клетка a_{23} . Цикл: $a_{23} - a_{13} - a_{12} - a_{22}$ (рисунок 12).

$$a_{23} = 3 - 1 + 4 - 1 = 5 > 0.$$

Клетка a_{33} . Цикл: $a_{33} - a_{13} - a_{12} - a_{32}$ (рисунок 13).

$$a_{33} = 4 - 1 + 4 - 2 = 5 < 0.$$

Итак, исследуемый план не оптимален, в новый план следует включить клетку a_{11} (это единственная свободная клетка с отрицательной оценкой).

	4	1	
	1	3	

Рисунок 12

Комментарий. Полезно убедиться в единственности (с точностью до направления обхода) цикла для каждой свободной клетки и независимости значения ее оценки от направления обхода цикла. Иногда возникает недоразумение из-за недопонимания такого обстоятельства: мы считаем, что цикл проходит через клетку, если он делает в ней поворот (например, цикл клетки a_{11} не проходит через клетку a_{21} , он “перепрыгивает” через нее); поэтому лучше употреблять такие слова: “клетка входит в цикл” или “принадлежит циклу”.

	4	1
	2	4

Рисунок 13

Улучшение плана происходит очень просто: мы берем свободную клетку с отрицательной оценкой и производим по ее циклу перемещение поставок так, чтобы не нарушить баланс: в свободную клетку и в те занятые клетки ее цикла, тарифы которых брались при оценке со знаком "+", мы добавляем некоторое (одно и то же для всех клеток цикла) количество единиц груза (то есть увеличиваем на это количество запланированные в этих клетках перевозки), а в остальных клетках цикла уменьшаем перевозки на это же количество. Величина оценки свободной клетки имеет экономический смысл – когда она отрицательна, то показывает, насколько выгодней перевозить одну единицу груза, проделав перемещение поставок по циклу этой клетки, поэтому по циклу надо переместить как можно больше единиц груза. Эта величина ограничена, естественно, тем, что в тех клетках, в которых мы уменьшаем поставки, не должно остаться отрицательной величины - это было бы абсурдно. Значит, мы можем переместить по циклу лишь наименьшую величину единиц груза из тех клеток, тарифы которых входили в оценку со знаком "-". Произведение этой величины на оценку клетки и даст величину выгоды перевозок по новому плану - разности в стоимости старого и нового планов перевозок.

Продолжение решения. Произведем улучшение исходного плана.

30		40
	40	
30	50	

Рисунок 14

Переместим по циклу клетки a_{11} 30 единиц груза. В клетки a_{11} и a_{32} плана добавляем по 30 единиц груза, и из клеток a_{12} и a_{31} убираем по 30 единиц. Получаем новый, улучшенный план, показанный на рисунке 14. Его стоимость на 30 единиц меньше стоимости исходного: $(-1) \cdot 30 = -30$; таким образом, по второму плану стоимость перевозок равна $360 - 30 = 330$ (денежным единицам).

Комментарий. Во-первых, обязательно проверьте, что стоимость нового плана действительно равна 330 единицам. Далее: теперь, видимо, становятся понятнее свойства цикла: в него входят ровно по две клетки из столбца или строки из-за того, чтобы при улучшении плана не нарушился баланс: на какую величину мы уменьшили перевозку из одной клетки строки (столбца), на столько же увеличили ее во второй клетке этой строки (столбца), так что общая величина поставок от этого поставщика (баланс в строке) или этому потребителю (баланс в столбце) не меняется.

3		1
2	2	

Рисунок 15

Продолжение решения. Исследование второго плана на оптимальность. Найдем последовательно оценки всех свободных клеток второго плана.

Клетка a_{12} . Ее мы только что освободили, так что оценивать ее нецелесообразно.

Клетка a_{21} . Ее цикл, а значит, и оценка не изменились; оценка по-прежнему равна $3 > 0$.

Клетка a_{23} . Цикл: $a_{23} - a_{13} - a_{11} - a_{31} - a_{32} - a_{22}$ (рисунок 15).

3		1
2		4

$$a_{23} = 3 - 1 + 3 - 2 + 2 - 1 = 4 > 0.$$

Клетка a_{33} . Цикл: $a_{33} - a_{13} - a_{31}$ (рисунок 16).

$$a_{33} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4 > 0.$$

Рисунок 16

Поскольку во втором плане оценки всех свободных клеток положительны, он оптимален.

