МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономическое моделирование и информатика»

# *НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ*

Методические указания
к проведению практических занятий
по теме «Неопределенный интеграл»
для студентов специальностей
060400, 060500, 061100, 061500, 350900, 351300
очной и заочной форм обучения

Курган 2004

Кафедра: «Экономическое моделирование и информатика»

Дисциплина: «Высшая математика» (специальности 060400, 060500, 061100, 061500, 350900, 351300)

Составил ассистент Садов А.П.

Методические указания составлены на основе учебных программ по курсу «Высшая математика»

Утверждены на заседании кафедры 25 декабря 2003 г.

Рекомендованы редакционно-издательским советом университета

«___»_____________2004 г.

# Содержание

## Введение

В настоящих методических указаниях подобраны и методически распределены задачи и примеры из раздела «Неопределенный интеграл».

В начале каждого параграфа приведены формулы и краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа предложены задачи для самостоятельной работы.

Материал, рассмотренный в данных указаниях, может быть использован в дальнейшем курсе высшей математики, в частности, при вычислении определенных интегралов.

## 1 Понятие и свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов

Пусть на некотором интервале $(a,b)$ задана функция $f(x)$. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для $f(x)$ на интервале $(a,b)$, если для всех $x \in (a,b)$ $F'(x) = f(x)$.

Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Множество всех первообразных $F(x)+C$, где $C$-произвольная постоянная, для функции $f(x)$ на интервале $(a,b)$ называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$. Символически это записывается так:

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, функция $f(x)$-*подынтегральной функцией*. Вычислить неопределенный интеграл означает найти множество всех первообразных подынтегральной функции.

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования):

1 Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2 Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3 Интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int d(F(x)) = F(x)+C.$$

4 Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

5 Если существуют интегралы $\int f_1(x)dx,\ldots,\int f_n(x)dx,$ то неопределенный интеграл суммы функций $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x)$ равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x)+\ldots+f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx+\ldots+\int f_n(x)dx.$$

6 Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = \int d(f(x)+C) = f(x)+C.$$

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int 0\,dx = C$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
6. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$
7. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$
11. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$
12. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C;$
14. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
16. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
17. $\int e^x dx = e^x + C$
18. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
19. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$
20. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + C$
21. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
22. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$
23. $\int shxdx = chx + C$
24. $\int chxdx = shx + C$
25. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
26. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

## 2 Основные методы интегрирования

### 2.1 Непосредственное интегрирование

Отыскание неопределенного интеграла с помощью таблицы основных интегралов и тождественных преобразований называют *непосредственным интегрированием*.

►***Пример 1.*** Вычислить $\int \frac{dx}{x^2 - x^4}$.

Для того чтобы взять данный интеграл, используя таблицу, проведем некоторые преобразования:

1 В знаменателе подынтегральной функции вынесем общим множителем $x^2$;

2 Применим искусственный прием, который состоит в следующем. Числитель подынтегральной функции можно интерпретировать как $1 \cdot dx$. Добавим здесь и вычтем величину, которая после группировки слагаемых, сократится со знаменателем дроби.

3 В данном случае добавим и вычтем по $x^2$. Получим $\int \frac{1 - x^2 + x^2}{x^2(1 - x^2)} dx$ или после группировки слагаемых $\int \frac{(1 - x^2) + x^2}{x^2(1 - x^2)} dx$.

4 Поделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель (или представим ее в виде суммы (разности) двух дробей с одинаковым знаменателем), т.е. $\int \frac{(1 - x^2) + x^2}{x^2(1 - x^2)} dx = \int \left( \frac{1 - x^2}{x^2(1 - x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1 - x^2)} \right) dx$, а теперь применим свойство аддитивности (суммы) неопределенного интеграла, производя предварительные сокращения множителей:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x^4} = \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} = \int \frac{1 - x^2 + x^2}{x^2(1 - x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 - x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C. ◄$$

►***Пример 2.*** Вычислить $\int \frac{x^2}{3 + x^2} dx$.

$$\int \frac{x^2}{3 + x^2} dx = \int \frac{3 + x^2 - 3}{3 + x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{3}{3 + x^2} \right) dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{3 + x^2} = x - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C. ◄$$

►***Пример 3.*** Вычислить $\int \frac{x^3 + 2}{x} dx$.

