Министерство образования и науки Российской Федерации
Курганский государственный университет
Кафедра «Экономическая теория и моделирование экономических процессов»

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Методические указания
к выполнению практических и самостоятельных заданий
для студентов направлений 080200.62 «Менеджмент»,
081100.62 «Государственное и муниципальное управление»
и специальности 036401.65 «Таможенное дело»
очной формы обучения

Курган 2012

Кафедра экономической теории и моделирования экономических процессов

Дисциплина: «Математика» (направления: 080200.62, 081100.62;
специальность 036401.65)

Составила: канд. техн. наук, доцент Л.А. Трофимова

Утверждены на заседании кафедры «13» февраля 2012 г.

Рекомендованы методическим советом университета «25» мая 2012 г.

Введение

В методических указаниях «Математика. Часть 1» задания составлены в соответствии с программой по курсу «Математика» для студентов направлений 080200.62 «Менеджмент», 081100.62 «Государственное и муниципальное управление», для студентов специальности 036401.65 «Таможенное дело» очной формы обучения.

В части 1 методических указаний рассматриваются следующие разделы:

- **Матрицы и определители.** Матрицы. Действия над матрицами. Вычисление определителей двумя способами: а) методом Сарриуса; б) методом разложения по строке. Вычисление миноров и алгебраических дополнений.
- **Системы линейных алгебраических уравнений.** Решение систем линейных уравнений двумя способами: а) используя формулы Крамера; б) методом Гаусса. Исследование систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Обратная матрица. Решение матричных уравнений.
- **Линейные экономико-математические модели.** Введение в математическое моделирование. Предмет математического моделирования. Виды моделей, математическое программирование. Решение систем и линейных неравенств с двумя переменными. Графический метод решения задач линейного программирования. Транспортная задача. Алгоритм решения транспортной задачи. Переход от одного опорного решения к другому. Пример решения транспортной задачи. Вырожденность в транспортных задачах.
- **Векторная алгебра.** Элементы векторной алгебры. Векторы. Координаты векторов. Направляющий косинус векторов. Линейные операции с векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис пространства. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение (векторно-скалярное).

Для удобства изучения предлагаемого материала каждый раздел разбит на тематические занятия с примерами или задачами для самостоятельного решения.

1 Матрицы и определители

Занятие 1 Матрицы. Действия над матрицами

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mi} & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Краткая запись матрицы: $A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$

Определение. Суммой (разностью) матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме (разности) соответствующих элементов матриц A и B.

$$A = \left\| a_{ij} \right\|; B = \left\| b_{ij} \right\|; C = A + B \Rightarrow C = \left\| c_{ij} \right\| = \left\| a_{ij} \pm b_{ij} \right\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Определение. Транспонированием матрицы называется замена строк матрицы на ее столбцы с сохранением их порядка.

$$A = \left\| a_{ij} \right\|; \; A^{\mathrm{T}} = \left\| a_{ji} \right\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Определение. Произведением матриц A = (m×n) и B = (n×k) называется матрица C = (m×k), элементы которой определяются по формуле:

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i - \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \qquad \text{если } A = \left(a_{is} \right); \quad B = \left(b_{sj} \right).$$

Примеры для самостоятельного решения

Пример 1

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Найти: 1) (A × B) × C; 2) A × (B × C). *Ответ:* 1) $\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$.

Пример 2

Дано: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$ Найти: 1) A × B; 2) B × A.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$.

Пример 3

Дано: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти: 1) A × B; 2) B × A.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}3 & 11\\ 2 & 17\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}21 & -7 & 35\\ 15 & -1 & 20\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Пример 4

Дано: $A=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Найти: 1) A × B; 2) B × A.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ 20 & -8 & 12\\ 10 & -4 & 6\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}13\end{pmatrix}$.

Пример 5

Дано: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix}$. Найти: 1) A + B; 2) B - A.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}8 & 10\\ 12 & 14\\ 16 & 18\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}6 & 6\\ 6 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}$.

Пример 6

Дано: $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 12 & -8\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$. Найти: 1) A × B; 2) B ×A.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$; 2) нельзя.

Пример 7

Дано: $A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{4} \\ 4 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Найти: 1) B × A; 2) A × B.

Ответ: 1) нельзя; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 8

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ 8 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Найти: 1) A + B; 2) A – B.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 11 & 11 \\ 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 9

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Найти: A × B.

Ответ: $\begin{pmatrix} 14 & 28 \\ 32 & 77 \\ -14 & -32 \end{pmatrix}$.

Пример 10

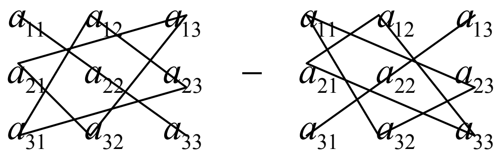
Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Найти: A × B.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Занятие 2 Вычисление определителей двумя методами:
а) методом Сарриуса;
б) методом разложения по строке.
Вычисление миноров и алгебраических дополнений

Определение. Определитель – это число, полученное по определенному правилу.

а) Метод (правило) Сарриуса:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} \right).$$

$$\Delta = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-\left(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12} \right).$$

б) Метод разложения по строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12}\left(-1\right)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13}\left(-1\right)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{1n}\left(-1\right)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Пример 1 $\left|-5\right| = ?$ *Ответ:* -5.

Пример 2 $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* -8.

Пример 3 $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* 104.

Пример 4 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* 24.

Пример 5 $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* 12.

Пример 6 $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* 24.

Пример 7 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* -18.

Пример 8 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* 27.

Пример 9 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$ *Ответ:* -207.

Пример 10 Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ *Ответ:* -10; 2.

2 Системы линейных алгебраических уравнений

Занятие 3 (1) Решение системы линейных алгебраических уравнений, используя формулы Крамера или метод Гаусса

Определение. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Элементарные преобразования:

1) вычеркивание нулевой строки;
2) перестановка строк;
3) линейная комбинация строк;
4) удаление одинаковых строк кроме одной.

