МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
151900.62, 220700.62, 280000.62, 221700.62, 150700.62, 222000.62, 190100.62, 190600.62, 140400.62, 190700.62

I курс I семестр

Курган 2012

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования
Дисциплина: «Математика»
Составила: доцент кафедры ПМиКМ В.Н. Агафонова

Контрольные задания составлены на основе учебных программ по курсу «Математика».

Утверждены на заседании кафедры «28» октября 2011 г.
Рекомендованы методическим советом университета «21» сентября 2012 г.

Введение

Данные контрольные задания по математике предназначены для выполнения студентами заочной формы обучения технических специальностей. Они составлены в соответствии с программой.

В I семестре выполняются **контрольные работы 1, 2.**

Контрольная работа 1 содержит задачи по темам: «Элементы линейной алгебры», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия»,

Контрольная работа 2 содержит задачи по темам: «Введение в математический анализ», «Непрерывность и точки разрыва функции», «Производная функции и ее приложения».

Ниже приводятся таблицы с номерами задач, входящих в контрольные работы в соответствии с вариантом.

Студент должен выполнить вариант, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (номера зачетной книжки), если последняя цифра 0, то нужно решить задачи с №10, 20, 30 и т.д.

№ вар.	**Номера задач для контрольных работ**									
	№ 1				**№ 2**					
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

I курс, I семестр

I. Элементы линейной алгебры

1. Матрицы. Основные понятия. Действия над матрицами.
2. Определители 2-го и 3-го порядков, их вычисление. Свойства определителей. Понятие минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Понятие определителя n - го порядка.
3. Решение и исследование систем линейных уравнений. Формулы Крамера. Однородные системы.
4. Ранг матрицы, его вычисление. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Решение и исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.
6. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условия ее существования. Вычисление обратной матрицы и применение ее к решению систем линейных уравнений.

II. Элементы векторной алгебры

1. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число), их свойства.
2. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора, их свойства.
3. Линейно зависимые и независимые векторы. Базис векторов. Разложение вектора по базису.
4. Действия с векторами в координатной форме. Условие коллинеарности двух векторов.
5. Скалярное произведение векторов, его свойства. Вычисление скалярного произведения в координатной форме. Условие перпендикулярности двух векторов. Угол между векторами.
6. Векторное произведение векторов, его свойства. Геометрический смысл векторного произведения.
7. Векторное произведение в координатной форме.
8. Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов, его геометрический смысл, свойства, вычисление в координатной форме. Условие компланарности 3-х векторов.

III. Элементы аналитической геометрии

1. Простейшие задачи аналитической геометрии:

а) расстояние между двумя точками;

б) деление отрезка в данном отношении.

2. Понятие об уравнении линии. Прямая на плоскости.

Различные формы уравнения прямой:

а) общее уравнение прямой;

б) уравнение прямой в отрезках;

в) уравнение прямой, проходящей через две точки;

г) уравнение с угловым коэффициентом;

д) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом;

е) нормальное уравнение прямой. Приведение общего уравнения к нормальному виду.

3. Отклонение и расстояние точки от прямой, их вычисления.
4. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
5. Плоскость в пространстве. Различные формы уравнения плоскости в пространстве:

а) общее уравнение плоскости;

б) уравнение плоскости в отрезках;

в) уравнение плоскости, проходящей через три точки;

г) нормальное уравнение плоскости, применение его к решению задач.

6. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности 2-х плоскостей.
7. Прямая в пространстве. Различные формы уравнения прямой в пространстве:

а) канонические уравнения прямой;

б) параметрические уравнения;

в) общее уравнение прямой;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки.

8. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
10. Окружность, определение, каноническое уравнение, его особенности.
11. Эллипс, определение. Каноническое уравнение (вывод), его особенности. Геометрический смысл параметров, связь между ними. Эксцентриситет.

12. Гипербола. Определение, каноническое уравнение гиперболы (вывод), его особенности. Геометрический смысл параметров, связь между ними. Эксцентриситет.
13. Асимптоты, гиперболы.
14. Парабола. Определение, каноническое уравнение (вывод), его особенности. Смысл входящих параметров.
15. Полярная система координат. Полярные координаты точки. Связь декартовых координат с полярными.

Контрольная работа № 1

IV. Введение в математический анализ

1. Постоянные и переменные величины. Множества. Числовые промежутки (отрезок, интервал). Модуль числа. Свойства модулей.
2. Зависимые и независимые переменные. Определение функции, способы задания функции. Область определения. Символы математической логики (кванторы).
3. Графики основных элементарных функций ($y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т. д.). Построения графиков. Основные правила преобразований. Построение графиков путем деформации и сдвига.
4. Последовательность. Монотонные последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности.
5. Предел последовательности (определение, геометрическая иллюстрация).
6. Основные теоремы о последовательностях, имеющих конечный предел. (О единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел; критерий сходимости последовательности; теорема, связывающая пределы трех последовательностей, две из которых имеют одинаковый предел.)
7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Теоремы о пределах (предел суммы, произведения, частного двух последовательностей).
10. Предел функции. Определение, геометрическая иллюстрация. Бесконечно большие и бесконечно малые функции, их пределы.
11. Односторонние пределы. Признак существования предела функции в точке.
12. Первый замечательный предел.
13. Второй замечательный предел.
14. Предел показательно-степенных функций.

15. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые, их применение при вычислении пределов.

16. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва, их классификация.

V. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции. Определение, геометрический и механический смысл. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Основные теоремы о производных.
3. Производная степенной функции (вывести формулу для целого, положительного n).
4. Производная показательной функции (вывод).
5. Производная логарифмической функции (вывод).
6. Производные синуса и косинуса (вывод).
7. Производная тангенса и котангенса.
8. Производная сложной функции.
9. Обратная функция, ее производная. Теорема о существовании производной обратной функции (доказать).
10. Производные от обратных тригонометрических функций (вывести для арксинуса).
11. Производная от функций, заданных неявно и параметрически. Производная показательно - степенных функций.
12. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Производные высших порядков от параметрических функций.
13. Дифференцируемые функции. Теорема о дифференцируемости функций в точке (необходимость и достаточность). Доказать.
14. Дифференциал функции. Определение, вычисление, геометрический смысл.
15. Основные формулы и правила дифференцирования.
16. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
17. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.
18. Дифференциалы высших порядков.

VI. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

1. Условия возрастания и убывания функций на интервале. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функ-

ции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной на отрезке.
2. Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале. Точки перегиба.
3. Асимптоты графика функции.
4. Общая схема исследования функции и построение ее графика.
5. Уравнение касательной и нормали к кривой.

Контрольная работа № 2

Контрольная работа № 1

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Векторная алгебра

1-10 Даны векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$; $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$; $\vec{c} = \{c_1; c_2; c_3\}$; $\vec{d} = \{d_1; d_2; d_3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1. $\vec{a}=\{1;2;3\}$; $\vec{b}=\{-1;3;2\}$; $\vec{c}=\{7;-3;5\}$; $\vec{d}=\{6;10;17\}$.

2. $\vec{a}=\{4;7;8\}$; $\vec{b}=\{9;1;3\}$; $\vec{c}=\{2;-4;1\}$; $\vec{d}=\{1;-13;-13\}$.

3. $\vec{a}=\{8;2;3\}$; $\vec{b}=\{4;6;10\}$; $\vec{c}=\{3;-2;1\}$; $\vec{d}=\{7;4;11\}$.

4. $\vec{a}=\{10;3;1\}$; $\vec{b}=\{1;4;2\}$; $\vec{c}=\{3;9;2\}$; $\vec{d}=\{19;30;7\}$.

5. $\vec{a}=\{2;4;1\}$; $\vec{b}=\{1;3;6\}$; $\vec{c}=\{5;3;1\}$; $\vec{d}=\{24;20;6\}$.

6. $\vec{a}=\{1;7;3\}$; $\vec{b}=\{3;4;2\}$; $\vec{c}=\{4;8;5\}$; $\vec{d}=\{7;32;14\}$.

7. $\vec{a}=\{1;-2;3\}$; $\vec{b}=\{4;7;2\}$; $\vec{c}=\{6;4;2\}$; $\vec{d}=\{14;18;6\}$.

8. $\vec{a}=\{1;4;3\}$; $\vec{b}=\{6;8;5\}$; $\vec{c}=\{3;1;4\}$; $\vec{d}=\{21;18;33\}$.

9. $\vec{a}=\{2;7;3\}$; $\vec{b}=\{3;1;8\}$; $\vec{c}=\{2;-7;4\}$; $\vec{d}=\{16;14;27\}$.