Поделим почленно числитель подынтегральной функции на знаменатель и применим свойства неопределенного интеграла:

$$\int \frac{x^3 + 2}{x} dx = \int \left( \frac{x^3}{x} + \frac{2}{x} \right) dx = \int x^2 dx + \int \frac{2}{x} dx = \int x^2 dx + 2\int \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x| + C. ◄$$

►***Пример 4.*** Вычислить $\int ctg^2 x dx$ .

$$\int ctg^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C \text{ .◄}$$

### Задачи для самостоятельной работы

1 $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{\sqrt{x}} dx$

2 $\int \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x} dx$

3 $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2} dx$

4 $\int \frac{2\sqrt{x}-x^2+3}{\sqrt[3]{x}} dx$

5 $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2} dx$

6 $\int \frac{2x^2-\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx$

7 $\int \left( \sqrt[3]{x} - \frac{2\sqrt[4]{x}-3}{x} + 3 \right) dx$

8 $\int \frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}} dx$

### *Ответы*

1 $6\sqrt{x} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

2 $\frac{x^2}{2} + 3\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln|x| + C$

3 $-\frac{3}{\sqrt{x}} + 2x + \frac{5}{2x} + C$

4 $\frac{12}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

5 $-\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} - 2\ln|x| - \frac{5}{x} + C$

6 $\frac{4}{5}\sqrt{x^5} - x + 8\sqrt{x} + C$

7 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - 8\sqrt[4]{x} + 3x + C$

8 $\frac{4}{7}\sqrt{x^7} - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} + C$

## 2.2 Метод замены переменной (метод подстановки)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx,$ где функция $f(x)$ определена на некотором множестве $X$. Введем новую переменную $t$ формулой: $x = \varphi(t),$ где функция $\varphi(t)$ дифференцируема на некотором множестве $T$ и осуществляет взаимно-однозначное отображение $T$ на $X$, то есть имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x).$ Подставив $x = \varphi(t)$ в исходное подынтегральное выражение, получим:

$$f(x)dx = f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \, ,$$

то есть вычисление интеграла $\int f(x)dx$ сводится к вычислению интеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$ который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $t = \varphi^{-1}(x).$

►***Пример 1.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{5x+3}$.

$$\int \frac{dx}{5x+3} = \left| \begin{array}{c} 5x+3=t \\ x=\frac{1}{5}(t-3) \\ dx=\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + C. \blacktriangleleft$$

►***Пример 2.*** Найти интеграл $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = \int \frac{1+t^2}{1+t}2tdt = 2\int \frac{t+t^3}{1+t}dt = 2\int (t^2-t+2)dt - 4\int \frac{dt}{t+1} = 2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t\right) -$$

$$-4\ln(t+1) + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1) + C. \blacktriangleleft$$

***Примечание*** - Для интегралов, содержащих показательную функцию $e^x$, выведена специальная подстановка вида $x = \ln t,$ откуда $dx = \frac{dt}{t}$, $t = e^x, t \in (0;+\infty).$ При их вычислении используются свойства логарифмов и основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, известное из школьного курса математики.

►***Пример 3.*** Найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx.$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \left| \begin{array}{c} e^x=t \\ x=\ln t \\ dx=\frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{(t+1)} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} = t - \ln(t+1) + C = e^x - \ln(e^x+1) + C. \blacktriangleleft$$

***Примечание*** - Интегралы, содержащие корни $\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2+x^2}, \sqrt{x^2-a^2}$, вычисляются с помощью тригонометрических подстановок: $x = a\sin t (x = a\cos t), x = atgt (x = actgt), x = \frac{a}{\sin t}\left(x = \frac{a}{\cos t}\right)$ соответственно.

►***Пример 4.*** Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}x=a\sin t\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right|=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}a\cos tdt=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{4}\int\cos 2td(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin t=\frac{x}{a},\\ \cos t=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\end{matrix}\right|=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C. \blacktriangleleft$$

***Примечание*** - Вычисление интеграла методом подведения подынтегральной функции под знак дифференциала является частным случаем метода замены переменной. При этом вычисление интеграла $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ производится путем подстановки $t=\varphi(x)$.

►***Пример 5.*** Найти интеграл $\int\frac{\sin 4x}{\cos^4 2x+1}dx.$

$$\int\frac{\sin 4x}{\cos^4 2x+1}dx=\left|\begin{matrix}\varphi(x)=\cos^2 x=t\\ \sin 4xdx=-\varphi'(x)dx=-d(\varphi(x))=-dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{-dt}{t^2+1}=-arctgt+C=-arctg\left(\cos^2 2x\right)+C. \blacktriangleleft$$

►***Пример 6.*** Найти интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx.$

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{x^3+5}d\left(x^3+5\right)=\frac{2}{9}\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}+C. \blacktriangleleft$$

►***Пример 7.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{a^2+x^2}.$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt+C. \blacktriangleleft$$

►***Пример 8.*** Найти интеграл $\int\sin^3 x\cos xdx$.

$$\int\sin^3 x\cos xdx=\int\sin^3 xd(\sin x)=\left|\text{пусть } \sin x=t\right|=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C. \blacktriangleleft$$