Ответ: $a_{11} = 30$, $a_{13} = 40$,

$a_{22} = 40$, $a_{31} = 30$, $a_{32} = 50$,

$a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{33} = 0$.

Оптимальная стоимость перевозок равна 330 денежным единицам.

2.3 Нелинейное программирование. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Задача 5

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 200 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. Производственные затраты на изготовление n изделий первым способом равны $4n + n^2$, а для второго способа – $8n + n^2$. Сколько изделий надо изготовить каждым способом, чтобы общие затраты на производство продукции были бы минимальными.

Решение. Обозначим число изделий, изготовленных первым способом через x_1 , вторым способом – x_2 . Тогда суммарные затраты на изготовление продукции по плану составят:

$$f(x_1; x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2.$$

При этом общее число изделий должно быть равно 200, то есть

$$x_1 + x_2 = 200.$$

Получили следующую математическую модель задачи: найти минимум функции двух переменных $f(x_1; x_2)$ при условии $x_1 + x_2 = 200$.

Комментарий. Это задача на условный экстремум. Она допускает различные способы решения. Ниже будет продемонстрирован один из них - метод множителей Лагранжа.

Продолжение решения. Составим функцию Лагранжа:

$$f(x_1; x_2) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(200 - x_1 - x_2).$$

Исследуем полученную функцию на безусловный экстремум. Для этого вычислим и приравняем к нулю ее частные производные по x_1 , x_2 , λ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4 + 2x_1 - \lambda; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 8 + 2x_2 - \lambda; \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= 200 - x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ 200 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Исключая λ из этой системы, имеем:

$$\begin{cases} 4 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 200 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Откуда $x_1 = 101$, $x_2 = 99$.

Таким образом, по необходимому условию экстремума дифференцируемой функции получили стационарную точку $M(101;99)$ возможного условного экстремума функции $f(x_1; x_2)$.

Дальнейшее исследование этой точки будем проводить, как и в случае безусловного экстремума.

Комментарий. Сформулируем достаточные условия экстремума в стационарной точке. Обозначим через A , B и C значения производных

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ в стационарной точке $(x_1^0; x_2^0)$. Тогда, если

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, \text{ то } \begin{cases} (x_1^0; x_2^0) - \text{точка max при } A < 0 \\ (x_1^0; x_2^0) - \text{точка min при } A > 0. \end{cases}$$

Продолжение решения. Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2.$$

В нашем случае эти производные постоянные не зависят от значений x_1 и x_2 . Поэтому $A = 2$; $B = 0$; $C = 2$. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0.$$

Так как найденный определитель больше нуля и $A = 2 > 0$, следовательно, в точке $M(101;99)$ функция $f(x_1; x_2)$ будет иметь минимум:

$$f_{\min}(x_1; x_2) = f(101;99) = 4 \cdot 101 + 101^2 + 8 \cdot 99 + 99^2 = 21198 \text{ (ед.)}.$$

Ответ. При изготовлении 101 детали первым способом и 99 деталей вторым способом затраты на производство будут минимальными и равными 21198 денежным единицам.

3 Теория вероятностей

3.1 Понятие теоретико-вероятностного эксперимента (испытания). Алгебра событий. Свойства операций над событиями. Классическое и статическое определения вероятности

При изучении этих тем следует обратить внимание на полезность выделения несовместных событий и перехода к противоположным событиям, а также на связь классического и статистического определений вероятности и ее использование на практике.

Задача 6

Для получения кредита предприятие обратилось к трем банкам. Статистические исследования показали, что вероятности выделения кредита этим банкам соответственно равны $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,9$. Банки выделяют кредит независимо друг от друга и, если примут решение о его выделении, то предоставляют его в размере: первый банк – 60 млн рублей, второй банк – 40 млн рублей и третий банк – 100 млн рублей. Введем следующие события:

$A = \{\text{первый банк выделил кредит}\}.$

$B = \{\text{второй банк выделил кредит}\}.$

$C = \{\text{третий банк выделил кредит}\}.$

$D = \{\text{предприятие получит кредит в размере 100 млн рублей}\}.$

$E = \{\text{предприятие получит кредит в размере не менее 140 млн рублей}\}.$

События D и E , очевидно, выражают интересы предприятия. В этих условиях требуется:

1) записать события D и E через события A , B и C ;

2) найти вероятности событий D и E .