10. $\vec{a}=\{7;2;1\}$; $\vec{b}=\{4;3;5\}$; $\vec{c}=\{3;4;-2\}$; $\vec{d}=\{2;-5;-13\}$.

11-20 Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры и аналитической геометрии найти:

1) длину ребра A_1A_2 ;

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объем пирамиды;

5) уравнение прямой A_1A_2;

6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Сделать схематический чертеж.

11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.

12. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10;)$, $A_4(7;5;9)$.

14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.

15. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.

17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.

18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$.

19. $A_1(8;6;4)$, $A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$.

20. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

21-30 Найти точку M_1, симметричную точке M относительно плоскости P.

21. M (-1; 0; -1), $P: 2x + 6y - 2z + 11 = 0$.

22. M (0; 2; 1), $P: 2x + 4y - 3 = 0$.

23. M (2; 1; 0), $P: y + z + 2 = 0$.

24. M (-1; 2; 0), $P: 4x - 5y - z - 7 = 0$.

25. M (2; -1; 1), P: $x - y + 2z - 2 = 0$.

26. M (1; 1; 1), P: $x + 4y + 3z + 5 = 0$.

27. M (1; 2; 3), P: $2x + 10y + 10z - 1 = 0$.

28. M (1; 0; -1), P: $2y + 4z - 1 = 0$.

29. M (3; -3; -1), P: $2x - 4y - 4z - 13 = 0$.

30. M (-2; -3; 0), P: $x + 5y + 4 = 0$.

31-40 Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

31. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Контрольная работа №2

Введение в математический анализ, непрерывность и точки разрыва функции, производная функции

Найти пределы функций, не применяя правило Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1+x}+x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x}$.

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{5x^3+4x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{\sin 2x}$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{3x^3-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{\sin^3 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6x-5}}{\sqrt{4x^2+3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-x^2+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]\right\}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$;

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-2x^2+5x^4}}{\sqrt{2+3x+x^4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+5}\right)^{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

48. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+4x-x^2}{2x^2+x-1}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 3x}$;

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3}}{\sqrt[3]{27x^2+x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \mathrm{tg}2x}$;

50. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{2x^2-3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-8}\right)$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2\cdot \mathrm{ctg}\,3x}{\sin 2x}$;

51-60 Задана функция y = f(x) и два значения аргумента x_1 и x_2 . Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва определить, какого он рода; 3) все рассуждения обосновать.

51. $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

52. $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

53. $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

54. $f(x) = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{x}}-1}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

55. $f(x) = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

56. $f(x) = 10^{\frac{1}{7-x}}$, $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

57. $f(x) = 14^{\frac{1}{6-x}}$, $x_1 = 6$; $x_2 = 4$.

58. $f(x) = 2 + 3^{\frac{1}{x}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

59. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

60. $f(x) = \dfrac{2}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

61-70 Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций.

61. а) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^5$;

б) $y = \ln \sin(x^2+5)$;

в) $y = x^{x^2}$.

62. а) $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

б) $y = arctg\sqrt{e^{x^2} + x}$;

в) $y = \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{x}}$.

63. а) $y = arcsin\ e^{2x+1}$;

б) $y = arctg\sqrt{1-3x}$;

в) $y = x^{\cos x}$.

64. а) $y = \sin^3 x - x\cos x$;

б) $y = x^3 \ln(x^2+1)$;

в) $y = \left(tgx\right)^{x^2}$.

65. а) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2+e^{3x}}$;

б) $y = \dfrac{x\ \ln x}{x^2-1}$;

в) $y = (arctg\ x)^{\ln x}$.

66. а) $y = 2\ tg^3(x^2+1)$;

б) $y = 3^{arctg(x^2+1)}$;

в) $y = (arcsin\ x)^x$.

67. а) $y = \dfrac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x\ tg^2 x$;

б) $y = arctg\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$;

в) $y = \left(x+2x^2\right)^x$.

68. а) $y = \ln arcsin\ e^{3x-2}$; б) $y = arctg\ \cos^2 x$;

в) $y = (\sin 2x+1)^{\ln x}$.

69. а) $y = 2^x e^{-x^2}$; б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y = \left(\cos x + x\right)^{x}$.

70. а) $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x$; б) $y = arctg\ \sqrt{e^x + 3}$;

в) $y = \left(\sin x\right)^{x^2}$.

71-80 Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически.

71. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

72. $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

73. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

74. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

75. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

76. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

77. $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$

80. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

81-90 Найти уравнения касательной к графику функции F (x;y) = 0 и проходящей через точку M_0 (x_0; y_0).

81. $y = e^{x^2-1}$, $M_0(1;\ 1)$.

82. $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $M_0(1;\ 1)$.

83. $y=\sqrt{x^2-9},\ M_0(5;4).$

84. $y=1-\sqrt[3]{x},\ M_0(8;-1).$

85. $y=\ln(x^2+2),\ M_0(1;\ln 3).$

86. $x^2+y^2=2x+4,\ M_0(2;2).$

87. $x^2-y^2=1-2y,\ M_0(1;2).$

88. $y=x\cdot\ln x,\ M_0(e;e).$

89. $y=\frac{1}{2}\sin^2(4x-\frac{\pi}{3}),\ M_0(\frac{\pi}{6};\frac{3}{8}).$

90. $y=\frac{1}{x^4}+2x,\ M_0(1;3).$

91-100 Вычислить предел, применяя правило Лопиталя.

91. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}.$

92. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}.$

93. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-3x-1}{\sin 5x}.$

94. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}.$

95. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}.$

96. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg}x\right].$

97. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}.$

98. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}.$

99. $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}\pi x).$

100. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$

Методические указания для выполнения контрольной работы № 1

Для выполнения контрольной работы № 1 нужно изучить теоретический материал по темам: «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия». См. [1],[2],[6],[11].

Линейная алгебра. Векторная алгебра.
Элементы аналитической геометрии

Задача 1. Даны векторы $\bar{a}=\{2;3;1\}$, $\bar{b}=\{3;7;2\}$, $\bar{c}=\{5;4;2\}$, $\bar{d}=\{10;3;3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис, найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

Решение. Для того чтобы векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимые, т.е. определитель, составленный из координат этих векторов, должен быть отличен от нуля. Определитель вычисляется понижением порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5(-2-1) = 15 \neq 0$$

Т.к. определитель, составленный из координат векторов, не равен нулю, то векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы и образуют базис.

Разложить вектор $\overline{d}$ по базису $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - это значит представить его в виде линейной комбинации векторов базиса, т.е. в виде:

$$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c}, \qquad (1)$$

где числа α,β,γ - это координаты векторы $\overline{d}$ в базисе $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$.

Для нахождения чисел α,β,γ составим систему трех уравнений с тремя неизвестными α,β,γ. Можно решить ее любым способом, но самым рациональным является метод Гаусса. Чтобы правильно составить систему, нужно помнить, что все соответствующие координаты векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ должны удовлетворять формуле (1). Получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 5\gamma = 10; \\ 3\alpha + 7\beta + 4\gamma = 3; \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

Для решения системы (2) выписываем расширенную матрицу коэффициентов системы (2) и приводим ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Пояснения. Переставим первую строку на первое место, чтобы получить все нули, кроме первого, т.к. единица хорошо уравнивается с любым числом. Умножим все элементы первой строки на (-2) и сложим со второй. При этом первое неизвестное α исключается из всех уравнений, кроме первого. Затем исключаем неизвестное β из третьего уравнения.

Запишем систему, эквивалентную полученной матрице: $\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 3; \\ \quad -\beta + \gamma = 4; \\ \quad\quad -\gamma = -2. \end{cases}$

Из последнего уравнения находим $\gamma = 2$. Поднимаясь выше, находим $\beta = -2$, затем $\alpha = 3$.

Решение системы: $\begin{cases} \alpha = 3; \\ \beta = -2; \\ \gamma = 2. \end{cases}$

Найденные значения α, β, γ подставляем в формулу (1).

$\overline{d} = 3\overline{a} - 2\overline{b} + 2\overline{c}$ - разложение вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$. Координаты вектора $\overline{d} = \{3; -2; 2\}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: A_1(-1;2;1), A_2(-2;2;5), A_3(-3;3;1), A_4(-1;4;3). Средствами векторной алгебры и аналитической геометрии найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) площадь грани $A_1A_2A_3$;
4) объем пирамиды;
5) уравнение прямой A_1A_2;
6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Сделать схематический чертеж.