►***Пример 9.*** Найти интеграл $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$.

$$\int x\cdot 5^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int 5^{-x^2}d\left(-x^2\right)=\left|\varphi(x)=-x^2=t\right|=-\frac{1}{2}\int 5^t dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+C=-\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{-x^2}}{\ln 5}+C. \blacktriangleleft$$

### Задачи для самостоятельной работы

1 $\int \frac{3x^3}{1-x^4}dx$

2 $\int \frac{e^x dx}{2e^x+3}$

3 $\int \frac{e^x dx}{4-3e^x}$

4 $\int \frac{x^2 dx}{7-5x^3}$

5 $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}dx$

6 $\int \frac{e^{2x}}{5+e^{2x}}dx$

7 $\int \frac{4x^3}{7+2x^4}dx$

8 $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+17}dx$

***Ответы***

1 $-\frac{3}{4}\ln\left|1-x^4\right|+C$

2 $\frac{1}{2}\ln\left|e^x+\frac{3}{2}\right|+C$

3 $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{4}{3}-e^x\right|+C$

4 $-\frac{1}{15}\ln\left|7-5x^3\right|+C$

5 $\frac{1}{3}\ln\left|\sin^2 x+\frac{4}{3}\right|+C$

6 $\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+5\right|+C$

7 $\frac{1}{2}\ln\left|7+2x^4\right|+C$

8 $\ln\left|2x^2-5x+17\right|+C$

## 2.3 Метод интегрирования по частям

Если u=u(x) и v=v(x) – дифференцируемые функции на некотором промежутке X, то по свойству дифференциала

$$d(uv)=du\cdot v+u\cdot dv.$$

Тогда

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям и используется в тех случаях, когда подынтегральная функция *f(x)* представляет собой произведение алгебраической функции (многочлена) на трансцендентную функцию (т.е. тригонометрическую, показательную, обратную тригонометрическую или логарифмическую). При этом используют следующие правила:

1 Если подынтегральная функция содержит сомножителем обратную тригонометрическую или логарифмическую функции, то их следует принимать за u.

2 Если под знаком интеграла стоит произведение алгебраической функции на тригонометрическую или показательную функцию, то к u следует отнести алгебраическую, а ставшееся выражение к dv.

►***Пример 1.*** Найти $\int \ln x dx$.

Подынтегральное выражение представляет собой произведение алгебраической функции (многочлена нулевой степени) на логарифмическую функцию.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \int dx = x \begin{pmatrix} \text{постоянную } C \text{ здесь полагаем равной нулю, т.е.} \\ \text{в качестве } v \text{ берем одну из первообразных} \end{pmatrix} \end{matrix} \right| =$$ ◄

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

***Примечание*** - Особенностью метода интегрирования по частям является возможность его неоднократного применения.

►***Пример 2.*** Найти $\int x^2 \cos x dx$.

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$ ◄

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\int \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

***Примечание*** - В процессе интегрирования по частям возможно восстановление первоначального интеграла. В этом случае искомый интеграл обозначают за I и находят его, решая полученное уравнение относительно I.

►***Пример 3.*** Вычислить $\int e^x \sin x dx$.

Под знаком интеграла стоит произведение двух трансцендентных функций. В этом случае за u можно брать любую из них.

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^e \end{matrix} \right| =$$ ◄

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx.$$

Можно заметить, что, применив два раза метод интегрирования по частям, искомый интеграл восстановился. Обозначим его за I:

$$I = \int e^x \sin x dx$$

и составим уравнение относительно I:

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I;$$

$$2I = e^x(\sin x - \cos x);$$

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

## Задачи для самостоятельной работы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int (x^3+3)\sin x dx$ | 5 | $\int (x^2+x)\cos x dx$ |
| 2 | $\int (x^2-3)\cos x dx$ | 6 | $\int (x^2+1)e^x dx$ |
| 3 | $\int x^2\cos^2 x dx$ | 7 | $\int \arcsin 9x dx$ |
| 4 | $\int (x^2+x)\sin x dx$ | 8 | $\int x arctg 2x dx$ |

### *Ответы*

1 $-(x^3+3)\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C$

2 $(x^2-3)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

3 $x^2\left(\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}x\cos^2 x-\frac{1}{4}\sin x\cos x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}x^3+C$

4 $-(x^2+x)\cos x+(2x+1)\sin x+2\cos x+C$

5 $(x^2+x)\sin x+(2x+1)\cos x-2\sin x+C$

6 $3e^x+x^2e^x-2xe^x+C$

7 $x\arcsin 9x+\frac{1}{9}\sqrt{1-81x^2}+C$

8 $\frac{1}{2}x^2 arctg 2x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}arctg 2x+C$

## 3 Интегрирование основных классов элементарных функций

### 3.1 Интегрирование рациональных дробей

Функция f(x) называется ***рациональной*** относительно переменной x, если она представлена в виде отношения многочленов с натуральным показателем и с действительными коэффициентами, т.е. $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+b_1x+b_0}$.