Решение. Рассмотрим событие D . Предприятие получит кредит в размере 100 млн рублей в двух случаях: 1) первый и второй банки выделили кредит, но при этом третий банк не выделил кредита (обозначим все это событие через D_1); 2) первый и второй банки кредит не выделили, но при этом третий банк выделил кредит (обозначим все это событие через D_2). Тогда событие D можно представить в виде суммы $D = D_1 + D_2$.

Выразим события D_1 и D_2 через события A , B и C . Событие D_1 : первый банк выделил кредит (произошло событие A), второй банк выделил кредит (произошло событие B), но при этом третий банк кредита не

выделил (произошло событие, противоположное событию C , т.е. \bar{C}); все три события произошли одновременно, значит

$$D_1 = A \cdot B \cdot \bar{C}.$$

Рассуждая аналогично, получим:

$$D_2 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C.$$

Итак, событие D можно записать следующим образом:

$$D = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C.$$

Перейдем к событию E . Заметим, что выражение “предприятие получит кредит в размере не менее 140 млн рублей” означает то, что предприятие получит кредит в размере 140 млн рублей или более этой суммы (по условию нашей задачи возможны три варианта: или 140 млн рублей, или 160 млн рублей, или 200 млн рублей). Тогда событие E можно записать следующим образом:

$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

где событие $E_1 = \{\text{предприятие получит кредит в размере 140 млн рублей}\} = \bar{A} \cdot B \cdot C$;

событие $E_2 = \{\text{предприятие получит кредит в размере 160 млн рублей}\} = A \cdot \bar{B} \cdot C$;

событие $E_3 = \{\text{предприятие получит кредит в размере 200 млн рублей}\} = A \cdot B \cdot C$.

Итак, событие E имеет вид:

$$E = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C.$$

Вычислим вероятности событий D и E . По условию задачи

$$P(A)=0,4, \quad P(B)=0,3, \quad P(C)=0,9.$$

Тогда

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,3 = 0,7;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Имеем:

$$P(D) = P(A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C).$$

Вероятность суммы событий при их несовместности равна сумме вероятностей этих событий. Проверим несовместность наших событий:

$$(A \cdot B \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = (A \cdot \bar{A}) \cdot (B \cdot \bar{B}) \cdot (C \cdot \bar{C}) = \emptyset \cdot \emptyset \cdot \emptyset = \emptyset.$$

Здесь мы использовали свойства коммутативности и ассоциативности произведения событий (т.е. $ABC=ACB=CAB$ и т.д.) и определение несовместности событий (события F и G несовместны, если $F \cdot G = \emptyset$). Итак, $P(D) = P(A \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)$.

Теперь нам нужно вычислить вероятность произведения событий. Если события независимы, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий. По условию задачи события А, В и С независимы в совокупности (банки выделяют кредит независимо друг от друга). Тогда независимы в совокупности и события A, B и \bar{C} , и события \bar{A}, \bar{B} и С. Значит,

$$P(D) = P(A \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,012 + 0,378 = 0,39.$$

Аналогично вычислим и вероятность события Е:

$$P(E) = P(E_1 + E_2 + E_3) = P(\bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C) = P(\bar{A} \cdot B \cdot C) + P(A \cdot \bar{B} \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,162 + 0,252 + 0,108 = 0,522.$$

Ответ: $D = A \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C;$
 $E = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C;$
 $P(D) = 0,39;$
 $P(E) = 0,522.$

3.2 Условная вероятность. Вероятность произведения и суммы событий. Формулы полной вероятности и Байеса

Следует обратить внимание на такие понятия, как совместность и несовместность, зависимость и независимость случайных событий.

Нужно разобраться с тем, как определяются условные вероятности событий, в каких случаях используется формула полной вероятности, что дает применение формулы Байеса.

Задача 7

Из 20 частных банков, работающих в городе, нарушения в уплате налогов имеют место в 12 банках. Налоговая инспекция проводит проверку трех банков, выбирая их из двадцати банков случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо один от другого. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью $p = 0,8$. Какова вероятность того, что в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в уплате налогов?

Решение. Обозначим через В случайное событие, вероятность которого надо проверить:

$B = \{\text{в ходе проверки будет установлен факт наличия среди частных банков города таких банков, которые допускают нарушения в уплате налогов}\}.$

Событие B наступит, если среди выбранных случайным образом для проверки трех банков есть банки, допускающие нарушения, и хотя бы в одном из них эти нарушения будут выявлены.