Решение. 1) Для нахождения длины ребра A_1A_2 найдем координаты вектора $\overline{A_1A_2} = \{-1; 0; 4\}$ как разность координат конечной и начальной точек.

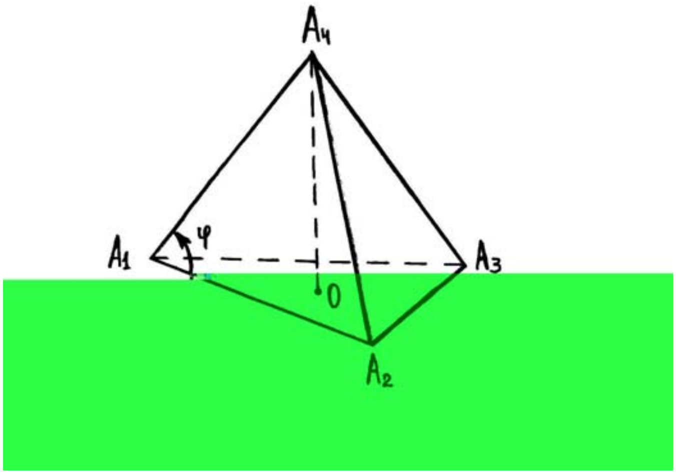

Рис. 1

Модуль вектора $\overline{A_1A_2}$ находим по формуле

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (3)$$

где x, y, z - координаты вектора $\overline{A_1A_2}$.

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{17}.$$

2) Чтобы найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4, нужно найти координаты вектора $\overline{A_1A_4} = \{0;2;2\}$ и использовать формулу скалярного произведения векторов в координатной форме.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2, \qquad (4)$$

где $\overline{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \overline{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$.

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8.$$

Скалярное произведение векторов $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}$ по определению вычисляется по формуле:

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4} = \left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right| \cos\varphi, \qquad (5)$$

где $\left|\overline{A_1A_2}\right|$ и $\left|\overline{A_1A_4}\right|$ - модули векторов (вычисляются по формуле (3)), $\cos\varphi$ - косинус угла между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$.

$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$. Из формулы (5) выражаем

$$\cos\varphi = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{8}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{17}} = \sqrt{0,4706} \approx 0,686.$$

$$\varphi = \arccos\sqrt{0,4706} \approx \arccos 0,686 \approx 46°42'.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ вычисляется по формуле:

$$S_\Delta A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\left|\overline{A}_1\overline{A}_2 \times \overline{A}_1\overline{A}_3\right|, \qquad (6)$$

где

$$\overline{A}_1\overline{A}_2 \times \overline{A}_1\overline{A}_3 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i}\left(0-4\right) - \overline{j}\left(0+8\right) +$$

$$+\overline{k}\left(-1-0\right) = -4\overline{i} - 8\overline{j} - \overline{k}.$$

Пояснения. $\overline{A_1A_3}=\{-2;1;0\}$, $\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)=\{-4;-8;-1\}$. $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$ - векторное произведение векторов, вычисляемое с помощью определителя третьего порядка, в котором первая строка – единичные векторы $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, а вторая и третья строки – координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. Модуль векторного произведения $\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|$ вычисляем по формуле (3).

$\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-8)^8+(-1)^2}=\sqrt{16+64+1}=\sqrt{81}=9.$

Площадь $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ вычисляем по формуле (6).

$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\cdot 9=4,5$ (кв. ед.).

4) Объем пирамиды вычисляется через модуль смешанного произведения трех векторов, выходящих из одной вершины.

$$V_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)\cdot\overline{A_1A_4}\right|. \qquad (7)$$

Векторное произведение векторов $\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)=\{-4;-8;-1\}$ было вычислено ранее. Умножим скалярно полученный вектор на $\overline{A_1A_4}=\{0;2;2\}$ по формуле (4).

$\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)\cdot\overline{A_1A_4}=(-4)\cdot 0+(-8)\cdot 2+(-1)\cdot 2=-16-2=-18.$

$V_{A_1A_2A_3A_4}=\dfrac{1}{6}\left|-18\right|=\dfrac{1}{6}\cdot 18=3$ (куб. ед.).

5) Для составления уравнения прямой A_1A_2 применяем уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \qquad (8)$$

где $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ - координаты точек A_1 и A_2.

$\dfrac{x+1}{-2+1}=\dfrac{y-2}{2-2}=\dfrac{z-1}{5-1};\qquad \dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{4}\quad (A_1A_2).$

6) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ составим, применяя уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (9)$$

где $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$ и (x_3,y_3,z_3) - координаты точек A_1, A_2, A_3.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -2+1 & 2-2 & 5-1 \\ -3+1 & 3-2 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагаем определитель по первой строке.

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)\cdot(-4) - (y-2)\cdot 8 +$$

$$+(z-1)\cdot(-1) = -4x-4-8y+16-z+1 = -4x-8y-z+13 = 0.$$

Уравнение плоскости $(A_1A_2A_3)$ имеет вид: $4x+8y+z-13=0$.

7) Уравнение высоты A_4O составим, используя канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad (10)$$

где $(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки A_4, $\{l,m,p\}$ - координаты направляющего вектора прямой. В качестве направляющего вектора выступает нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$. $\bar{n} = \bar{S} = \{4;8;1\}$, $A_4(-1;4;3)$. Подставим их в уравнение (10). $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-3}{1}$ (A_4O).

Задача 3. Найти точку M_1, симметричную точке $M(-3;0;2)$ относительно плоскости $3x+2y+2z-4=0$.

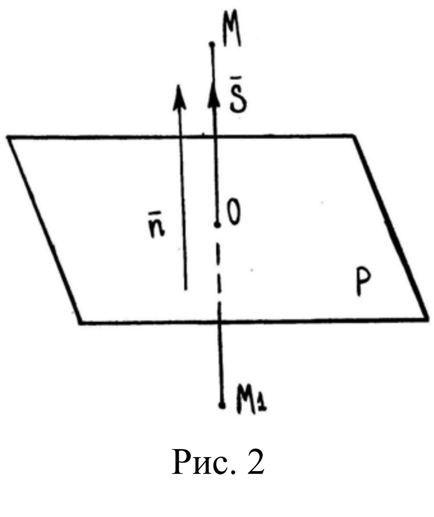

Рис. 2

Решение. Симметричные точки лежат на одном перпендикуляре и одинаково удалены от плоскости P, т.е. $MO = OM_1$, $MM_1 \perp P$. Составим уравнение перпендикуляра MM_1. Применяем канонические уравнения прямой в пространстве (10):

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $\overline{S}=\{m;n;p\}$ - координаты направляющего вектора прямой, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, через которую она проходит. В данной задаче $M_0(-3;0;2)$. В роли направляющего вектора прямой выступает нормальный вектор плоскости P, т.е. $\overline{n}=\overline{S}=\{3;2;2\}$.

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2}\ (MM_1).$$

Найдем точку O пересечения прямой MM_1 с плоскостью P. Для этого решаем систему 3-х уравнений: прямой (MM_1) с уравнением плоскости

$P(3x+2y+2z-4=0)$ как систему $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{2}=t,\\ 3x+2y+2z-4=0.\end{cases}$

Первое уравнение системы запишем в параметрической форме:

$$\begin{cases}\dfrac{x+3}{3}=t;\\ -\dfrac{y}{2}=t;\\ \dfrac{z-2}{2}=t;\\ 3x+2y+2z-4=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=3t-3;\\ y=-2t;\\ z=2t+2;\\ 3x+2y+2z-4=0.\end{cases}\quad(*)$$

Подставим x,y,z в уравнение плоскости и найдем параметр t.

$3(3t-3)-2\cdot 2t+2(2t+2)-4=0.$ $9t-4t+4t-4+4=0.$ $9t-9=0\Rightarrow t=1.$

Подставляя t в систему ($*$), находим (x,y,z) – координаты точки $O(0;-2;4)$.

Точка O - середина отрезка MM_1. Определяем координаты точки M_1 по формулам:

$$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_M+x_{M_1}}{2};\\ y_0=\dfrac{y_M+y_{M_1}}{2};\\ z_0=\dfrac{z_M+z_{M_1}}{2}.\end{cases}\qquad\begin{cases}x_{M_1}=2x_0-x_M=2\cdot 0+3=3;\\ y_{M_1}=2y_0-y_M=-2\cdot 2-0=-4;\\ z_{M_1}=2z_0-z_M=2\cdot 4-2=6.\end{cases}$$

Ответ. Координаты точки $M_1(3;-4;6)$.