Формула Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_m & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}. \qquad \boxed{x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta};}$$

Метод Гаусса основан на элементарных преобразованиях.

Примеры для самостоятельного решения

Решить систему линейных уравнений двумя способами:
а) используя формулы Крамера;
б) методом Гаусса.

Пример 1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -3, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Пример 3

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = 2, \\ x - y + 3z = 0. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}, \\ y = 0, \\ z = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Пример 4

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = -12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = -12. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Пример 5

$$\begin{cases} 15x_1 - 13x_2 + x_3 = 1, \\ 17x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 20x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + -3x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = -2. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

Пример 7

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 25x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 11x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 8

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 = 0. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 9

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 18. \end{cases} \qquad \textit{Ответ}: \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Пример 10

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 7. \end{cases} \qquad Ответ: \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -1. \end{cases}$$

Занятие 3 (2) Исследование систем линейных уравнений. Ранг матрицы

Определение. Ранг матрицы A - максимальный порядок неравного нулю минора (минор - определитель квадратной матрицы $k \times k$, $k \le n$). Обозначается $r(A)$.

Определение. Минор, определяющий ранг матрицы, называется *базисным минором* (БМ). Строки и столбцы, формирующие БМ, называются базисными строками и столбцами.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

$r(A) = r\left(\overline{A}\right) = n \Rightarrow \exists$ - единственное решение.

$r(A) = r\left(\overline{A}\right) < n \Rightarrow \exists$ - множество решений.

$r(A) = r\left(\overline{A}\right) \qquad \Rightarrow$ - система несовместна.

Определение. Линейная система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений.

Определение. Совместная линейная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Примеры для самостоятельного решения

Исследовать систему линейных уравнений. Определить ранг матрицы.

Пример 1 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=14, \\ 3x_1+2x_2+x_3=10, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=5, \\ x_1+x_2=3. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}: r(A)=r(\overline{A})=n=3;$ $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=3. \end{cases}$

Пример 2 $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1. \end{cases}$

$\mathit{Ответ}: r(A)=r(\overline{A})=2;\quad n=4;$ $\begin{cases} x_3=x_3, \\ x_4=x_4, \\ x_2=\dfrac{2}{11}-\dfrac{6}{11}x_3-\dfrac{7}{11}x_4, \\ x_1=-\dfrac{6}{11}x_4+\dfrac{8}{11}x_3-\dfrac{1}{11}. \end{cases}$

Пример 3 $\begin{cases} 3x_1+2x_2=4, \\ x_1-4x_2=-1, \\ 5x_1+6x_2=8, \\ 3x_1-16x_2=-5. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}: r(A)=r(\overline{A})=2;\quad n=2;$ $\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Пример 4 $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3=1, \\ 2x_1+10x_2+8x_3=3, \\ 3x_1+15x_2+12x_3=5. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}: r(A)\neq r(\overline{A})\Rightarrow\varnothing-\mathit{нет\ решений}.$

Пример 5 $\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=-1, \\ x_1+9x_2+6x_3=3, \\ x_1+3x_2+4x_3=2. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}: r(A)=r(\overline{A})=2;\ n=3;$ $\begin{cases} x_3=x_3, \\ x_2=-\dfrac{1}{3}x_3+\dfrac{1}{6}, \\ x_1=-3x_3+\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

Пример 6 $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=2, \\ 2x_1-3x_2+3x_3=3, \\ 4x_1+x_2-x_3=8. \end{cases}$

$\mathit{Ответ}: r(A)=2;\quad r(\overline{A})=3;\quad \varnothing-\mathit{нет\ решений}.$

Пример 7 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ $\quad$ $Ответ: \begin{cases} x_1 = 14x_4, \\ x_2 = 21x_4, \\ x_3 = x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$

Пример 8 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ $\quad$ $Ответ: r(A) = r(\overline{A}) = n = 3; \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Пример 9

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$ $\quad$ $Ответ: r(A) = 3; \quad r(\overline{A}) = 4; \ \varnothing - нет\ решений.$

Пример 10 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$ $\quad$ $Ответ: r(A) = r(\overline{A}) = n = 4; \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

Занятие 3 (3) Обратная матрица. Решение матричных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}.$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=M_{13}.$$

…………………………………………………………………………………

$$M_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A_{nn}=(-1)^{n+n}\cdot M_{nn}.$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}.$$

Система линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$A\times X=B, \qquad \text{где} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad X=A^{-1}\times B.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить обратную матрицу и решить систему линейных уравнений, составляя матричное уравнение.

Пример 1 $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x-y+\ \ z=1. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=-8;\quad A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Пример 2 $\begin{cases} x_1+4x_2-5x_3=8, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=9, \\ x_1-2x_2-x_3=6\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=16;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -11 & 14 & -1 \\ -2 & 4 & -6 \\ -7 & 6 & -5 \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Пример 3 $\begin{cases} x_1+2x_2-\ x_3=3, \\ 5x_1+12x_2-2x_3=-1, \\ 4x_1+9x_2-\ 2x_3=2\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=1;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & -5 & 8 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Пример 4 $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ x+y-\ z=0, \\ 4x-y+5z=3. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=-11;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -11 & -3 \\ -9 & 11 & 4 \\ -5 & 11 & 1 \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Пример 5 $\begin{cases} 2x_1+\ x_2-\ \ x_3=5, \\ x_1-2x_2+2x_3=-5, \\ 7x_1+\ x_2-\ \ x_3=10\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=0;\quad \varnothing$ - нет решений.

Пример 6 $\begin{cases} 4x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+8x_2-x_3=8, \\ 9x_1+x_2+8x_3=0\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=0;\quad \varnothing$ - нет решений.