Пусть событие $A_i = \{\text{среди выбранных для проверки трех банков ровно в } i \text{ банках имеют место нарушения в уплате налогов}\}.$

Очевидно, что $i=0, 1, 2, 3$: события A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу и попарно несовместны. Событие B может наступить с любым из них, кроме A_0 , так как события A_0 и B несовместны и их произведение является событием невозможным. Следовательно, правомочно записать, что:

$$B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B + A_3 \cdot B.$$

Графически эту ситуацию можно пояснить так:

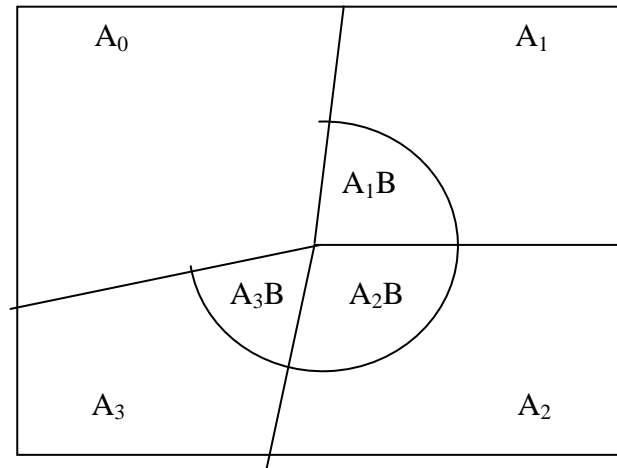


Рисунок 17

Тогда:

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P\left(\frac{B}{A_i}\right) \quad (*)$$

Мы пришли к так называемой формуле полной вероятности. Вероятности $P(A_i)$ найдем по формуле

$$P(A_i) = \frac{C_{12}^i \cdot C_8^{3-i}}{C_{20}^3},$$

используя классическое определение вероятности. В этой формуле

$$i = 0, 1, 2, 3; \quad C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Вычислим вероятности $P(A_i)$:

$$P(A_0) = \frac{C_{12}^0 \cdot C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285};$$

$$P(A_1) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{84}{285} = \frac{28}{95};$$

$$P(A_2) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{132}{285} = \frac{44}{95};$$

$$P(A_3) = \frac{C_{12}^3 \cdot C_8^0}{C_{20}^3} = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{55}{285} = \frac{11}{57}.$$

Так как события A_0, A_1, A_2, A_3 образуют полную группу событий и попарно несовместны, то должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^3 P(A_i) = 1.$$

Проверим это:

$$\sum_{i=1}^3 P(A_i) = \frac{14 + 84 + 132 + 55}{285} = \frac{285}{285} = 1.$$

Следовательно, вероятности $P(A_i), i=0, 1, 2, 3$ вычислены правильно.

Учитывая, что банки проверяются независимо один от другого, условные вероятности $P\left(\frac{B}{A_i}\right)$ определим по формуле

$$P\left(\frac{B}{A_i}\right) = 1 - (1 - p)^i,$$

где $i=0, 1, 2, 3$; $p=0,8$ – вероятность того, что допущенные в проверяемом банке нарушения будут выявлены (см. условие задачи).

Заметим, что записанная формула при $i=0$ дает $P\left(\frac{B}{A_0}\right)=0$, что вполне согласуется с реальной ситуацией (см. рисунок 17). Кроме того, эта формула выражает вероятность того, что нарушения в уплате налогов будут выявлены хотя бы в одном из перечисленных банков, допускающих такие нарушения. А это одно из условий для наступления события В.

Вычислим условные вероятности $P\left(\frac{B}{A_i}\right)$:

$$P\left(\frac{B}{A_1}\right) = 1 - (1 - 0,8)^1 = 0,8;$$

$$P\left(\frac{B}{A_2}\right) = 1 - (1 - 0,8)^2 = 0,96;$$

$$P\left(\frac{B}{A_3}\right) = 1 - (1 - 0,8)^3 = 0,992.$$

Подставляя найденные значения $P(A_i)$ и $P\left(\frac{B}{A_i}\right)$ в формулу (*), определим искомую вероятность события В:

$$P(B) = \frac{84}{285} \cdot 0,8 + \frac{132}{285} \cdot 0,96 + \frac{55}{285} \cdot 0,992 = \frac{67,2 + 126,72 + 54,56}{285} = \frac{248,48}{285} \approx 0,87.$$

Ответ: 0,87.