Задача 4. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4; \\ 3x_1+2x_2-5x_3=2; \\ 2x_1+x_2+2x_3=7. \end{cases}$

Доказать ее совместность и решить двумя способами:

1) методом Гаусса;

2) с помощью обратной матрицы.

Решение. Вычислим главный определитель системы понижением порядка.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&-5\\2&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&-4&-14\\0&-3&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4&-14\\-3&-4\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)\begin{vmatrix}2&7\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot(8-21)=-26\neq 0.$$

Так как главный определитель системы отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение. Решаем методом Гаусса – методом последовательного исключения неизвестных. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\3&2&-5&2\\2&1&2&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-4&-14&-10\\0&-3&-4&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&7&5\\0&-3&-4&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&2&7&5\\0&0&13&13\end{array}\right).$$

Пояснения. На первом этапе исключается неизвестное x_1. Для этого первое уравнение умножается на (-3) и складывается со вторым. Затем первое уравнение умножается на (-2) и складывается с третьим. Далее элементы второй строки сокращаем на (-2). Все элементы второй строки умножаются на 3, а третьей строки на 2 и складываются. Результат пишется на месте третьей строки. Матрица приведена к треугольному виду. Запишем систему, эквивалентную этой матрице:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=4; \\ \qquad 2x_2+7x_3=5; \\ \qquad\qquad 13x_3=13. \end{cases}$$

Поднимаясь снизу вверх, находим все неизвестные системы. $x_3=1$; $x_2=-1$; $x_1=3$.

Решение системы: $\begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Чтобы сделать проверку, подставим найденные неизвестные в каждое уравнение первоначальной системы. Если все равенства будут верными, решение системы найдено правильно.

Проверка. $\begin{cases} 3 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 4; \\ 3\cdot 3 + 2\cdot(-1) - 5\cdot 1 = 2; \\ 2\cdot 3 + (-1) + 2\cdot 1 = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4; \\ 2 = 2; \\ 7 = 7. \end{cases}$

Вывод. Найденные корни удовлетворяют системе, т.к. все уравнения обратились в тождества.

Для того чтобы решить систему матричным способом, нужно записать ее в виде матричного уравнения. Затем найти формулу для его решения. Для записи системы в виде матричного уравнения введем следующие матрицы: A - матрица коэффициентов при неизвестных левой части системы, X - матрицы неизвестных, B - матрица свободных членов.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B. \tag{11}$$

Неизвестная матрица X находится по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{12}$$

где A^{-1} - обратная матрица для A.

Обратная матрица для A существует, если ее определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Он был вычислен ранее $\Delta = |A| = -26 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует и находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|}, \tag{13}$$

где $\widetilde{A}$ - присоединенная матрица для A - это транспонированная матрица алгебраических дополнений для элементов матрицы A.

Находим алгебраические дополнения для элементов строк и сразу транспонируем, т.е. пишем в соответствующий столбец. Алгебраические дополнения обозначаются A_{ij}. Индексы i и j такие же, как у элементов a_{ij} матрицы A. Находим дополнения для элементов строк и пишем в столбцы, т.е. сразу транспонируем.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9.$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$ $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -16.$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 10) = -16.$ $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 14.$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$

Составляем присоединенную матрицу:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -16 \\ -16 & -4 & 14 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{26} & \frac{1}{26} & \frac{16}{26} \\ \frac{16}{26} & \frac{4}{26} & -\frac{14}{26} \\ \frac{1}{26} & -\frac{3}{26} & \frac{4}{26} \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу X по формуле (12):

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{9}{26} & \frac{1}{26} & \frac{16}{26} \\ \frac{16}{26} & \frac{4}{26} & -\frac{14}{26} \\ \frac{1}{26} & -\frac{3}{26} & \frac{4}{26} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{36}{26} & +\frac{2}{26} & +\frac{112}{26} \\ \frac{64}{26} & +\frac{8}{26} & -\frac{98}{26} \\ \frac{4}{26} & -\frac{6}{26} & +\frac{28}{26} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства двух матриц имеем: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Методические указания для выполнения контрольной работы № 2

В контрольной работе № 2 все задачи составлены по разделам «Введение в математический анализ», «Непрерывность функции и точки разрыва», «Производная функции и ее приложения». Решению примеров по математическому анализу предшествует очень большая теоретическая часть, без которой решение невозможно. С ней можно ознакомиться в учебниках и пособиях: [1],[3],[4],[5],[6],[9],[11]. Необходимо изучить все теоремы о бесконечно больших и бесконечно малых функциях, основные теоремы о пределах, правила предельного перехода и возможные неопределенные случаи.

1. Введение в математический анализ. Вычисление пределов

При вычислении пределов могут встретиться неопределенные случаи:

1) отношение двух бесконечно больших функций $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$;
2) отношение двух бесконечно малых функций $\left(\frac{0}{0}\right)$;
3) разность двух бесконечно больших функций одного знака $(\infty-\infty)$;
4) произведение бесконечно малой на бесконечно большую $(0\cdot\infty)$;
5) возведение в бесконечно большую степень функции, пределом которой является единица (1^{∞});
6) возведение в бесконечно малую степень бесконечно большой функции (∞^{0});
7) возведение в бесконечно малую степень бесконечно малой функции (0^{0}).

При вычислении таких пределов нельзя сразу получить ответ. Нужно раскрыть эти неопределенности, применяя некоторые методы и теоремы. Рассмотрим такие случаи.

Правило 1. *При вычислении предела от дроби, в числителе и знаменателе которой содержатся бесконечно большие многочлены целых или дробных степеней, встречаемся с неопределенностью* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$*. Она раскрывается делением числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень переменной, входящей в ее числитель и знаменатель.*

При этом может быть три случая:

1) если степени в числителе и знаменателе дроби одинаковые, то предел всегда конечный, $\neq 0$*, и равен отношению коэффициентов при старших степенях переменных числителя и знаменателя;*

2) если в числителе степень меньше, чем в знаменателе $(m < n)$*, предел всегда равен 0;*

3) если в числителе степень больше, чем в знаменателе $(m > n)$*, то конечного предела нет, дробь будет бесконечно большой, и предел ее равен* ∞ *.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{если } m = n; \\ 0, \text{если } m < n; \\ \infty, \text{если } m > n. \end{cases}$$

Замечание 1. *Если в числителе или в знаменателе имеется несколько слагаемых с одинаковой наивысшей степенью, то в окончательном ответе коэффициенты при старших степенях суммируются.*

Замечание 2. *Величина, обратная бесконечно большой* $\left(\frac{1}{\infty}\right)$*, является бесконечно малой (предел которой равен 0), а величина, обратная бесконечно малой* $\left(\frac{1}{0}\right)$*, является бесконечно большой (предел которой равен* ∞*).*

В следующих задачах найти пределы, не применяя правило Лопиталя.

Задача 1.1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - 2x + 5}{5x^2 + x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 - 2x + 5}{5x^2 + x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{5 + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{1}{x}\right)} =$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

Пояснения. Имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому делим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень x^2. Применяем теорему о пределе частного, т.е. вычисляем пределы в числителе и в знаменателе дроби. Затем применяем теорему о пределе алгебраической суммы. Учитывая, что предел постоянной равен самой постоянной, а остальные слагаемые в числителе и знаменателе являются бесконечно малыми, пределы которых равны 0, переходим к пределу и получаем ответ.

Задача 1.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+3}}{7x+4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+3}}{7x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}}{7+\frac{4}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{4}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\frac{4}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}=\frac{\sqrt{0+0}}{7+0}=\frac{0}{7}=0.$$

Пояснения. Делим числитель и знаменатель дроби на x. В числителе дроби корень квадратный делить на x. Для этого x нужно подвести под знак корня, возводя его в степень, равную показателю корня, и подкоренное выражение делить на x^2.

Задача 1.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{5x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\text{огр.}}{\text{б.м.}}=\text{б.б.}=\infty$

Пояснения. После деления числителя и знаменателя на наивысшую степень теорему о пределе частного применить нельзя, т.к. предел знаменателя равен 0 (сумма двух бесконечно малых). В числителе конечный предел равен 2, т.е. в числителе стоит ограниченная функция. Частное от деления ограниченной функции на бесконечно малую есть бесконечно большая функция, которая не имеет конечного предела. Условно пишется ∞.

Задача 1.4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{4x^2+1}+x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}4+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to\infty}1}=$$

$$=\frac{3+0}{\sqrt{4+0}+1}=\frac{3}{3}=1.$$

В этом примере проиллюстрировано замечание 1.