Пример 7 $\begin{cases} 5x_1-3x_2+\ x_3=1, \\ 7x_1+5x_2+2x_3=2, \\ 4x_1-5x_2+3x_3=3\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=109;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 25 & 4 & -11 \\ -13 & 11 & 3 \\ -55 & 13 & 16 \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Пример 8 $\begin{cases} x_1+2x_2-\ x_3=0, \\ 7x_1+2x_2-7x_3=0, \\ 8x_1+2x_2-8x_3=0\,. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=0;\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$

Пример 9 $\begin{cases} x+y+z=6, \\ y-x+z=4, \\ z+x-y=2. \end{cases}$ $\mathit{Ответ}:\Delta=4;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\quad x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Пример 10 $\begin{cases} x+y=15, \\ x-z=3, \\ y-z=8. \end{cases}$ $\qquad Ответ: \Delta = 2; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$

3 Линейные экономико-математические модели

Занятие 4 Введение в математическое моделирование. Предмет математического моделирования. Виды моделей, математическое программирование

Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки. Современная экономика использует специальные методы оптимизации, составляющие основу математического программирования, теории игр, сетевого планирования, теории массового обслуживания и других прикладных наук. Направления планирования являются наиболее сложными функциями в работе фирм, предприятий.

В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономичный. Задачу управления и планирования сводится обычно к выбору некоторой системы параметра и системы функции, которые приводят к экстремальным задачам следующего вида.

Задача
$$\begin{aligned} & f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max, \\ & g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \ge 0, \\ & x_j \ge 0; \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \end{aligned}$$

где: x_j, g_i - функции; $x_1, x_2, ..., x_n$ - параметры уравнения; f – функция цели.

Всё остальное - ограничения задачи.

Определение. Натуральное программирование - математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных задач управления, планирования и разработкой методов их решения. Задачи на экстремум решались в курсе математического анализа в теме «Дифференциальное исчисление».

Виды моделей. Математическое программирование

1 Целочисленное программирование.
2 Параметрическое программирование.
3 Выпуклое программирование.

4 Математические методы теории игр.
5 Динамическое программирование.
6 Сетевые модели (сетевое планирование).
7 Система массового обслуживания.
8 Модель управления запасами.

Определение. Математической моделью экономической задачи называют математическое выражение целевой функции и её ограничений.

Общий вид математической модели задачи линейного программирования: $L\left(\bar{x}\right)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \max,\left(\min\right)$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_2+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=b_i, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_n, \end{cases}$$

где: $x_j \ge 0;\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$; a_{ij}, b_i, c_j – постоянные величины.

Краткая запись: $L\left(\bar{x}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to$ max (min).

Определение. Линейное программирование – наука о методах исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Допустимым решением (планом) задачи линейного программирования называется вектор $\bar{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, удовлетворяющий системе ограничений: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\quad x_j \ge 0;\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$

Множество допустимых решений образуют область допустимых решений (ОДР).

Определение. Оптимальным решением задачи линейного программирования называется допустимое решение, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения.

Определение. Опорным решением называется базисное, допустимое решение.

Математическая модель задачи линейного программирования может быть канонической и неканонической.

Определение. Модель называется канонической, если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные.

Определение. Модель называется неканонической, если, хотя бы одно ограничение, является неравенством. Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, вводят в каждое неравенство балансовую переменную x_{n+1}. Если знак неравенства меньше либо равен нулю, то знак балансовой переменной будет «+» ; если знак неравенства больше либо равен нулю, то балансовая переменная будет со знаком «-» .

Решение систем и линейных неравенств с двумя переменными

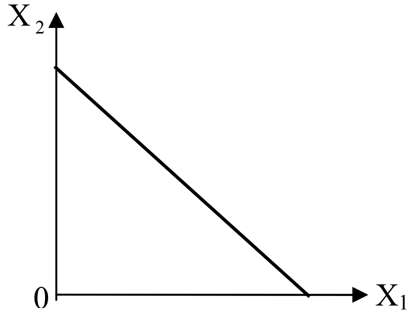
Пусть дана система m линейных неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \le 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \le 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + b_m \le 0. \end{cases}$$

Знаки некоторых или всех неравенств могут быть больше или равны нулю.

Рассмотрим первое неравенство.

В системе координат (X_1OX_2) построим прямую $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b = 0$.



Прямая поделит плоскость на две полуплоскости.

Определение. Решением системы каждого неравенства является полуплоскость, содержащая граничную прямую и расположенная по одну сторону от этой прямой.

Областью решения системы называется пересечение полуплоскостей, каждая из которых определяется соответствующим неравенствам системы.

Определение. Область решений систем, удовлетворяющая условию неотрицательности, называют областью неотрицательных или допустимых значений.

Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод самый простой и наглядный. Для нахождения экстремальных значений целевой функции при графическом решении задачи линейного программирования используется вектор (градиент) $gradL(x)$ на плоскости X_1OX_2.

Этот вектор показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции $\overline{gradL(\overline{x})} = \overline{c} = L'_{X_1}\overline{e}_1 + L'_{X_2}\overline{e}_2$,

где: $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ - единичные векторы по осям OX_1 и OX_2, соответственно.

Алгоритм решения задач линейного программирования

1 Находим ОДР системы ограничений задачи.

2 Строим вектор $\overline{c}$.

3 Проводим линию уровня L_0, которая перпендикулярна вектору $\overline{c}$.

4 Линию уровня перемещаем по направлению вектора $\overline{c}$ для задач на max и в направлении, противоположном вектору $\overline{c}$, для задач на min (перемещаем параллельно самой себе).

Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с ОДР. Эта точка, определяющая единственное решение задачи линейного программирования, будет точкой экстремума. Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача линейного программирования будет иметь бесконечное множество решений. Говорят, что такая задача линейного программирования имеет альтернативный оптимум и её решение находится по формуле:

$$\overline{X}_{опт} = (1-t)\overline{X}_1 + t\overline{X}_2,$$

где: $0 \le t \le 1$, $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ - оптимальные решения в угловых точках ОДР.