Например: $f(x)=\frac{2x+5x^3}{2-x}$.

Пусть дана произвольная рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+b_1x+b_0}$, где P(x) и Q(x) – многочлены с действительными коэффициентами.

Дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_mx^m+...+a_1x+a_0}{b_nx^n+...+b_1x+b_0}$, где P(x) и Q(x) – многочлены, называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. m<n. В противном случае, когда $m\ge n$, дробь называется *неправильной*.

Например, дробь $\frac{2x+5x^3}{2-7x^4}$ - правильная, так как m=3, n=4, а дробь $\frac{\left(x^2+1\right)^3}{x\left(x^2-2x+1\right)}$ - неправильная, так как m=6, n=3.

Если дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_m x^m+...+a_1x+a_0}{b_n x^n+...+b_1x+b_0}$ неправильная, то следует предварительно выделить в ней целую часть путем деления числителя на знаменатель "уголком", т. е. представить дробь в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ – многочлены степеней $m-n\geq 0$ и r соответственно, причем, r<n, то есть дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ - правильная.

Операция выделения целой части сводит интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

### 3.1.1 Интегрирование простейших дробей

Среди простейших дробей выделяют дроби первого, второго, третьего и четвертого типов.

Дробь вида $\frac{A}{x-a}$, где $A,a\in R$, относится к первому типу.

Дробь вида $\frac{A}{(x-a)^n}$, где $A,a\in R$, $n\in N$, относится ко второму типу.

Дробь вида $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $M,N,p,q\in R$, многочлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней, относится к третьему типу.

Дробь вида $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $где\, k=2,3,...\ M,N,p,q\in R$, многочлен $x^2+px+q$ не имеет действительных корней, относится к четвертому типу.

Рассмотрим интегрирование дробей каждого типа.

1 $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

2 $\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C$.

3 Интегралы вида $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$ приводятся к табличным интегралам путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной.

►***Пример 1.*** Найти $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

Выделим полный квадрат в знаменателе дроби $x^2+4x-5 = x^2+2\cdot 2\cdot x+4-4-5 = \left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)-4-5 = (x+2)^2-9$.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-9} = \left|\text{замена } x+2=t\right| = \int \frac{dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C.$$ ◄

4 Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ приводятся к интегралам вида $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ путем выделения в числителе производной 2x+p квадратного трехчлена.

►***Пример 2.*** Найти $\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}dx$.

Так как $\left(3x^2+2x+1\right)' = 6x+2, \quad x-1 = \frac{1}{6}(6x+2)-\frac{4}{3}$, то

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}dx - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d\left(3x^2+2x+1\right)}{3x^2+2x+1} - \frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} = \frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x+1\right| - \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C.$$ ◄

### 3.1.2 Интегрирование правильных дробей. Метод неопределенных коэффициентов

Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, m<n$ производится разложением дроби в сумму простейших дробей вышеназванных четырех типов с последующим интегрированием. Указанное разложение осуществляется на основе следующего утверждения.

Если рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является правильной и знаменатель $Q_n(x)$ представлен в виде $Q_n(x) = b_0(x-a)^k(x-b)^l\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)^\lambda\left(x^2+hx+r\right)^\nu$, где a и b – различные действительные корни многочлена $Q_n(x)$ кратности k и l, а последние два сомножителя соответствуют двум различным парам комплексно-сопряженных корней $Q_n(x)$ кратности λ и ν, то ее разложение на простейшие дроби производится по формуле:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_l}{(x-b)^l}+...+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda}+\frac{H_1x+L_1}{x^2+hx+r}+\frac{H_2x+L_2}{\left(x^2+hx+r\right)^2}+...+\frac{H_\upsilon x+L_\upsilon}{\left(x^2+hx+r\right)^\upsilon}.$$

Коэффициенты $A_1, A_2,\ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, M_2,\ldots M_\lambda, N_1, N_2,\ldots N_\lambda, H_1, H_2,\ldots H_\nu, L_1, L_2,\ldots L_\nu$ в этом разложении определяются ***методом неопределенных коэффициентов***. Он заключается в следующем. Правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ разлагают на сумму простейших дробей 1-4 типов с неопределенными коэффициентами $A_1, A_2,\ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_l, M_1, M_2,\ldots M_\lambda, N_1, N_2,\ldots N_\lambda, H_1, H_2,\ldots H_\nu, L_1, L_2,\ldots L_\nu$. Приведя полученную дробь к общему знаменателю, получим тождественное равенство двух дробей с одинаковым знаменателем $Q_n(x)$. Это равенство возможно тогда и только тогда, когда равны числители этих дробей. Числителями являются многочлены, а два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при соответствующих степенях неизвестного. Приравнивая эти коэффициенты, получим систему линейных уравнений с n неизвестными. Решая ее, найдем значения искомых коэффициентов, а, следовательно, и разложение правильной дроби на сумму простейших. Затем производится интегрирование.