В рассмотренных примерах раскрытие неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ проведено классическим методом – делением числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень переменной с последующим применением основных теорем о пределах и правил предельного перехода. При этом видно, что значение вычисляемого предела зависит только от слагаемых высшего порядка в числителе и знаменателе дроби. Доказано, что сумму конечного числа бесконечно больших величин в числителе и знаменателе дроби можно заменить одной величиной высшего порядка, т.к. они эквивалентны, т.е.

$$\underset{x\to\infty}{a_0x^n}+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots a_n\sim\underset{x\to\infty}{a_0x^n}.$$

Это позволит опустить промежуточные преобразования, что упрощает вычисления. Поэтому решение задач 1.1, 1.2, 1.3 можно записать более коротко.

Задача 1.1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2+x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+5}{5x^2+x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{5x^2}=\dfrac{3}{5}.$

Пояснения. Заменяем числитель дроби и знаменатель эквивалентными величинами: $\underset{x\to\infty}{3x^2}-2x+5\sim3x^2,\quad 5x^2+x\sim5x^2$.

Задача 1.2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x+3}}{7x+4}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+3}}{7x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}}{7x}=\frac{\sqrt{2}}{7}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{7}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{2}}{7}\cdot 0=0.$$

Пояснения. $\sqrt{2x+3}\underset{x\to\infty}{\sim}\sqrt{2x}$, $\sqrt{7x+4}\underset{x\to\infty}{\sim}7x$.

Задача 1.3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{5x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{5x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{5x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty.$

Пояснения. $2x^2+3x+1\sim 2x^2$, $5x+2\sim 5x$.

Замечание 3. *Если в числителе или в знаменателе имеется несколько слагаемых с одинаковой степенью, то их можно рассматривать как различные многочлены и каждый из них заменить одним слагаемым наивысшего порядка.*

Задача 1.4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{4x^2+1}+x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{4x^2}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2x+x}=\dfrac{3}{3}=1.$

Пояснения. $3x+2\sim 3x$, $\sqrt{4x^2_{x\to\infty}+1}\sim\sqrt{4x^2}$.

Задача 1.5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{\sqrt{5x^4+2x^2+3}-\sqrt{7x^4+x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{\sqrt{5x^4+2x^2+3}-\sqrt{7x^4+x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^4}-\sqrt{7x^4}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2\sqrt{5}-x^2\sqrt{7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}.$$

Пояснения. $3x^2+x+1\sim 3x^2$, $\sqrt{5x^4+2x^2+3}\sim\sqrt{5x^4}$, $-\sqrt{7x^4+x}\sim -\sqrt{7x^4}$.

Следующая неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ раскрывается несколькими способами: разложением числителя и знаменателя на множители, освобождением от иррациональности, с помощью первого замечательного предела $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\sin u}{u}=1$, с помощью эквивалентных бесконечно малых и т.д.

Замечание 4. *Неопределенность* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *в случае отношения многочленов никогда не раскрывается делением числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень переменной!*

При вычислении пределов очень часто пользуются эквивалентными бесконечно малыми.

Определение 1. *Величина называется бесконечно малой, если предел ее равен нулю, т.е.* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$.

Бесконечно малая – это переменная величина, которая стремится к нулю в процессе своего изменения. Ни одно число в отдельности, если оно <u>не нуль</u>, не может квалифицироваться как бесконечно малое.

Определение 2. *Две бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются эквивалентными, если предел их отношения равен 1, т.е.*

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1. \qquad (*)$$

Эквивалентные обозначаются $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Эквивалентные бесконечно малые играют большую роль при раскрытии неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, т.е. при вычислении предела отношения двух бесконечно малых $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. При этом каждую бесконечно малую можно заменить ей эквивалентной. Значение предела при этом не меняется. Если $\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$, а $\beta(x)\sim\overline{\beta}(x)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$.

Замечание 5. *В частном и произведении можно пользоваться эквивалентными бесконечно малыми* a, *в сумме и разности не всегда, т.к. можно получить неправильный ответ (к примеру, разность двух эквивалентных бесконечно малых будет эквивалентна бесконечно малой более высокого порядка малости).*

Сумма конечного числа бесконечно малых величин эквивалентна бесконечно малой низшего порядка малости.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

1. $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$.
2. $tg u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

6. $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.
7. $a^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u\cdot \ln a$.

3. $\underset{u\to 0}{arcsin\, u \sim u}$.

4. $\underset{u\to 0}{arctgu \sim u}$.

5. $\underset{u\to 0}{\ln(1\pm u) \sim \pm \mathrm{u}}$.

8. $\underset{u\to 0}{\sqrt[n]{1\pm u} - 1} \sim \pm\dfrac{u}{n}$.

9. $\underset{u\to 0}{(1\pm u)^p - 1} \sim \pm pu$.

Замечание 6. *Вместо* $\boldsymbol{u}$ *может быть любая переменная, функция или некоторое выражение, стремящееся к нулю при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$.

Задача 1.6. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x^2-x+1}=$

$=\dfrac{-1-3}{(-1)^2+1+1}=\dfrac{-4}{3}.$

Пояснения. Разлагаем на множители числитель и знаменатель дроби. В знаменателе сумму кубов разлагаем по формуле: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. В числителе квадратный трехчлен разлагаем на множители по формуле,

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена, которые находим, решая квадратное уравнение $x^2-2x-3=0$.

Корни можно найти по теореме Виета: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=-3; \\ x_1+x_2=2. \end{cases}$ $x_1=3;\quad x_2=-1.$

После разложения сокращаем дробь на $(x+1)$, которая при $x\to -1$ стремится к нулю и создает неопределенность. Оставшаяся дробь существует в точке $x=-1$, поэтому подставляем вместо x предельное значение и получаем ответ.

Задача 1.7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3-4)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}.$

Пояснения. Для раскрытия неопределенности домножаем числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Задача 1.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot tg2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot tg2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot tg2x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{x\cdot tg2x}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{3x}{2}}{x\cdot 2x}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{2\cdot 2x^2}=-\dfrac{9}{4}.$

Пояснения. Числитель дроби преобразуем по формуле:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}.$$

Далее пользуемся эквивалентными бесконечно малыми $\underset{x\to 0}{sin}\dfrac{3x}{2}\sim\dfrac{3x}{2}$; $\underset{x\to 0}{tg}\ 2x\sim 2x$.

Задача 1.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{5+x}{5}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5\cdot x}=\dfrac{1}{5}.$

Пояснение. В числителе дроби разность логарифмов заменяем логарифмом дроби. Затем пользуемся эквивалентными бесконечно малыми: $\underset{x\to 0}{\ln}\left(1+\dfrac{x}{5}\right)\sim\dfrac{x}{5}$.

При раскрытии неопределенности $\left(1^\infty\right)$ применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e;$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^\infty\right)=e.$

Если нет этой неопределенности, то второй замечательный предел не работает.

Например: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+5}\right)^x=\infty,\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right)^x=0$. В первом случае предел в основании равен двум, т.е. ограниченная функция, большая единицы, возводится в бесконечно большую положительную степень и становится бесконечно большой. Во втором случае предел основания равен $\dfrac{1}{3}$, т.е. ограниченная функция, меньшая единицы, возводится в бесконечно большую положительную степень и становится бесконечно малой.

Особенность второго замечательного предела состоит в том, что второе слагаемое в скобках и показатель степени обратны по величине и одинаковы по знаку, первое слагаемое в скобках равно 1.

Задача 1.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{2x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+3}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+4}{x+3}-1\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{1\cdot 2x}{x+3}}\right\}=$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x+3}}=e^{2}.$$

Пояснения. В основании степени прибавляем и вычитаем единицу. Затем приводим к общему знаменателю дробь и вычитаемую единицу. После пишем показатель степени $(x+3)$, обратный второй дроби и одинаковый с ней по знаку. Чтобы не изменилось значение данного выражения, домножаем этот показатель на обратный ему, т.е. на дробь $\dfrac{1}{(x+3)}$ и на тот показатель степени, который был в условии примера. При возведении в степень показатели перемножаются. Так как возводить в степень можно при любом порядке сомножителей, стоящих в показателе степени, то расставляем скобки, указывающие этот порядок. Переходим к пределу в основании степени и в показателе одновременно, получаем ответ. Здесь применяется правило предельного перехода для непрерывных функций:

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]=\left[\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)\right]^{\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\varphi(x)}.$$

Этим правилом можно пользоваться всегда, если пределы в основании степени и в показателе оба конечные и одновременно не равные 0, т.е. если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\varphi(x)=B$, и $A\neq 0$, $B\neq 0$ одновременно, то

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]=\left[\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}f(x)\right]^{\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\varphi(x)}=A^{B}.$$

Исключение составляют следующие случаи:

1. $A=1$, $B=\pm\infty$, $\left(1^{\pm\infty}\right)$.