3.3 Случайные величины и законы их распределения. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики непрерывных и дискретных случайных величин

При изучении этих тем следует обратить особое внимание на свойства и взаимосвязь функции распределения и плотности распределения случайной величины, на их использование при определении вероятностей различных событий, связанных со случайной величиной. В этом смысле важное место должны занять экономические приложения рассматриваемых понятий.

Задача 8

Случайная величина X – годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Плотность распределения этой случайной величины имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{\alpha+1}} & \text{при } x \geq x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0, \end{cases}$$

где A – неизвестный параметр, а величины x_0 и α заданы и равны соответственно 1 и 2,5.

Требуется:

- 1 определить значение параметра A ;
- 2 найти функцию распределения $F(x)$;
- 3 определить математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение σ_x ;
- 4 определить размер годового дохода x , не ниже которого с вероятностью 0,5 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

Решение. При $x_0 = 1$ и $\alpha = 2,5$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^{3,5}}, & \text{при } x \geq 1, \\ 0, & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

1 Определение значения параметра A

Параметр A найдем из уравнения $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^1 \varphi(x) dx + \int_1^{\infty} \varphi(x) dx = -\int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{\infty} \frac{A}{x^{3,5}} dx = A \cdot \int_1^{\infty} x^{-3,5} dx = -\frac{A}{2,5} \cdot \frac{1}{x^{2,5}} \Big|_1^{\infty} = \frac{A}{2,5} = 1.$$

Отсюда $A=2,5$.

Таким образом,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2,5}{x^{3,5}}, & \text{при } x \geq 1, \\ 0, & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

2 Нахождение функции распределения $F(x)$

Зная плотность распределения $\varphi(x)$, функцию распределения $F(x)$

найдем по формуле $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.

Для $x < 1$ $F(x)=0$, так как при $x < 1$ $\varphi(x)=0$.

Для $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^1 \varphi(t) dt + \int_1^x \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{2,5}{t^{3,5}} dt = -\frac{1}{t^{2,5}} \Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x^{2,5}}.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^{2,5}}, & \text{при } x \geq 1, \\ 0, & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

3 Определение математического ожидания m_x и среднеквадратического отклонения σ_x

Для определения m_x и σ_x используем следующие формулы:

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx;$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi(x) dx - m_x^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x},$$

где D_x – дисперсия случайной величины X .

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^1 x\varphi(x)dx + \int_1^{\infty} x\varphi(x)dx = \int_1^{\infty} x \frac{2,5}{x^{3,5}} dx = 2,5 \int_1^{\infty} x^{-2,5} dx = -\frac{2,5}{1,5} \cdot \frac{1}{x^{1,5}} \Big|_1^{\infty} = \frac{5}{3};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \int_1^{\infty} x^2 \frac{2,5}{x^{3,5}} dx = 2,5 \int_1^{\infty} x^{-1,5} dx = -\frac{2,5}{0,5} \cdot \frac{1}{x^{0,5}} \Big|_1^{\infty} = 5;$$

$$D_x = 5 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{20}{9};$$

$$\sigma_x = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Итак, $m_x = 1\frac{2}{3}$; $\sigma_x = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

4 Определение размера годового дохода x , не ниже которого с вероятностью 0,5 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика

Так как по определению $F(x) = P(X < x)$ и $P(X < x) + P(X \geq x) = 1$, то
 $P(X \geq x_1) = 1 - P(X < x_1) = 1 - F(x_1) = 0,5$.

Отсюда $F(x_1) = 0,5$ и далее

$$1 - \frac{1}{x_1^{2,5}} = 0,5; \quad \frac{1}{x_1^{2,5}} = \frac{1}{2}; \quad x_1^{2,5} = 2; \quad 2,5 \ln x_1 = \ln 2; \quad \ln x_1 = \frac{\ln 2}{2,5} \approx \frac{0,693}{2,5} \approx 0,28;$$

$$x_1 \approx e^{0,28} = 1,32.$$

Таким образом, $x_1 = 1,32$.

3.4 Генеральная совокупность и выборка. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма и полигон частот. Несмещенность, эффективность и состоятельность оценок

Следует обратить внимание на разницу между повторными и бесповторными выборками, а также на различные способы отбора, применяемые на практике.

Необходимо уяснить смысл таких понятий, как несмещенность, эффективность и состоятельность оценок.

Полезно разобраться с графическим представлением статистического материала в виде эмпирической функции распределения, гистограммы и полигона частот.