### Правило интегрирования правильных дробей

1 Проверяем, будет ли дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильной. Если дробь неправильная, то выделяем из нее целую часть, т. е. представляем дробь в виде $\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$.

2 Разлагаем знаменатель Q(x) на множители.

3 Записываем разложение дроби $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ на сумму простейших с неопределенными коэффициентами.

4 Методом неопределенных коэффициентов отыскиваем их значения.

5 Интегрируем многочлен R(x) и простейшие дроби с известными коэффициентами.

►***Пример1.*** Найти $\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$.

Дробь $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ правильная, ее разложение в сумму простейших дробей имеет вид: $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$. Приведя правую часть к общему знаменателю, получим: $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$. Приравняем числители этих дробей: $x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$. Составим систему уравнений, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & A+B=1 \\ x & -2A-B+C=4 \\ x^0 & A=4 \end{array}\Bigg\}$$. Из этой системы B=-3, C=9. Следовательно,

$$\int\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}\right)dx=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$$ ◄

***Примечание*** - Иногда полезно применять ***метод частных значений***, который заключается в том, что если многочлен Q(x) имеет простейшие множители первого типа, то, полагая в тождественном равенстве двух многочленов с неопределенными коэффициентами x=a, найдем один из коэффициентов.

***Примечание*** - Часто разложение дроби на простейшие можно получить, не прибегая к методу неопределенных коэффициентов.

►***Пример 2.*** Разложить на простейшие дробь $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2-x^2}{x(x^2+1)}-\frac{x}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$ ◄

## Задачи для самостоятельной работы

1 $\int\frac{7x-10}{x^3+8}dx$

2 $\int\frac{4x^2+3x+`17}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$

3 $\int\frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$

4 $\int\frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$

5 $\int\frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$

6 $\int\frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx;$

7 $\int\frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$

8 $\int\frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$

**_Ответы_**

1 $\quad -2\ln|x+2|+\ln|x^2-2x+4|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$

2 $\quad 3\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-\frac{3}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$

3 $\quad 2\ln|x-1|-\ln|x^2+2x+5|-\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C$

4 $\quad 2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4|-\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$

5 $\quad \ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+13|-arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C$

6 $\quad 3\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5|-2arctg\frac{x+1}{2}+C$

7 $\quad -\ln|x+1|+\ln|x^2+6x+13|+\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C$

8 $\quad 2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$

## 3.2 Интегрирование иррациональных функций

### 3.2.1 Дробно-линейные иррациональности

Дадим определения иррациональной функции и простейшей иррациональной функции.

***Определение 1.*** Функция называется ***иррациональной***, если она задана с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую либо рациональную степень.

Например, $f(x)=\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}$ .

***Определение 2.*** Функция вида $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...\right)$, где $a,b,c,d\in R,\quad m_1,m_2,..\in Z,\, n_1,n_2,...\in N$ называется ***простейшей иррациональной*** функцией.

Например, $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.

***Теорема.*** Простейшая иррациональная функция всегда интегрируется в конечном виде с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1},\frac{m_2}{n_2}...$

►***Пример 1.*** Вычислить $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$.

Сделаем замену $\frac{x+1}{x-1}=t^3$. Отсюда $x=\frac{1+t^3}{t^3-1}$, $dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2}$. Тогда

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}=-6\int t\cdot\frac{t^2dt}{(t^3-1)^2\cdot\left(\frac{1+t^3}{t^3-1}-1\right)^3}=-6\int\frac{t^3(t^3-1)^3dt}{(t^3-1)^2\cdot 8}=-\frac{6}{8}\int t^3(t^3-1)dt=$$

$$=-\frac{3}{4}\int(t^6-t^3)dt=-\frac{3}{4\cdot 7}t^7+\frac{3}{4\cdot 4}t^4+C=-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C.$$ ◄

***Примечание*** - Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, где R(x) – рациональная функция аргумента x, $a,b\in R,\ a\neq 0$ вычисляется с помощью подстановки $\sqrt[n]{ax+b}=t$.

►***Пример 2.*** Вычислить $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$.