Если ограничения противоречивы, то задача линейного программирования не разрешима.

5 Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней. Задача решена.

Транспортная задача

Транспортная задача одна из распространённых задач линейного программирования. Её цель – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение дальних, встречных, повторных перевозов.

Задача. Пусть в m пунктах производства $A_1, A_2, \dots, A_m$ имеется однородный груз в количествах $a_1, a_2, \dots, a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$ в количествах $b_1, b_2, \dots, b_n$. Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j будем обозначать C_{ij}. Требуется составить план перевозки, позволяющий вывести все грузы с минимальными затратами.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нём, транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

Определение. Если запасы равны потребностям, задача называется *закрытой*: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется *открытой*.

Пусть x_{ij} – количество груза, перевозимое из пункта A_i в пункт B_j. Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Условие задачи записывается в таблицу 1.

Таблица 1

B_j A_i	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
A_1 a_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1j} X_{1j}	…	C_{1n} X_{1n}
A_2 a_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2j} X_{2j}	…	C_{2n} X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i a_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	…	C_{ij} X_{ij}	…	C_{in} X_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_m a_m	C_{1m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mj} X_{mj}	…	C_{mn} X_{mn}

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \textit{при} \quad \textit{ограничениях} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,\mathrm{m}}, \ j = \overline{1,\mathrm{n}}.$$

Оптимальным решением задачи является матрица $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n}$, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

Алгоритм решения транспортной задачи

1 Нахождение исходного опорного решения.
2 Проверка этого исходного решения на оптимальность.
3 Переход от одного опорного решения к другому.
4 Нахождение исходного опорного решения.

Клетки таблицы, в которые поместили грузы, называются занятыми. Им соответствуют базовые переменные опорного решения. Пустым клеткам соответствуют свободные переменные. Тариф записывается в верхнем правом углу каждой клетки. Используем метод минимального тарифа (элемента). По этому методу грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находятся минимальный тариф перевозок C_{ij}. Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учётом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжается до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будет вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться клеток меньше чем *(m+n-1)*, в таком случае недостающее их число заполняются клетками с нулевыми поставками. Такие клетки называются *условно занятыми*. Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учётом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце было не менее чем по 1-ой занятой клетке.

Пример. На складах A_1, A_2, A_3 запасы продукции 90 т, 400 т, 110 т. Потребители B_1 B_2 B_3 должны получить эту продукцию в количестве 140 т, 300 т, 160 т. Нужно организовать перевозку, чтобы сумма затрат была минимальной. Перевозка 1 т продукции задана матрицей стоимости $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ в условных единицах.

Решение. Проверим, является ли эта задача закрытой.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600\,(у.е.), \quad \sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600\,(у.е.).$$

Так как $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$, то задача является закрытой.

Найдем исходное опорное решение по методу минимального тарифа (таблица 2).

Таблица 2

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3
		140	300	160
A_1	90	2 90	5	2
A_2	400	4	1 300	5 100
A_3	110	3 50	6	8 60

Число занятых клеток в таблице 2 равно $m+n-1=3+3-1=5$, т.е. условие невырожденности выполнено. Получили исходное опорное решение, которое запишем в виде матрицы: $X_1=\begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}$.

Стоимость перевозки при исходном опорном решении составляет

$L(X)=2\times 90+1\times 300+5\times 100+3\times 50+8\times 60=1610$ (у.е.).

Проверка найденного опорного решения на оптимальность

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система $m+n$ действительных чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям $u_i+v_j=c_{ij}$ для занятых клеток и $u_i+v_j-c_{ij}\le 0$ - для свободных клеток.

Числа u_i и v_j называют *потенциалами.* В распределительную таблицу добавляют строку V_j и столбец U_i. Потенциалы u_i и v_j находят из равенства $u_i+v_j=c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $u_i=0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал u_i, то $v_j=c_{ij}-u_i$, если известен потенциал v_j, то $u_i=c_{ij}-v_j$.

Определение. Оценка $\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$ называется оценкой свободных клеток.

Если $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij} > 0$, то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного решения к другому.

В таблицу 2 добавим столбец U_i и строку V_j.

Таблица 3

B_j / A_i		B_1	B_2	B_3	U_i
		140	300	160	
A_1	90	2 90	5	2	0
A_2	400	4	1 300	5 100	-2
A_3	110	3 50	6	8 60	1
V_j		2	3	7	

Рассмотрим занятую клетку (3,1): из условия $u_3 + v_1 = 3$ получим $u_3 = 1$. Для клетки (3,3): $u_3 + v_3 = 8$, $v_3 = 7$; для клетки (2,3): $u_2 + v_3 = 5$, $u_2 = -2$; для клетки (2,2): $u_2 + v_2 = 1, v_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу 3. Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,\ \Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 2 - 4 = -4 < 0,\ \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

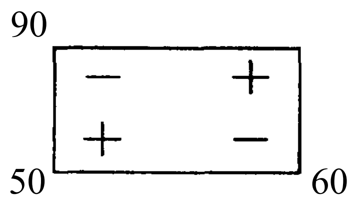
Переход от одного опорного решения к другому

При переходе от одного опорного решения к другому надо перераспределить грузы, перемещая эти грузы из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток - свободной.

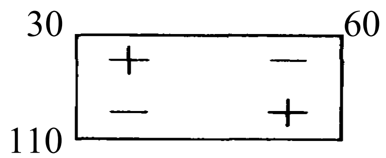
Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь-многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках. Углы прямые, число вершин чётное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим переход от одного опорного решения к другому на заданном примере.