2. $A=0$, $B=0$, $\left(0^0\right)$.

3. $A=\infty$, $B=0$, $\left(\infty^0\right)$.

Задача 1.11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$$

Пояснения. Домножаем данное выражение и делим на сопряженное ему. Приходим к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Раскрываем по правилу 1: $\sqrt{x^2+x}\sim\sqrt{x^2}$.

2. Непрерывность функции, точки разрыва, их классификация

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если в этой точке для нее справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. В этом определении содержатся три условия, которым должна удовлетворять непрерывная функция:*

а) функция в точке x_0 должна быть определена;

б) функция в точке x_0 должна иметь конечный предел;

в) этот предел должен совпадать со значением функции в точке $x=x_0$.

Если нарушено хотя бы одно из трех перечисленных условий, функция в точке x_0 будет разрывна. Разрыв может быть трех видов: разрыв I рода, II рода и разрыв III рода – «устранимый разрыв».

1. Разрыв I рода в точке x_0 будет в том случае, если функция не определена в точке $x=x_0$, но имеет конечные, различные односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=B$, $A\neq B$ (рис. 3а).

2. Разрыв III рода, так называемый «устранимый» разрыв, будет в том случае, если функция в точке x_0 не определена, но имеет одинаковые конечные односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A$ (рис. 3б).

3. Все точки разрыва, не относящиеся к точкам разрыва I и III рода, являются точками разрыва II рода. В этом случае оба односторонние пределы могут быть бесконечными или один из них конечный, а другой бесконечный или не существует. (рис. 3в, 3г).

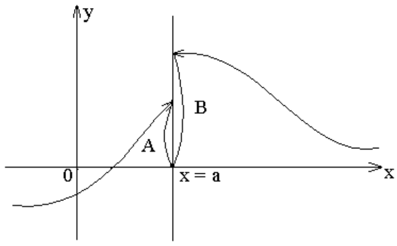

Рис. 3а

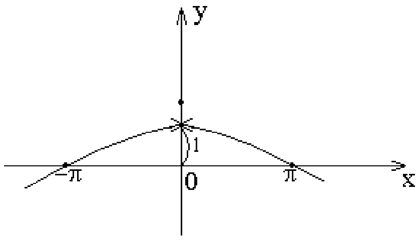

Рис. 3б

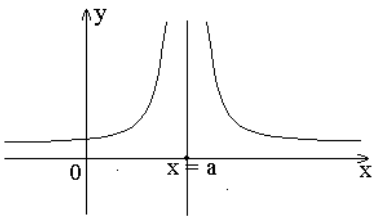

Рис. 3в

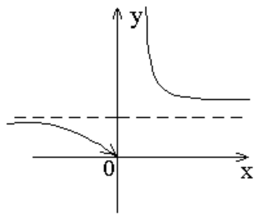

Рис. 3г

Задача 2.1. Задана функция $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ и два значения аргумента $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Требуется:

1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента;
2) в случае разрыва определить, какого он рода;
3) все рассуждения обосновать.

Решение. Исследуем точку $x = 2$.

1. Функция в точке $x = 2$ не определена (показатель степени не существует), а следовательно, разрывна (нарушено первое условие непрерывности).
2. Исследуем характер разрыва. Находим односторонние пределы в точке $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2-} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty. \qquad \lim_{x\to 2+} 3^{\frac{1}{2-x}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0.$$

Так как один из односторонних пределов бесконечный, то в точке x = 2 имеем разрыв II рода (рис. 4).

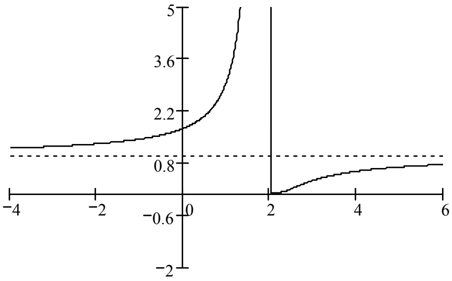

Рис. 4

Исследуем точку $x=3$.

1. Функция в точке $x=3$ определена, $y(3)=3^{\frac{1}{2-3}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}.$

2. Вычислим односторонние пределы в точке $x=3$.

$\lim\limits_{x\to 3-}3^{\frac{1}{2-x}}=3^{\frac{1}{2-3}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}.\qquad \lim\limits_{x\to 3+}3^{\frac{1}{2-x}}=3^{\frac{1}{2-3}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}.$

Так как функция в точке $x=3$ определена, то при вычислении односторонних пределов подставляем предельные значения аргумента. Так как односторонние пределы равны, то в точке $x=3$ функция имеет конечный предел, равный $\dfrac{1}{3}$.

3. Вычисленный предел совпадает со значением функции в точке $x=3$.

$y(3)=\lim\limits_{x\to 3}3^{\frac{1}{2-3}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}.$

Все три условия непрерывности выполнены, следовательно, функция в точке $x=3$ непрерывна (на рисунке 4 в точке $x=3$ разрыва нет).

Этим примером проиллюстрировали известную классическую теорему: «Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения». (Точка $x=3$ была выбрана произвольно, можно было это проверить и в другой точке из области определения).

3. Производная функции и ее приложения

Изучить по данной теме теорию, без которой невозможно решать предлагаемые задачи, и ознакомиться с понятием производной, с основными теоремами и правилами дифференцирования, с понятием дифференциала, можно по источникам: [3],[4],[5],[6],[9],[11],[13].

Пусть задана функция $y=f(x)$. Если придать приращение аргументу Δx, то и функция примет новое значение $f(x+\Delta x)$. Разность между новым и первоначальным значением функции называется ее приращением, которое обозначается Δy и вычисляется по формуле $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. (14)

Определение 1. *Если существует предел отношения приращения функции* Δy *к приращению аргумента* Δx, *при условии, что* $\Delta x \to 0$, *то его называют производной функции* y, *обозначают* y' *или* $\frac{dy}{dx}$ *и вычисляют по формуле:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (15)$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием. Функции, имеющие производные, называются дифференцируемыми.

3.1. Основные теоремы о производных

Если $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, имеют место равенства:

1) $\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x);$ (16)

2) $\left[u(x) \cdot v(x)\right]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$ (17)

3) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}. \quad (v(x) \neq 0);$ (18)

4) $\left[c \cdot u(x)\right]' = c \cdot u'(x).$ (19)

Замечание 1. *Формула (16) применяется для любого конечного числа дифференцируемых функций.*

Замечание 2. *Формула (18) применяется только тогда, когда* $v(x) \neq 0$.

3.2. Производная сложной функции

Если функция $y = f(u)$, *а* $u = \varphi(x)$, *тогда* $y = f\left[\varphi(x)\right]$, *т.е. функция* y *в конечном итоге зависит от* x, *а* u *- это промежуточная переменная. Если функция* $u = \varphi(x)$ *имеет производную в точке* x, *а функция* $y = f(u)$ *имеет производную в точке* u, *то и сложная функция* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ *имеет производную в точке* x, *т.е. существует* y'_x.

Правило дифференцирования сложной функции. *Если существуют производные* u'_x *и* y'_u, *тогда справедливо равенство:*

$$y'_x = \left[f(u)\right]'_x = f'_u \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_x., \qquad (20)$$

т.е. производная сложной функции равна произведению производной функции по промежуточной переменной на производную промежуточной переменной по независимой.

Так как производная сложной функции встречается чаще, то таблицу производных элементарных функций лучше сразу запоминать для сложного аргумента.

3.3. Таблица производных основных элементарных функций

1) $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

2) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$.

3) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$.

4) $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

5) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.

6) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

7) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.

8) $\left(tg\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

9) $\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

12) $\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

13) $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

14) $\left(c\right)' = 0$.

15) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

16) $\left(\dfrac{c}{u}\right)' = -\dfrac{c}{u^2} \cdot u'$.

Очень часто встречаются производные от квадратного корня и от дроби с постоянным числителем, поэтому удобно в этих случаях пользоваться формулами (15), (16).

Задача 3.1. Найти производную функции $y = \sin^3 2x$.