Сделаем замену $\sqrt[3]{2x-3}=t$. Отсюда $x=\frac{1}{2}(t^3+3)$, $dx=\frac{3}{2}t^2dt$. Тогда

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int\frac{t^3+3}{t}\cdot t^2dt=\frac{3}{4}\int t\,(t^3+3)\,dt=\frac{3}{4}\int t^4dt+\frac{9}{4}\int tdt=$$

$$=\frac{3}{20}t^5+\frac{9}{8}t^2+C=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(2x-3)^5}+\frac{9}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^2}+C.$$ ◄

***Примечание*** - Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[k_1]{ax+b},\sqrt[k_2]{ax+b},...\sqrt[k_n]{ax+b}\right)dx$, где R(x) – рациональная функция аргумента x, $a,b\in R,\ a\neq 0$, $\forall i=\overline{1,...n}\quad k_i\in Z$, вычисляется с помощью подстановки $\sqrt[k]{ax+b}=t,$ где к – наименьшее общее кратное показателей $k_1$, $k_2$,…$k_n$.

►***Пример 3.*** Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Сделаем замену $\sqrt[6]{x}=t$. Отсюда $x=t^6,\ dx=6t^5dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}=6\int\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=2t^3+3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$ ◄

## Задачи для самостоятельной работы

1 $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{\left(1+\sqrt[3]{x+1}\right)\sqrt{x+1}}\,dx$

2 $\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$

3 $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

4 $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

5 $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$

6 $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

7 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}\,dx$

8 $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx$

***Ответы***

1 $3\sqrt[3]{x+1}-\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^2}+6\sqrt[6]{x+1}-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-arctg\sqrt[6]{x+1}+C$

2 $x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+4arctg\sqrt[4]{x}+C$

3 $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x+1)^7}-x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C$

4 $x+2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}+C$

5 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6arctg\sqrt[6]{x}+C$

6 $\frac{2x+1}{6}+\frac{\sqrt[6]{(2x+1)^5}}{5}+C$

7 $\frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-1)^7}-x+1+\frac{6}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}-3\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[6]{x-1}-6\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+1\right|+C$

8 $x-1-\frac{24}{5}\sqrt[6]{(x-1)^5}+12\sqrt[3]{(x-1)^2}-32\sqrt{x-1}+96\sqrt[3]{x-1}-384\sqrt[6]{x-1}+768\ln\left|\sqrt[6]{x-1}+2\right|+C$

### 3.2.2 Квадратичные иррациональности

***Интегралы вида*** $\int R\left(x,\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)dx$, где R(x) – рациональная функция аргумента x, $a,b,c\in R,\ a\neq 0,\quad m,n\in Z$, вычисляются путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной.

►***Пример 1.*** Найти $\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции: $3-2x-x^2=-\left(x^2+2x-3\right)=-\left(x^2+2x+1-1-3\right)=-(x+1)^2+4$. Сделаем замену $x+1=t$. Отсюда $x=t-1,\ dx=dt$.

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-3}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx = \int \frac{t-4}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}} - 4\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (4-t^2)d(4-t^2)dt - 4\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\sqrt{4-t^2} - 4\arcsin\frac{t}{2} + C = \quad ◄$$

$$= -\sqrt{3-2x-x^2} - 4\arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

***Интегралы вида*** $\int R\left(x, \frac{1}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)dx$, где R(x) – рациональная функция аргумента x, $a,b,c \in R,\ a \neq 0$, вычисляются также путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующей заменой переменной вида $\frac{1}{x} = t$.

►***Пример 2.*** Вычислить $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

Сделаем замену $\frac{1}{x} = t$. Отсюда $x = \frac{1}{t},\ dx = -\frac{dt}{t^2}$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = -\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}+2\right)^2 - 8}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\left(\frac{1+2t}{t}\right)^2 - 8}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t+4t^2-8t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+4t-4t^2}} = \left|1+4t-4t^2 = -(4t^2-4t-1) = -(4t^2 - 2\cdot 2t + 1 - 1 - 1) = 2 - (2t-1)^2\right| = \quad ◄$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t-1)}{\sqrt{2-(2t-1)^2}} = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{2}} + C = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x\sqrt{2}} + C.$$

## Задачи для самостоятельной работы

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}dx$ | 5 | $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$ |
| 2 | $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$ | 6 | $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$ |
| 3 | $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx$ | 7 | $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx$ |
| 4 | $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx$ | 8 | $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$ |

## *Ответы*

1 $\frac{2}{3}\sqrt{3x^2-3x-16}-4\sqrt{3}\ln\left|\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3x^2-3x-16}\right|+C$

2 $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-4x-1}-\sqrt{2}\ln\left|\sqrt{2}(x-1)+\sqrt{2x^2-4x-1}\right|+C$