По таблице 3 построим цикл для клетки, имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (-) и записываем грузы:



У вершин со знаком (-) выбираем минимальный груз, он равен 60. Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин, и отнимаем от грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл:



Новое опорное решение: $X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную таблицу, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток (таблица 4).

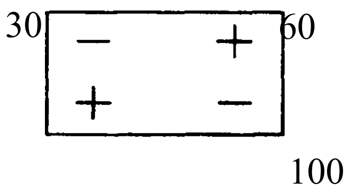
Имеем:

$$\Delta_{12} = -7 < 0, \ \ \Delta_{21} = 1 > 0, \ \ \Delta_{32} = -7 < 0, \ \ \Delta_{33} = -5 < 0 .$$

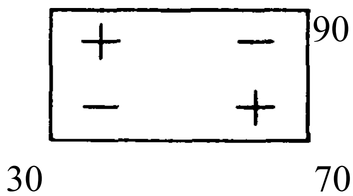
Таблица 4

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	U_i
		140	300	160	
A_1	90	2 30	5	2 60	0
A_2	400	4	1 300	5 100	3
A_3	110	3 110	6	8 0	2
V_j		2	-2	2	

Построим цикл для клетки с положительной оценкой $\Delta_{21} = 1 > 0$:



Произведем перераспределение грузов:



Получим новое решение, которое занесем в таблицу 5. Проверим его на оптимальность. Получим: $\Delta_{11} = -1$, $\Delta_{12} = -1$, $\Delta_{32} = -6$, $\Delta_{33} = -4$.

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Итак,

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов равна:

$L(X)_{\min} = 90 \times 2 + 30 \times 4 + 300 \times 1 + 70 \times 5 + 110 \times 3 = 1280$ (у.е.).

По сравнению с исходным опорным решением транспортные расходы уменьшились на 330 у.е. $(1610-1280=330)$.

Таблица 5

A_i \ B_j		B_1	B_2	B_3	U_i
		140	300	160	
A_1	90	2	5	2 90	0
A_2	400	4 30	1 300	5 70	3
A_3	110	3 110	6	8	2
V_j		1	-2	2	

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1 На трех станках обрабатываются детали двух видов (А и Б), причем, каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известно время обработки детали на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль от продажи одной детали каждого вида. Все данные приведены в таблице.

Станки	Время обработки деталей, ч		Время работы станка за цикл производства, ч
	А	Б	
I	1	2	16
II	1	1	10
III	3	1	24
Прибыль на 1 деталь	4 тыс. р.	2 тыс. р.	

Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Задача 2 Определить максимальное значение целевой функции $z=x_1+2x_2$ при ограничениях $\begin{cases} x_1+x_2\le 6, \\ x_1\le 4, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$

Задача 3 (транспортная задача). На 3-х складах имеется мука в количестве $(60,\ 150,\ 90)$ тонн, которая должна быть доставлена хлебозаводам в количестве (30, 80, 60, 110) тонн.

Стоимость перевозки одной тонны муки задана матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 15 & 4 \\ 9 & 15 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Задача 4 (транспортная задача). Фирма осуществляет поставку бутылок на 4 завода, занимающихся производством напитков. У фирмы 3 склада: на первом складе 6000 бутылок, на втором – 3000 бутылок, на третьем - 4000 бутылок.

Необходимо поставить бутылок: на первый завод – 4000, на второй – 5000, на третий - 1000, на четвертый – 3000.

Стоимость перевозки одной бутылки задана матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Как следует организовать поставку, чтобы стоимость была минимальной?

4 Векторная алгебра

Занятие 5 Векторы. Координаты векторов. Направляющий косинус векторов. Линейные операции с векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис пространства. Разложение вектора по базису

Определение. Скалярная величина – это величина, характеризующаяся лишь своим числовым значением.

Определение. Векторная величина – это величина, характеризующаяся не только числовым значением, но и направлением (сила, скорость). Векторная величина изображается направленным отрезком, который называется вектором.

Определение. Начальной точкой вектора называется точка приложения вектора.

Определение. Длиной вектора называется его модуль.

Определение. Нулевой вектор – это вектор, начальная точка которого совпадает с конечной точкой; нулевой вектор не имеет направления.

Определение. Коллинеарные вектора – это вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Вектора называются равными, если сонаправлены и имеют одинаковую длину.

$$\overline{a} = \overline{в} \Leftrightarrow \left|\overline{a}\right| = \left|\overline{в}\right| \wedge \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{в}.$$

Определение. Вектор называется единичным, если его длина равна единице, а направление совпадает с направлением заданного вектора. Единичные вектора называются *ортами.*

Векторы в пространстве свободны, то есть точку приложения можно поместить в любую точку пространства, при этом можно сохранить длину и направление.

Проекция вектора на ось: $пр_e \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$. (1)

Координаты вектора называются проекциями вектора на оси координат.

Если начало вектора не совпадает с началом координат, тогда:

$$пр_x \bar{a} = x_2 - x_1,$$

$$пр_y \bar{a} = y_2 - y_1,$$

$$пр_z \bar{a} = z_2 - z_1.$$

Используя формулу (1), получаем:

$$x = |\bar{a}|\cos\varphi,$$

$$y = |\bar{a}|\cos\beta,$$

$$z = |\bar{a}|\cos\gamma. \quad (2)$$

Направляющие косинусы обладают замечательным свойством, которое используется в решении задач.

$$x^2 = |\bar{a}|^2 \cos^2\varphi,$$

$$y^2 = |\bar{a}|^2 \cos^2\beta,$$

$$z^2 = |\bar{a}|^2 \cos^2\gamma,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = |\bar{a}|^2\left(\cos^2\varphi + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right),$$

$$\cos^2\varphi + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (3)$$

Линейные операции с векторами. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис пространства. Разложение вектора по базису

Сложение векторов $\bar{a} + \bar{в} = \bar{c}$

1 Если начало одного вектора поместить в конец другого, то будет результирующим вектором суммы $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

2 Правило параллелограмма: приведем вектора к общему началу и достроим до параллелограмма, диагональ параллелограмма и будет результирующим вектором.