Решение. Эту функцию можно записать в виде $y = \left(\sin 2x\right)^3$. Это степенная функция со сложным основанием. Находим производную по формуле (1), затем по формуле (2).

$$y' = 3\left(\sin 2x\right)^2 \cdot \left(\sin 2x\right)' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

Задача 3.2. Найти производную функции $y = \ln \arcsin\left(1-e^{3x}\right)$.

Решение. Так как функция логарифмическая со сложным аргументом, то применяем формулу (6). $y' = \dfrac{1}{\arcsin\left(1-e^{3x}\right)} \cdot \left[\arcsin\left(1-e^{3x}\right)\right]' =$

Продолжаем дифференцировать по формуле (10).

$$=\frac{1}{\arcsin\left(1-e^{3x}\right)}\cdot\frac{1\cdot\left(1-e^{3x}\right)'}{\sqrt{1-\left(1-e^{3x}\right)^2}}=\frac{\left(0-e^{3x}\cdot 3\right)}{\arcsin\left(1-e^{3x}\right)\cdot\sqrt{1-\left(1-e^{3x}\right)^2}}=\frac{-3\cdot e^{3x}}{\sqrt{1-\left(1-e^{3x}\right)^2}\cdot\arcsin\left(1-e^{3x}\right)}$$

Задача 3.3. Найти производную функции $y=\frac{\cos^2 x}{x^2-1}$.

Решение. Находим производную от дроби по формуле (18).

$$y'=\frac{\left(\cos^2 x\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\cos^2 x\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2\cos x\left(-\sin x\right)\cdot\left(x^2-1\right)-\cos^2 x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=-\frac{\sin 2x\left(x^2-1\right)+2x\cdot\cos^2 x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Пояснение. В числителе дроби первое слагаемое упрощаем по формуле $2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

Метод логарифмического дифференцирования

Очень часто приходится дифференцировать функции вида $y=f\left(x\right)^{\varphi(x)}$ - это сложные показательно-степенные функции. В таблице производных нет формул для их дифференцирования. Чтобы найти производные от таких функций, применяется метод логарифмического дифференцирования. Суть его состоит в том, что сначала обе части равенства $y=f\left(x\right)^{\varphi(x)}$ логарифмируем по любому основанию, но лучше по основанию «е» (производные от натуральных логарифмов находятся проще). Затем обе части дифференцируем по аргументу x, при этом производную от y находим по правилу дифференцирования сложной функции.

Задача 3.4. Найти производную функции $y=\left(arctg\ x\right)^{\ln x}$.

Решение. Для нахождения производной применяем метод логарифмического дифференцирования.

$$\ln y=\ln x\cdot\ln arctg\ x. \qquad (*)$$

После логарифмирования дифференцируем обе части по x.

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}\cdot\ln arctg\ x+\ln x\cdot\frac{1}{arctg\ x}\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)}.$$

$$y'=y\cdot\left[\frac{\ln arctg\ x}{x}+\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)\cdot arctg\ x}\right]=\left(arctg\ x\right)^{\ln x}\cdot\left[\frac{\ln arctg\ x}{x}+\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)arctg\ x}\right].$$

Пояснения. Дифференцируем левую часть равенства по правилу дифференцирования сложной функции, т.к. y зависит от x. $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ (сначала по y, затем умножаем на производную y по x, т.е. y'). Правую часть дифференцируем как произведение. Затем из полученного равенства находим y'.В ответ подставляем y из условия задачи. Метод логарифмического дифференцирования применяется также при дифференцировании сложных произведений (сомножителей более двух) и громоздких дробей, содержащих несколько сомножителей в числителе и знаменателе дроби.

Замечание 3. *Если после логарифмирования сомножители вида* $f(x)^{\varphi(x)}$ *остались, логарифмируем обе части еще раз и т.д.*

Задача 3.5. Найти производную функции $y = x^{x^x}$.

Решение. Это функция показательно-степенная, поэтому логарифмируем обе части равенства.

$$\ln y = x^x \cdot \ln x.$$

Сомножитель вида $f(x)^{\varphi(x)}$ остался, поэтому логарифмируем обе части еще раз.

$$\ln\ln y = x \cdot \ln x + \ln\ln x.$$

(Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей). Дифференцируем по x обе части.

$$\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot \ln x}.$$

Из полученного равенства находим y'.

$$y' = y \cdot \ln y \cdot \left[\ln x + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln x} \right].$$

Вместо y и $\ln y$ подставляем их значения.

$$y' = x^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln x \cdot \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x \cdot \ln x} \right).$$

Дифференцирование неявных функций

Соотношение $F(x;y) = 0$ *определяет y как функцию от x следующим образом:* $y(x)$ *есть такое значение переменной y, которое вместе с данным значением x удовлетворяет условию* $F[x, y(x)] = 0$. *Иначе -* $y(x)$ *есть решение уравнения* $F(x;y) = 0$ *при фиксированном x. Такой способ задания* *функции $y(x)$ называется неявным заданием функции, а сама функция - неявной функцией. Следовательно, дифференцируем обе части равенства $F(x;y)=0$ как тождество.*

Таким образом, дифференцирование неявных функций проводится по тем же формулам и правилам, что для явных. При этом обе части нужно продифференцировать по х, считая у функцией от х. Поэтому производная от него находится по правилу дифференцирования сложной функции. Из полученного равенства выражаем y'.

Задача 3.6. Найти производную от функции $x^2 \cdot y + 2y^2 \cdot x = x + y$.

Решение. Это неявная функция, т.к. y не выражен через x. Дифференцируем по тем же формулам, что и явную, только производную от y находим по правилу дифференцирования сложной функции.

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 2\left(2y \cdot y' \cdot x + y^2\right) = 1 + y'.$$

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 4y \cdot y' \cdot x + 2y^2 = 1 + y'.$$

Слагаемые с y' переносим в одну сторону, без y' - в другую часть равенства. Группируем слагаемые с y' и находим производную из полученного равенства.

$$y'\left(x^2 + 4y \cdot x - 1\right) = 1 - 2xy - 2y^2. \quad y' = \frac{1 - 2xy - 2y^2}{x^2 + 4x \cdot y - 1}.$$

Задача 3.7. Найти производную от функции $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

Решение. Функция задана неявно. Дифференцируем обе части по x.

$$2^x \cdot \ln 2 + 2^y \ln 2 \cdot y' = 2^{x+y} \cdot \ln 2 \cdot \left(1 + y'\right).$$

Из полученного равенства выражаем y'.

$$2^x \cdot \ln 2 + 2^y \ln 2 \cdot y' = 2^{x+y} \cdot \ln 2 + 2^{x+y} \cdot \ln 2 \cdot y'.$$

$$y'\left(2^y \cdot \ln 2 - 2^{x+y} \cdot \ln 2\right) = 2^{x+y} \cdot \ln 2 - 2^x \cdot \ln 2.$$

(Сократили обе части на $\ln 2$).

$$y' = \frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}} = \frac{2^x + 2^y - 2^x}{2^y - 2^x - 2^y} = -\frac{2^y}{2^x} = -2^{y-x}.$$

Пояснения. При дифференцировании неявной функции часто упрощают ответ, исходя из условия задачи. В ответе 2^{x+y} заменим на $\left(2^x + 2^y\right)$ в числителе и знаменателе дроби. Преобразуем результат для того, чтобы производные более высокого порядка находить было проще.

При делении с одинаковыми основаниями показатели вычитаются.

3.4. Производная от функций, заданных параметрически

Если x и y являются функциями, зависящими от одного параметра t, то это задание называется параметрическим:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sin t; \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$$

Производная от таких функций y'_x находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{21}$$

Задача 3.8. Найти производную от функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \ln t; \\ y = arctg\ t. \end{cases}$$

Решение. Применяем формулу (21).

$$x'_t = \frac{1}{t}; \quad y'_t = \frac{1}{1+t^2}; \quad y'_x = \frac{1 \cdot t}{\left(1+t^2\right)}.$$

Если производную первого порядка продолжать дифференцировать дальше, то, применяя правило дифференцирования сложной функции, получим производную второго порядка. Производная первого порядка зависит от параметра t. Для нахождения производной второго порядка нужно производную первого порядка y'_x продифференцировать по правилу дифференцирования сложной функции, т.е.

$$y''_x = \left[y'_x(t) \right]'_x = \left(y'_x \right)'_t \cdot t'_x = \frac{\left(y'_x \right)''_t}{x'_t}, \tag{22}$$

т.к. $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$ по правилу дифференцирования обратной функции $\Big[$ $(t(x)$ и $x(t)$- взаимно обратные $\Big]$.

Таким образом, можно получать производные более высокого порядка y'''_x и т.д.