3 $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-x+5}-\frac{5\sqrt{3}}{18}\ln\left|6x-1+4\sqrt{9x^2-3x+15}\right|+C$

4 $-\frac{2}{3}\sqrt{1+x-3x^2}+\frac{4\sqrt{3}}{9}\arcsin\frac{6x-1}{\sqrt{13}}+C$

5 $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+8x+9}+\frac{3}{2}\ln\left|2x+2+\sqrt{4x^2+8x+9}\right|+C$

6 $2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$

7 $2\sqrt{1-x+x^2}-7\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{1-x+x^2}\right|+C$

8 $3\sqrt{x^2+6x+13}-5\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}\right|+C$

### 3.2.3 Дифференциальные биномы

Выражение вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,\ где\ a,b\in R,\ m,n,p\in Q$, называется ***дифференциальным биномом*** (или биномиальным дифференциалом).

Дифференциальный бином интегрируется в конечном виде только в трех случаях:

1 Число $p\in Z$.Для взятия интеграла используется подстановка $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей m и n.

2 Число $\frac{m+1}{n}\in Z$. Используется подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – знаменатель числа p.

3 Число $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)\in Z$. Используется подстановка $\frac{a}{x^n}+b=t^s$, где s – знаменатель числа p.

►***Пример 1.*** Вычислить $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$.

Выпишем значения показателей степеней m, n, p: $m=-1,\ \ n=\frac{1}{3},\ \ p=-3$. Так как $p\in Z$, то данный бином интегрируем по первому случаю. В данном случае s=3, следовательно, применим подстановку $x=t^3,\ \ dx=3t^2dt$. Отсюда

$$\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx=\int t^{-3}(1+t)^{-3}\cdot 3t^2dt=3\int\frac{t^2dt}{t^3(1+t)^3}=3\int\frac{dt}{t(1+t)^3}.$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей первого и второго типов:

$$\frac{1}{t\,(1+t)^3}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C}{(1+t)^2}+\frac{D}{(1+t)^3}=\frac{A(1+t)^3+Bt(1+t)^2+Ct(1+t)+Dt}{t(1+t)^3}.$$

Приравняем числители дробей:

$$A\left(1+3t+3t^2+t^3\right)+Bt\left(1+2t+t^2\right)+Ct+Ct^2+Dt=1.$$

Составим систему линейных уравнений, из которой найдем коэффициенты A, B, C и D:

$$\begin{cases} A+B=0; \\ 3A+2B+C=0; \\ 3A+B+C+D=0; \\ A=1. \end{cases}$$

Решая систему, находим B=-1, C=-1, D=-1.

Продолжаем вычисление интеграла:

$$3\int\frac{dt}{t(1+t)^3}=3\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right)dt=3\int\frac{dt}{t}-3\int\frac{dt}{1+t}-3\int\frac{dt}{(1+t)^2}-3\int\frac{dt}{(1+t)^3}=$$

$$=3\ln|t|-3\ln|1+t|+\frac{3}{1+t}+\frac{3}{2(1+t)^2}+C=3\ln\left|\sqrt[3]{x}\right|-3\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|+\frac{3}{1+\sqrt[3]{x}}+\frac{3}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}+C.$$

◄

***Примечание*** - Перед интегрированием дифференциального бинома имеет смысл сперва проверить, интегрируем ли он в конечном виде.

►***Пример 2.*** Вычислить $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[5]{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{5}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx$.

Выпишем показатели степеней: $m=-\frac{1}{5},\quad n=\frac{1}{4},\quad p=\frac{1}{3}$.

1 $\quad p=\frac{1}{3}\notin Z$.

2 $\quad \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{1}=\frac{16}{5}\notin Z$.

3 $\quad \frac{m+1}{n}+p=\frac{16}{5}+\frac{1}{3}\notin Z$.

Так как ни один случай интегрирования не выполняется, следовательно, делаем вывод, что данный бином не берется в конечном виде. ◄

### Задачи для самостоятельной работы

1 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$

2 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

3 $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx$

4 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$

5 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

6 $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$

7 $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$

8 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$

### *Ответы*

1 $\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}\right|+C$

2 $\sqrt{x^2-1}-arctg\sqrt{x^2-1}+C$

3 $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+\sqrt{x^2+4}+C$

4 $-\frac{1}{3x^3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C$

5 $\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}arctg\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$

6 $\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right|+\sqrt{x^2+9}+C$

7 $\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}+x}\right|+C$

8 $-\frac{1}{12x^3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+C$

## 3.3 Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

- ***Интегралы вида*** $\int \sin^m x\cos^n xdx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – нечетное положительное целое число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