3 Правило многоугольника: соединим начала и концы векторов, и результирующим будет вектор, выходящий из начала первого вектора в конец последнего вектора.

Вычитание векторов

Разностью двух векторов $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)$ называется новый вектор $\overline{c}$, который при сложении с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$. Чтобы построить разность векторов, необходимо привести их к общему началу. Вектор, проведенный из конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого вектора, называется их разностью.

Свойства сложения и вычитания:

- при сложении векторов имеет место коммуникативное свойство;
- при сложении трех векторов – сочетательный (ассоциативный)

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\left(\overline{b}+\overline{c}\right)+\overline{a};$$

- существует нулевой вектор $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;
- для каждого вектора существует противоположный вектор $\overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=0$.

Умножение вектора на число

Произведением $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину, равную длине вектора $\overline{a}$, умноженной на модуль α, направление которого совпадает с вектором $\overline{a}$, если $\alpha>0$, и не совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\alpha<0$.

Свойства:

- умножение числа на сумму векторов определяется распределительным (дистрибутивным) свойством $\alpha\times\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\alpha\times\overline{a}+\alpha\times\overline{b}$;
- имеет место ассоциативное (сочетательное) свойство

$$\alpha\times\left(\beta\overline{a}\right)=\beta\times\left(\alpha\overline{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\times\overline{a}.$$

Линейная зависимость и независимость векторов. Базис пространства. Разложение вектора по базису

Линейные комбинации векторов

Пусть имеется n-векторов $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3}....\overline{a_n}$. Выражение вида $\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\alpha_3\overline{a_3}+...+\alpha_n\overline{a_n}$ называется линейной комбинацией, где $\alpha_i\in R,\ i=\overline{1,n}$. Векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},...,\overline{a_n}$ называются линейно зависимыми, если их линейная комбинация равна нулю, при условии, что хотя бы одно $\alpha_i\neq 0$:

$$\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+...+\alpha_n\overline{a_n}=0,\quad \alpha_i\neq 0.$$

Определение. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 .... \overline{a}_n$ называются линейно независимыми, если их линейная комбинация равна нулю, при условии, что все $\alpha_i = 0$.

Теорема. Если хотя бы один из векторов равен нулю, то вся совокупность векторов будет линейно зависимой.

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов является их коллинеарность.

Компланарность векторов

Определение. Векторы называют *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях.

Теорема. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Следствие из теоремы: если $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ не лежат в одной плоскости, то они линейно независимы.

Теорема. Любые четыре вектора в пространстве R^3 линейно зависимы, т.е. любой четвертый вектор можно представить в виде линейной комбинации первых трех:

$$\overline{a}_4 = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \overline{a}_3 \left(\alpha_i = 1 \right),$$

$$\overline{a}_4 = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \alpha_3 \overline{a}_3 .$$

Базис пространства. Разложение вектора по базису

Базис пространства – это линейно независимая система векторов, число которых равно размерности этого пространства. Любые три линейно независимые векторы образуют базис пространства R^3, а так как независимыми векторами пространства R^3 являются некомпланарные вектора, то любая тройка некомпланарных векторов может быть взята за базис. Любые два линейно независимые вектора образуют базис пространства R^2 , то есть любая пара неколлинеарных векторов может быть взята в качестве базиса на плоскости R^2. Если в качестве базиса взять единичные вектора, направленные по координатным осям, то любой вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации единичных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$d = xi + yj + zk . \qquad (*)$$

Выражение (*) называется разложением вектора $\overline{d}$ по базису i, j, k. То есть разложить вектор по базису, это значит представить его в виде линейной комбинации векторов этого базиса.

Занятие 6 Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение (векторно-скалярное)

Определение. Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(\bar{a},\bar{b}\right)=\left|\bar{a}\right|\times\left|\bar{b}\right|\times\cos\alpha .$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модуля одного из них на проекцию на него второго вектора.
$(\bar{a},\bar{b})$ или $\bar{a}\cdot\bar{b}$ - скалярное произведение.

Механический смысл скалярного произведения

Работа A постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку, при ее перемещении из точки A в точку B, определяется формулой $A=\left(\vec{F},\overline{AB}\right)$.

Свойства скалярного произведения:

- $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;
- $\alpha(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\alpha\cdot\bar{a})\bar{b}$;
- $(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$;
- $\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\times\left|\bar{a}\right|\cos 0=\left|\bar{a}\right|^2$;
- скалярное произведение равно нулю, если вектора взаимно перпендикулярны.

Скалярное произведение в координатах

Пусть $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, тогда:

$$\bar{a}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k},$$
$$\bar{b}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k},$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})(x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k})=x_1x_2\bar{i}^2+x_1y_2\bar{i}\bar{j}+x_1z_2\bar{i}\bar{k}+$$
$$+y_1x_2\bar{i}\bar{j}+y_1y_2\bar{j}^2+y_1z_2\bar{j}\bar{k}+z_1x_2\bar{i}\bar{k}+z_1y_2\bar{j}\bar{k}+z_1z_2\bar{k}^2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов, заданных координатами, является равенство:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол между векторами, заданными координатами:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

$\cos\varphi > 0 \to \varphi$ - острый, $\cos\varphi < 0 \to \varphi$ - тупой.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1 он перпендикулярен каждому из перемножаемых векторов;

2 его длина равна произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними $\overline{c} = |\overline{a}| \times |\overline{b}| \times \sin\varphi$;

3 он направлен таким образом, что если посмотреть из его конечной точки, то кратчайший поворот первого перемножаемого вектора ко второму должен быть виден против хода числовой стрелки (правило буравчика) $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$.