Важно знать условия применения предлагаемых формул для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии.

Задача 9

Выборочная проверка размеров дневной выручки оптовой базы от реализации товаров по 100 рабочим дням дала следующие результаты:

Таблица 5

i	1	2	3	4	5	6	7	8
J _i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n _i	2	7	14	19	25	20	10	3

Здесь:

i – номер интервала наблюдаемых значений дневной выручки ($i = \overline{1,8}$);

J_i – границы i -го интервала (в условных денежных единицах);

n_i – число рабочих дней, когда дневная выручка оказывалась в пределах i -го интервала, при этом очевидно, что $\sum_{i=1}^8 n_i = n = 100$.

Требуется:

1) построить гистограмму частот;
 2) найти несмещенные оценки m_x и D_x для математического ожидания и дисперсии случайной величины X – дневной выручки оптовой базы;

3) определить приближенно вероятность того, что в наудачу выбранный рабочий день дневная выручка составит не менее 15 условных денежных единиц.

Решение

1 В условиях данной задачи естественно исходить из того, что наблюдаемая случайная величина X – дневная выручка оптовой базы – имеет непрерывное распределение вероятностей. Статистическим аналогом графика плотности распределения такой случайной величины, как известно, является гистограмма. Она представляет собой совокупность прямоугольников, построенных на выделенных интервалах наблюдаемых значений случайной величины X как на основаниях. Площадь каждого i -го прямоугольника равна частоте p_i^* i -го интервала, определяемой по формуле $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, так что $\sum_{i=1}^8 p_i^* = 1$. Отсюда высота i -го прямоугольника вычисляется как $\frac{p_i^*}{h_i}$, где h_i – длина i -го интервала (в нашей задаче $h_i = h = 5$ для всех $i = \overline{1, \dots, 8}$).

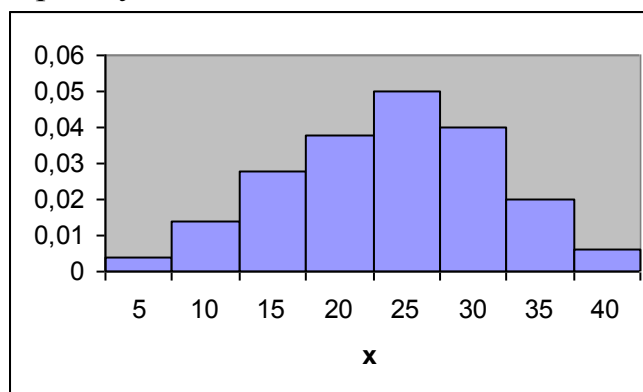
Полная площадь гистограммы, таким образом, будет равна единице.

На основе изложенного для построения гистограммы составим следующую таблицу:

Таблица 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8
J _i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
n _i	2	7	14	19	25	20	10	3
p _i [•]	0,02	0,07	0,14	0,19	0,25	0,20	0,10	0,03
$\frac{p_i^{\bullet}}{5}$	0,004	0,014	0,028	0,038	0,05	0,04	0,02	0,006

Построим гистограмму.



Вид этой гистограммы позволяет считать рассматриваемое распределение вероятностей нормальным.

2 Несмещенные оценки m_x и D_x найдем по формулам

$$m_x^{\bullet} = \sum_{i=1}^8 x_i p_i^{\bullet};$$

$$D_x^{\bullet} = \frac{n}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^8 (x_i - m_x^{\bullet})^2 \cdot p_i^{\bullet};$$

где x_i – середина i -го интервала.

Все необходимые вычисления для удобства и наглядности проведем в рамках следующей таблицы.

Таблица 7

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x _i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
p _i [•]	0,02	0,07	0,14	0,19	0,25	0,20	0,10	0,03
x _i p _i [•]	0,05	0,525	1,75	3,325	5,625	5,5	3,25	1,125

$$m_x = 21,15 \text{ (усл. ден. ед.)}$$

Продолжение таблицы 7

$ x_i - m_x^{\bullet} $	18,65	13,65	8,65	3,65	1,35	6,35	11,35	16,35
$(x_i - m_x^{\bullet})^2$	347,82	186,32	74,82	13,32	1,82	40,32	128,82	267,32
$(x_i - m_x^{\bullet})^2 p_i^{\bullet}$	6,96	13,04	10,48	2,53	0,46	8,06	12,88	8,02