►***Пример 1.*** Найти $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$.

$$\int \sin^3 x\cos^2 xdx=\int \sin x\sin^2 x\cos^2 xdx=-\int \cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)=-\int\left(\cos^2 x-\cos^4 x\right)dx=$$

$$=-\int \cos^2 xd\left(\cos x\right)+\int \cos^4 xd\left(\cos x\right)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C.$$ ◄

Если же m и n – четные неотрицательные числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x .$$

►***Пример 2.*** Найти $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 x + C = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$ ◄

- ***Для интегрирования произведений синусов и косинусов*** различных аргументов применяются тригонометрические формулы:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

►***Пример 3.*** Найти $\int \cos 9x \cos 5x dx$.

$$\int \cos 9x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x + \cos 14x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \cos 14x dx = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{28}\sin 14x + C.$$ ◄

- ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x, \cos x) dx$ приводятся к интегралам от рациональной функции нового аргумента t с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $tg\frac{x}{2} = t$. Отсюда $x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. При этом используются формулы:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

►***Пример 4.*** Найти $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

$$\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x+5}=2\int\frac{dt}{\left(4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+5\right)\cdot\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\frac{dt}{(t+3)^2}=$$

$$=2\int(t+3)^{-2}d(t+3)=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{tg\frac{x}{2}+3}+C. \blacktriangleleft$$

Если под интегралом ***синус и косинус*** содержатся ***только в четных степенях***, то удобнее использовать подстановку tg x=t.

►***Пример 5.*** Найти $\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

Разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$ и используя подстановку tgx=t, получим:

$$\int\frac{dx}{1-5\sin^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\frac{1}{\cos^2 x}-5\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\int\frac{d(tgx)}{1+tg^2x-5tg^2x}=\int\frac{d(tgx)}{1-4tg^2x}=\int\frac{dt}{1-4t^2}= \blacktriangleleft$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{1-(2t)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2t}{1-2t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+2tgx}{1-2tgx}\right|+C.$$

- ***Интегрирование гиперболических функций*** производится аналогично интегрированию тригонометрических функций, причем используются следующие формулы:

$$ch^2x-sh^2x=1,\quad shxchx=\frac{1}{2}sh2x,\quad ch^2x=\frac{ch2x+1}{2},\quad sh^2x=\frac{ch2x-1}{2}.$$

►***Пример 6.*** Найти $\int ch^2 3xdx$.

$$\int ch^2 3xdx=\int\frac{ch6x+1}{2}dx=\frac{1}{2}\int ch6xdx+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{12}sh6x+\frac{1}{2}x+C. \blacktriangleleft$$

## Задачи для самостоятельной работы

1 $\int\left(1-2\sin\frac{x}{5}\right)dx$

2 $\int\cos^3 5x\sin 5xdx$

3 $\int\cos^3(1-x)dx$

4 $\int(3-\sin 2x)^2dx$

5 $\int\sin^2\frac{3x}{2}dx$

6 $\int(\cos x+3)^2dx$

7 $\int\frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$

8 $\int\frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$

9 $\int\cos^4 3x\sin^2 3xdx$

10 $\int\cos^3 x\sin^8 xdx$

***Ответы***

1 $x+10\cos\frac{x}{5}+C$

2 $-\frac{1}{20}\cos^4 5x+C$

3 $-\sin(1-x)+\frac{1}{3}\sin^3(1-x)+C$

4 $\frac{19}{2}x+3\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$

5 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\sin 3x+C$

6 $\frac{19}{2}x+6\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

7 $\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$

8 $\frac{2\sqrt{5}}{5}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}-4}{\sqrt{5}}+C$

9 $\frac{1}{16}x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{192}\sin 12x+C$

10 $\frac{\sin^9 x}{9}-\frac{\sin^{11} x}{11}+C$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: 1985. – 446 с.

2 Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. – 528 с.

3 Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа./ Под. ред. А.В Ефимова, Б.П. Демидовича М.: «Наука», 1981.

4 Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: «Высшая школа», 1995.

5 Шипачев В.С. Задачи по высшей математике. – М.: «Высшая школа», 1995.

АЛЕКСЕЙ ПАВЛОВИЧ САДОВ

# *НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ*

Методические указания
к проведению практических занятий
по теме «Неопределенный интеграл»
для студентов специальностей
060400, 060500, 061100, 061500, 350900, 351300
очной и заочной форм обучения

Редактор Т.В.Тимофеева

| | | |
|---|---|---|
| Подписано к печати | | Бумага типа № 1 |
| Формат 60x84 1/16 | Усл.п.л.1,75 | Уч.изд.л.1,75 |
| Заказ | Тираж 100 | Цена свободная |

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет, ризограф.