Геометрический смысл векторного произведения

Модуль векторного произведения $[a,b]$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах a и b (рисунок 1).

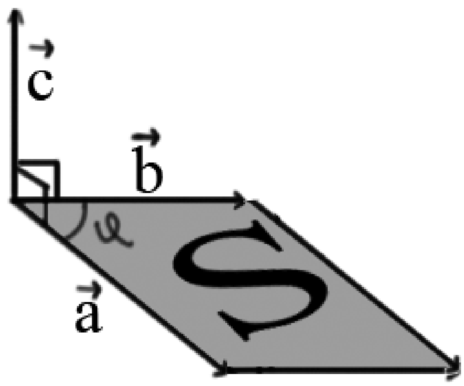


Рисунок 1 - Площадь параллелограмма равна векторному произведению

Свойства векторного произведения:

- векторное произведение равно 0, если векторы коллинеарны или один из них нулевой;
- векторное произведение не коммутативно, если $\overline{a}\times\overline{b}\neq\overline{b}\times\overline{a}$;
- при умножении вектора самого на себя получается 0;
- выполняется ассоциативный закон относительно числового множества $\alpha(\overline{a}\times\overline{b})=(\overline{a}\times\overline{b})\alpha$;
- имеет место дистрибутивный закон только в том случае, если вектора местами не менять $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$.

Векторное произведение векторов в координатах

Если два вектора a и b определены своими прямоугольными декартовыми координатами $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$, то векторное произведение векторов в координатной форме равно определителю третьего порядка, в первой строке которого стоят единичные вектора (i j k) - орты, во второй - координаты первого вектора, в третьей – координаты второго вектора:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Пример: $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\left|2i+10j-6k\right|=6$.

Единичные векторы - это векторы, абсолютная величина (модуль) которых равен единице. Для обозначения единичного вектора используется нижний индекс e. Так, если задан вектор a, то его единичным вектором будет вектор a_e. Этот единичный вектор направлен туда же, куда направлен и сам вектор a, и его модуль равен единице, то есть $a_e = 1$. Очевидно, $a = a\times a_e$ (a - модуль вектора a).

Единичные векторы часто связывают с координатными осями системы координат (в частности, с осями декартовой системы координат). Направления этих векторов совпадают с направлениями соответствующих осей, а их начала часто совмещают с началом системы координат.

Декартовой системой координат в пространстве называется тройка взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке, которая называется началом координат. Координатные оси обычно обозначают буквами X , Y , Z и называют, соответственно, осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат.

Единичный вектор, направленный вдоль оси X, обозначается i, единичный вектор, направленный вдоль оси Y , обозначается j, а единичный вектор, направленный вдоль оси Z, обозначается k. Векторы i, j, k называются **ортами** (рисунок 2), они имеют единичные модули, то есть $i = 1, j = 1, k = 1$.

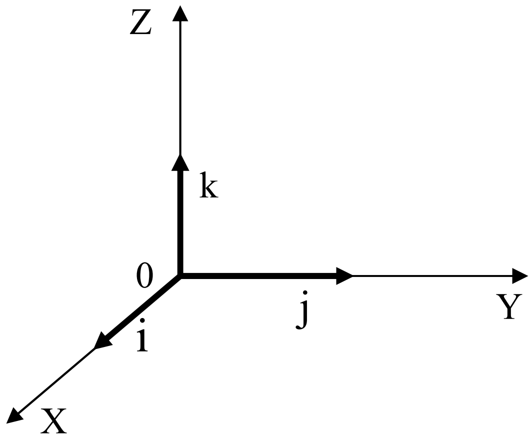


Рисунок 2 – орты i, j, k

Смешанное произведение (векторно-скалярное)

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Обозначается $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ или $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)$.

Геометрический смысл смешанного произведения

Смешанное произведение $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (рисунок 3).

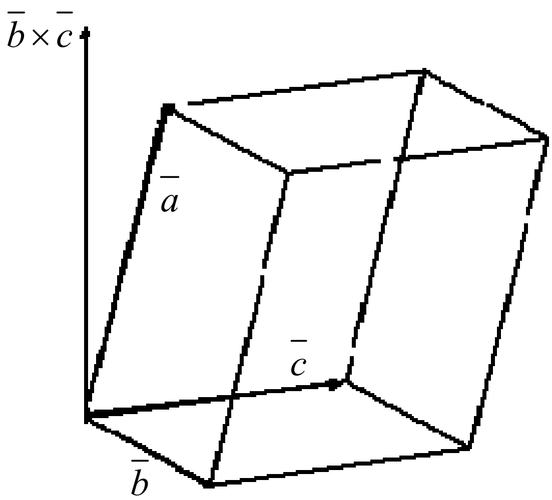


Рисунок 3 - Геометрический смысл смешанного произведения

Свойства смешанного произведения:

1 смешанное произведение равно нулю, если:

- хотя бы один из векторов равен нулю,
- два из векторов коллинеарны,
- векторы компланарны;

2 $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$;

3 $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{b},\overline{c},\overline{a}\right)=\left(\overline{c},\overline{a},\overline{b}\right)=-\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\right)=-\left(\overline{c},\overline{b},\overline{a}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c},\overline{b}\right)$;

4 $\left(\lambda\overline{a}_1+\mu\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}\right)=\lambda\left(\overline{a}_1,\overline{b},\overline{c}\right)+\mu\left(\overline{a}_2,\overline{b},\overline{c}\right)$;

5 объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, равен $\dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)\right|$.

Вычисление смешанного произведения в координатах

Смешанное произведение трех векторов, заданных в координатной плоскости, численно равно определителю третьего порядка, у которого соответствующие строки равны координатам соответствующих перемножаемых векторов.

Если $\overline{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$, $\overline{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, $\overline{c}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$,

то $$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1) Даны точки *A* (2; 3; 4), *B* (3; 1; 2). Найти координаты середины отрезка.