$$D_x^* = \frac{100}{99} \cdot 62,43 = 63,06 \text{ (усл.ден.ед.)}^2.$$

Таким образом,

$$m_x = 21,15 \text{ (усл. ден. ед.)},$$

$$D_x^* = \frac{100}{99} \cdot 62,43 = 63,06 \text{ (усл.ден.ед.)}^2.$$

3 Как следует из пункта 1, распределение случайной величины X можно считать нормальным. В качестве его параметров возьмем оценки $m_x = 21,15$ и $\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = 7,94$, полученные в пункте 2. Тогда приближенно вероятность $P(X \geq 15)$ того, что в наудачу выбранный рабочий день дневная выручка оптовой базы составит не менее 15 условных денежных единиц, можно вычислить с использованием функции Лапласа $\Phi(x)$ по формуле

$$P(X \geq 15) = 0,5 - \Phi\left(\frac{15 - m_x^*}{\sigma_x^*}\right).$$

Сделаем это:

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 0,5 - \Phi\left(\frac{15 - 21,15}{7,94}\right) = 0,5 - \Phi(-0,77) = \\ &= \{\Phi(x) - \text{нечетная функция, поэтому } \Phi(-x) = -\Phi(x)\} = \\ &= 0,5 + \Phi(0,77) = \{\Phi(0,77) = 0,2794, \text{ см. [2], приложение 2}\} = \\ &= 0,5 + 0,2794 = 0,7794 \approx 0,78. \end{aligned}$$

Таким образом, $P(X \geq 15) \approx 0,78$.

Это значит, что в среднем в 78 из 100 рабочих дней дневная выручка оптовой базы составит не менее 15 условных денежных единиц.

3.5 Доверительная вероятность и доверительный интервал. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения. Эмпирическая функция распределения

Следует обратить внимание на суть интервального оценивания параметров распределений, на связь между доверительной вероятностью и доверительным интервалом. Важно разобраться с тем, как находятся доверительные интервалы для оценки математического ожидания признаков, распределенных по нормальному закону. При проверке гипотез необходимо уяснить смысл и роль таких понятий, как уровень значимости, критическая область, мощность критерия, причем, в их взаимосвязи. Безусловно, надо четко представлять общую схему статистической проверки гипотез.

Задача 10

При выборочном опросе 100 жителей поселка о количестве поездок по железной дороге, совершенных ими в течение месяца, получены следующие данные:

Число поездок	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	18-21	21-24	24-27	27-30	Итого
Число жителей	6	9	15	19	20	14	9	5	2	1	100

Требуется:

- 1) построить эмпирическую функцию распределения случайной величины X – количества поездок в месяц для наугад взятого жителя поселка;
- 2) найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,98 среднего значения случайной величины X .

Решение. Данная величина X является дискретной, а ее эмпирическая функция распределения – ступенчатой. Приблизительно можно представить данные исследования в следующем виде:

Таблица 8

Выборочные значения	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5	Итого
частоты	6	9	15	19	20	14	9	5	2	1	100

В качестве выборочных значений взяты середины интервалов.

Для каждого выборочного значения x найдем кумулятивную частоту n_x – сумму частот для выборочных значений, меньше либо равных x , и эмпирическую функцию распределения

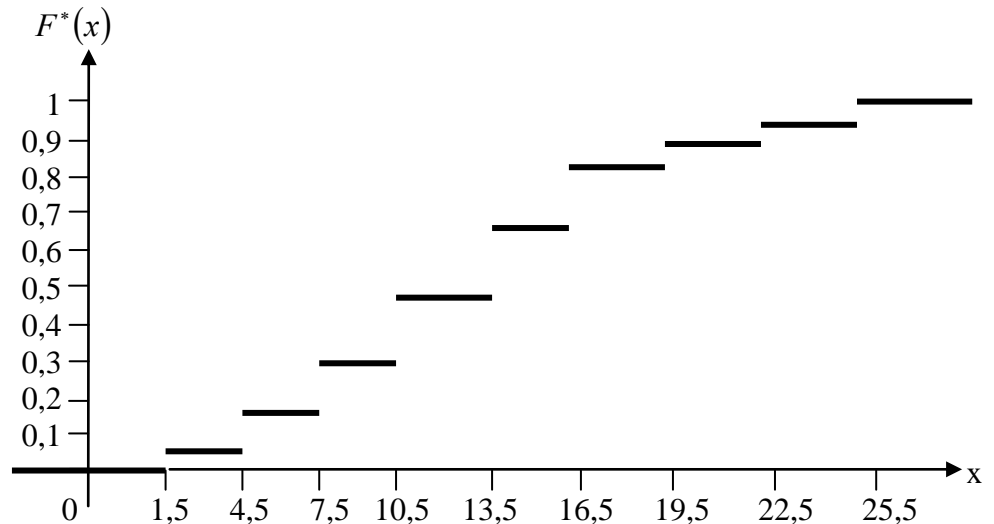
$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где $n=100$.