Задача 3.9. Найти y''_x от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t + \sin t; \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Решение. $y'_t = \cos 2t \cdot 2;$ $\quad x'_t = -\sin t + \cos t.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{\cos t - \sin t} = \frac{2\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)}{\cos t - \sin t} = \frac{2\left(\cos t - \sin t\right)\left(\cos t + \sin t\right)}{\cos t - \sin t} = 2\left(\cos t + \sin t\right).$$

Пояснение. В числителе дроби $\cos 2t$ разлагаем по формуле $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$ Затем разлагаем $\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) = (\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)$ и сокращаем дробь.

$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ вычисляем по формуле (22)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left[2\left(\cos t+\sin t\right)\right]'_t}{\cos t-\sin t}=\frac{2\left(-\sin t+\cos t\right)}{\cos t-\sin t}=2\ .$$

3.5. Приложения производной. Геометрический смысл производной

Численное значение производной в точке $y'(x_0)$ *равно угловому коэффициенту касательной, проведенной в точке* x_0 *к графику функции* $y=f(x)$ *с положительным направлением оси* OX *, т. е* $k=y'(x_0)$*. В этом заключается геометрический смысл первой производной. Это используется для составления уравнения касательной* $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$*, где* $k=y'\left(x_0\right)$*,* $\left(x_0;y_0\right)$ *- координаты точки касания. Тогда уравнение касательной примет вид:*

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0) \tag{23}$$

Задача 3.10. Составить уравнение касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Находим ординату точку касания: $y_0=1+\sqrt{1^3}=2$. Для этого подставляем $x_0=1$ в уравнение кривой $y=x+\sqrt{x^3}$. Точка касания $M_0(1;2)$.

Для нахождения уравнения касательной нужно знать угловой коэффициент $k=y'\left(x_0\right)$. Находим производную y' и вычисляем ее в точке $x_0=1$.

$y'=\left(x+\sqrt{x^3}\right)'=1+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}.$ $\qquad y'\left(1\right)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, т.е. $k=\frac{5}{2}$.

Подставляем $M_0(1;2)$ и $y'\left(1\right)=\frac{5}{2}$ в уравнение (23).

$y-2=\frac{5}{2}\left(x-1\right)\Rightarrow 2y-4=5x-5\Rightarrow 5x-2y-1=0$ - это уравнение касательной.

Применение производных к вычислению пределов. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя:
Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$*:*

1) *определены в промежутке* $\left(a;b\right]$*,*
2) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$ *или* $\left[\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=\infty\right]$*,*

3) существуют в промежутке $(a;b]$ конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x)\neq 0$, тогда если существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, и они между собой равны, т.е.

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{24}$$

Замечание 4. *Теорема остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ одновременно стремятся к 0 или ∞ при $x\to\pm\infty$, а так же при $x\to a-0$ и $x\to a$.*

Если отношение производных $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ опять представляет собой неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то можно правило Лопиталя применить к отношению вторых, третьих и т.д. производных.

Замечание 5. *Правило Лопиталя является достаточным условием существования предела $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$. Но если предел отношения производных не существует, то это не значит, что предел отношения функций $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ тоже не существует. Этот предел может существовать независимо от $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, только его нельзя вычислить по правилу Лопиталя, а нужно вычислять другим методом.*

Если имеются неопределенности $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$,(1^∞),(0^0),(∞^0), то их следует с помощью эквивалентных преобразований привести к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и затем применить правило Лопиталя.

Задача 3.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$, применяя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{3}{e}$.

Задача 3.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{x-\sin x}$, применяя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{x-\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(tg\,x-x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\left(1-\cos x\right)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{\left(1-\cos x\right)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2\,.$$

Пояснения. Применив правило Лопиталя, нужно выполнить эквивалентные преобразования, упростить выражение, только после этого применять его далее. В данном примере в числителе дроби привести к общему знаменателю, выполнить деление, разложить на множители числитель. После сокращения неопределенность исчезла, поэтому сразу подставляем предельное значение аргумента.

Задача 3.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, применяя правило Лопиталя.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\right)'}{\left(6x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

В данном примере правило Лопиталя применено три раза.

Задача 3.14. Найти, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\,4x\right)$ применяя правило Лопиталя.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\,4x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg\,4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x\right)'}{\left(tg\,4x\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1\cdot 4}{\cos^2 4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 4x}{4}=\frac{1}{4}.$$

Пояснение. Правило Лопиталя применяется в случае неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, поэтому преобразуем эту неопределенность к $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, записав это произведение в виде эквивалентной ему дроби, заменив $ctg\,4x=\dfrac{1}{tg4x}$, т.к. они взаимно обратны, затем применяем правило Лопиталя.

В случае неопределенностей $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$ или $\left(1^\infty\right)$ применяют метод логарифмирования, т.е. вычисляемый предел обозначают через новую переменную, затем обе части логарифмируют.

Задача 3.15. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{5}{x}\right)^x$, применяя правило Лопиталя.

Решение. Обозначим вычисляемый предел за y.

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{5}{x}\right)^x.$$

Имеем неопределенность $\left(1^\infty\right)$. Логарифмируем это равенство по любому основанию, но лучше по основанию «е».

$$\ln y=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{5}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(\cos\frac{5}{x}\right)^x\right]==\lim_{x\to\infty}\left[x\cdot\ln\cos\frac{5}{x}\right]=\left(\infty\cdot 0\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{5}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(\cos\frac{5}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\sin\frac{5}{x}\right)\left(-\frac{5}{x^2}\right)}{\cos\frac{5}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{5}{x}\cdot 5}{\cos\frac{5}{x}}=0.$$

Пояснения. После логарифмирования в правой части меняем местами символ функции и предела (на основании свойств непрерывной функции), затем логарифмируем степень и приходим к неопределенности $\left(\infty\cdot 0\right)$. Записываем это произведение в виде эквивалентной ему дроби, после этого применяем правило Лопиталя. Выполнив простейшие алгебраические преобразования, переходим к пределу и получаем равенство: $\ln y=0$. Решая простейшее логарифмическое уравнение, имеем $y=e^0=1$. Так как за y обозначили предел, то имеем ответ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{5}{x}\right)=1.$$

Задача 3.16. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sin x\right)'}{\left(x+\sin x\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

Предел Не существует.

Пояснения. Правило Лопиталя не работает, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ не существует, поэтому в числителе и в знаменателе пределы не существуют, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует. Но сам предел вычисляется просто без правила Лопиталя, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

($\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, т.к. ограниченная функция, деленная на бесконечно большую, становится бесконечно малой, пределом которой является 0). Этот пример иллюстрирует замечание 5.

Замечание 6. Применяя n раз правило Лопиталя, можно показать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n}{e^x}=0$, т.е. многочлен любой степени растет медленнее показательной функции.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), названия дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату её выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго в соответствии с номером варианта. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи иного варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью написать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует переписывать условие задачи, заменив общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера. Например, условие задачи 1 должно быть переписано так:

   1. Даны векторы $\bar{a}$=(1; 2; 3), $\bar{b}$=(-1; 3; 2), $\bar{c}$=(7; -3; 5), $\bar{d}$=(6; 10; 17;) *в некотором базисе. Показать*… и т. д.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения, сделать необходимые чертежи и написать формулы, используемые при решении.

7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения задач какие-либо исправления или дополнения и прислать их для

повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. В случае незачета работы и отсутствия прямого указания на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново. При высылаемых исправлениях обязательно должна находиться проверенная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Список литературы

1. Агафонова В.Н. Высшая математика в задачах. – Курган: КГУ, 2006. - Ч.1.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1969.
5. Вержбалович Т.А., Самойлова Л.В. Основы дифференциального исчисления функций одной переменной: Методические указания. – Курган: КГУ, 2010.
6. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980. – Ч. 1.
7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1962.
8. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по матанализу. – М.: Высшая школа, 1966.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Наука, 1970. – Т.1.
10. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М .: Наука, 1964.
11. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Высшая школа, 1972.
12. Руководство к решению задач по высшей математике/ Под общей ред. Е.И. Гурского. – Минск: Высшая школа, 1989. – Ч.1.
13. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1978. – Т.1.

Агафонова Валентина Николаевна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ
специальностей
151900.62, 220700.62, 280000.62, 221700.62, 150700.62, 222000.62, 190100.62, 190600.62, 140400.62, 190700.62

I курс I семестр

Редактор А.С. Мокина

Подписано в печать	Формат 60х 84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 3,25	Уч.-изд. л. 3,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.