2) Даны точки: *A* (3; 3; 3) и *B* (-1; 5; 7). Найти координаты точек *C* и *D*, делящих отрезок AB на три равные части.

3) Дан треугольник: *A* (1; 2; 3), *B* (7; 10; 3), *C* (-1; 3; 1). Показать, что угол *A* – тупой.

4) На оси Oz найти точку, равноудаленную от точек M_1 (2; 4; 1) и M_2 (-3; 2; 5).

5) Даны точки: M_1 (1; 2; 3) и M_2 (3; -4; 6). Найти длину и направление вектора $\overline{M_1M_2}$.

6) Найти скалярное произведение векторов $a=3i+4j+7k$ *и* $b=2i-5j+2k$.

7) Найти (5a +3b)(2a – b), если a = 2, b = 3, $a\perp b$.

8) Найти векторное произведение векторов a = 2 i+ 3j +5k и b = I +2j +k.

9) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a = 6 i+ 3j -2k и b= 3i -2j +6k.

10) Вычислить площадь треугольника с вершинами *A* (1; 1; 1), *B* (2; 3; 4), *C* (4; 3;2).

11) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a+3b и 3a+b, если $|a| = |b| = 1$, (a, b) = 30^0.

12) Найти смешанное произведение векторов a= 2i –j –k, b= i +3j –k, c= i +j +4k.

13) Показать, что векторы a = 2i +5j +7k, b = i +j –k, c= I +2j +2k компланарны.

14) Найти объем треугольной пирамиды с вершинами *A* (2; 2; 2), *B* (4; 3; 3), *C* (4; 5; 4) и *D* (5; 5; 6).

15) Даны вершины четырехугольника: *A* (1; -2; 2), *B* (1; 4; 0), *C* (-4; 1; 1), *D* (-5; -5; 3). Доказать, что его диагонали *AC* и *BD:* а) взаимно перпендикулярны; б) найти величину угла (∆ВС).

16) На плоскости даны два вектора: $\bar{p} = \{1;3\}$ *и* $\bar{g} = \{2;5\}$. Показать, что они образуют базис, и найти разложение вектора $\bar{a} = \{1;3\}$ по базису $\bar{p}, \bar{g}$.

17) Вычислить площадь трапеции с вершинами A(3; -1; 2), B(1; 2; -1), C(-1; 1; -3), D(3; -5; 3)

18) Даны два вектора: $\bar{a} = \{3;-1;5\}$ *и* $\bar{b} = \{1;2;-3\}$. Найти вектор $\bar{x}$, перпендикулярный оси *Oz* и удовлетворяющий условиям $\bar{x} \times \bar{a} = 9;\ \bar{x} \times \bar{b} = -4.$

19) Найти единичный вектор, перпендикулярный к вектору $\bar{a} = \{3;2;2\}$ и оси *Ox*.

20) Даны векторы: $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j},\ \bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$ *и* $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c.

21) Даны вершины пирамиды: *O* (0; 0; 0), *A* (5; 2; 0), *B* (2; 5; 0), *C* (1; 2; 4). Вычислить ее объем.

22) Показать, что точки *A* (2; -1; -2), *B* (1; 2; 1), *C* (2; 3; 0) и *D* (5; 0; -6) лежат в одной плоскости.

23) Найти единичный вектор вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}.$

24) Даны два вектора: $\bar{a} = \{2;3\alpha;-1\}$ *и* $\bar{b} = \{3;-4;2\}$. Определить, при каком значении α эти векторы взаимно перпендикулярны.

25) Найти длину и направление вектора $\bar{a} = 3\bar{m} - 2\bar{n} + 4\bar{p},$

если:
$$\bar{m} = 2\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k},$$
$$\bar{n} = \bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k},$$
$$\bar{p} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

26) Даны векторы: $\overline{a}=\{4;-1;3\}$ *и* $\overline{b}=\{3;2;5\}$. Вычислить $\left(3\overline{a}-\overline{b}\right)\cdot\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)$.

27) Найти направляющие косинусы радиуса-вектора точки M (-2; 3; 1).

28) Даны векторы: $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ *и* $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$. Вычислить $\left(3\overline{a}-3\overline{b}\right)\times\left(2\overline{a}+\overline{b}\right)$.

29) Даны векторы: $\overline{a}=4\overline{i}+4\overline{j}-\overline{k}$ *и* $\overline{b}=2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$. Найти орт вектора $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}$.

30) Вычислить угол между векторами $\overline{a}=3\overline{p}+2\overline{q}$ *и* $\overline{b}=\overline{p}+5\overline{q}$, где $\overline{p}$ *и* $\overline{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Список литературы

Основная литература

1. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2010. – 479 с.
2. Высшая математика для экономистов / Под ред. П.С. Геворгяна. – М.: Экономика, 2010. – 352 с.
3. Задачник по высшей математики для вузов / Под ред. А.С. Поспелова. – М.: Лань, 2010. – 512 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов: Учебное пособие. - М: Дело, 2010. – 464 с.

Дополнительная литература

1. Атурин В.В., Годин В.В. Высшая математика. Задачи с решениями для студентов экономических специальностей. – М.: Академия, 2010. – 304 с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник типовых заданий по высшей математике (ТР). – М.: Высшая школа, 2006.
3. Щипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2007.
4. Щипачев В.С. Задачи по высшей математике. - М.: Высшая школа, 2007.

Трофимова Лидия Ароновна

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Методические указания
к выполнению практических и самостоятельных заданий
для студентов направлений 080200.62 «Менеджмент»,
081100.62 «Государственное и муниципальное управление»
и специальности 036401.65 «Таможенное дело»
очной формы обучения

Редактор О.Г. Арефьева

Подписано к печати	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,5	Уч.-изд. л. 2,5
Заказ	Тираж 250	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.