Таблица 9

x	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
n_x	6	15	30	49	69	83	92	97	99	100
$F^*(x)$	0,06	0,15	0,30	0,49	0,69	0,83	0,92	0,97	0,99	1

Построим график функции $F^*(x)$, исходя из таблицы 9:



Пусть x_1^*, \dots, x_{10}^* - выборочные значения, а $n_1 \dots n_{10}$ - их частоты (из таблицы 8). Найдем выборочную среднюю:

$$\begin{aligned} \bar{x}_B &= \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i x_i^*}{n} = \\ &= \frac{6 \cdot 1,5 + 4,5 \cdot 9 + 7,5 \cdot 15 + 13,5 \cdot 20 + 16,5 \cdot 14 + 19,5 \cdot 9 + 22,5 \cdot 5 + 25,5 \cdot 2 + 28,5 \cdot 1}{100} = \\ &= 10,305 \approx 10,3. \end{aligned}$$

Так как значение $n=100$ достаточно велико, то генеральную дисперсию оценим по формуле

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{10} n_i (x_i^* - \bar{x}_B)^2}{n} = \frac{6 \cdot (8,8)^2 + 9 \cdot (5,8)^2 + 15 \cdot (2,8)^2}{100} + \\ &+ \frac{19 \cdot (0,2)^2 + 20 \cdot (3,2)^2 + 14 \cdot (6,2)^2 + 9 \cdot (9,2)^2 + 5 \cdot (12,2)^2 + 2 \cdot (15,2)^2 + 1 \cdot (18,2)^2}{100} = \\ &= \frac{464,6 + 302,8 + 117,6 + 761,8 + 744,2 + 462,1 + 331,2}{100} \approx 31,8. \end{aligned}$$

Откуда $s \approx 5,6$.

Задачу построения доверительного интервала решим приближенно, считая, что оценка \bar{x}_B распределена по нормальному закону (для этого $n=100$ достаточно велико), а ее среднеквадратическое отклонение равно $\frac{s}{\sqrt{n}}$. Тогда по формуле для интервальной оценки математического ожидания имеем:

$$P\left(\left|\bar{x} - \bar{x}_B\right| < \frac{st}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t),$$

где \bar{x} - среднее генеральной совокупности,
 Φ - функция Лапласа.

В нашем случае $2\Phi(t)=0,98$, откуда $\Phi(t)=0,49$.

По таблице для функции Φ находим $t \approx 2,34$.

Тогда

$$\frac{st}{\sqrt{n}} = \frac{5,6 \cdot 2,34}{\sqrt{100}} \approx 1,3.$$

Отсюда получаем доверительный интервал

$$\left(\bar{x}_B - \frac{st}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_B + \frac{st}{\sqrt{n}} \right) = (10,3 - 1,3 ; 10,3 + 1,3) = (9 ; 11,6).$$

Таким образом, в среднем в 98 случаях из 100 интервал (9;11,6) покрывает среднее число поездок в месяц для случайно выбранного жителя поселка.

Список литературы

- 1 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979.
- 2 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высшая школа, 1972.
- 3 Кайдаш Н.М., Соркин Ю.И. Математическое программирование: лекции. – М.: ВШПД ВЦСПС, 1975.
- 4 Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.
- 5 Карасев А.И., Аксютин З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1983. Ч.2.

АЛИКАС ВАДИМ ЭДУАРДОВИЧ

САДОВ АЛЕКСЕЙ ПАВЛОВИЧ

Математические методы и статистическое моделирование

Методические указания
к проведению практических занятий
по дисциплинам «Математические методы принятия решений»
и «Математические модели и методы в управлении»
для студентов специальностей 060400, 061100
дневной и заочной форм обучения

Редактор Л.Е.Глазкова

Подписано к печати		Бумага типа № 1
Формат 60x84 1/16	Усл.п.л. 2,25	Уч.изд.л. 2,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет, ризограф.