МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения лабораторной работы № 3
по курсу математики для студентов специальностей

050501, 140211, 150202, 151001, 151002, 190201, 190202,
190601, 190603, 190702, 200503, 220301, 260601, 280101

Курган 2007

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

Курс: «Математика»

Составили: доцент кафедры ПМиКМ Э.А. Тен;

ст. преподаватель кафедры ПМиКМ И.Л. Леванова.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ПМиКМ Т.А. Вержбалович.

Контрольные задания составлены на основе учебных программ по курсу «Математика».

Утверждены на заседании кафедры ПМиКМ « 23 » марта 2007 г.

Рекомендованы методическим советом университета

« 5 » апреля 2007 г.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих инженерных задач и в математических расчетах приходится иметь дело с нахождением промежуточных значений функций, а также по таблице значений функции, полученных в результате какого-то эксперимента, находить ее аналитическое выражение. Таким образом, задача интерполирования функций является одной из важнейших.

ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. Познакомиться с первой и второй интерполяционными формулами Ньютона и приобрести навыки в их применении.
2. Научиться интерполировать функцию с использованием универсальной интегрированной системы MathCAD.

ЗАДАНИЕ

1. С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значение функции в двух точках и определить погрешность интерполирования в окрестностях этих точек.
2. Найти значение функции в этих же точках, используя встроенную функцию MathCAD.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Постановка общей задачи аппроксимирования функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана некоторым образом на отрезке $[a; b]$. Требуется отыскать функцию $y = F(x)$, которая незначительно отличается от $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Функция $y = f(x)$ называется ***аппроксимируемой***, а функция $y = F(x)$ - ***аппроксимирующей***.

Аппроксимирующая функция используется для вычисления приближенных значений функции $y = f(x)$ в некоторых точках отрезка $[a; b]$. В постановке общей задачи аппроксимирования имеются следующие неопределенности:

- Не сказано, каким образом задана функция $y = f(x)$.
- Не сказано, какому классу принадлежит функция $y = F(x)$.
- Не сказано, какой математический смысл придается утверждению «незначительно отличается».

Ликвидируя некоторые неопределенности в формулировке общей задачи аппроксимирования, получим различные частные задачи аппроксимирования. Одной из таких частных задач является задача интерполирования функции.

2. Постановка задачи интерполирования функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана своими значениями $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$ на отрезке $[x_0; x_n]$. Требуется отыскать функцию $y = F(x)$, такую, что $F(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}$ на отрезке $[x_0; x_n]$.

Функция $y = f(x)$ называется ***интерполируемой***, функция $y = F(x)$ – ***интерполирующей***, точки x_i $(i = \overline{0, n})$ – узлами интерполяции.

В данном случае ликвидируются первая неопределенность (функция $y = f(x)$ задана таблично) и третья неопределенность (аппроксимирующая функция $y=F(x)$ должна проходить через узлы интерполяции), но не сказано, к какому классу принадлежит функция $y=F(x)$. Такая задача называется ***общей задачей интерполирования***. Ликвидируя вторую неопределенность, получим различные частные задачи интерполирования. Если искать функцию $F(x)$ в виде многочлена $P_n(x)$ степени не выше n, то задача становится однозначной и называется задачей параболической интерполяции.

Требование, чтобы функция $y=F(x)$ была интерполирующей для функции $y=f(x)$ геометрически эквивалентно требованию о том, чтобы графики этих функций пересекались в точках с координатами (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$ (рис. 1).

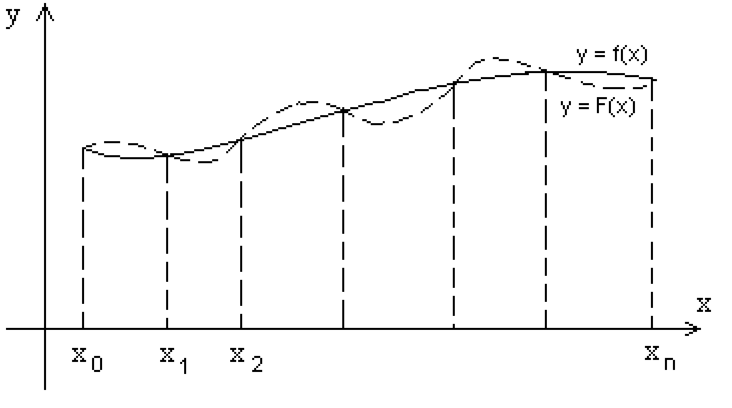


Рис. 1

Интерполирующая функция $y=F(x)$ используется для нахождения приближенного значения функции $y=f(x)$ в точках отрезка $[x_0;x_n]$, отличных от узлов интерполирования. Интерполирующая функция может использоваться и для нахождения значений функции, аргумент которой находится вне отрезка $[x_0;x_n]$. В этом случае задача называется ***экстраполяцией***. Задача интерполирования является обратной задаче табулирования функции, т.к. по таблице значений функции находится её аналитическое выражение.

3. Конечные разности

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично своими значениями $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$ для равноотстоящих значений аргумента $x_{i+1} - x_i = h$, ($x_i = x_0 + i \cdot h$), $i = \overline{0, n}$.

Конечной разностью первого порядка функции $y = f(x)$ в точке x_i называют величину

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad \text{или} \quad \Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

т.е. конечные разности первого порядка – это разности между соседними значениями функции.

Конечной разностью n – го порядка функции $y = f(x)$ в точке x_i называется конечная разность от конечной разности $n-1$ порядка:

$$\Delta^n y_i = \Delta\left(\Delta^{n-1} y_i\right) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i. \qquad (1)$$

По этой формуле можно получить конечные разности различных порядков.

Конечные разности обычно располагаются в виде горизонтальной таблицы, в которой разности располагаются в одной строке с вычитаемым.

i	x_i	y_i	Конечные разности				
			Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	…
0	x_0	y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^4 y_0$	…
1	x_1	y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_1$	…
2	x_2	y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$	…	
3	x_3	y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	…		
4	x_4	y_4	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	…			
5	x_5	y_5	…				
…	…	…					

4. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично своими значениями $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$ для равноотстоящих значений аргумента $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = \overline{0, n}$. Требуется отыскать многочлен $n-$ ой степени $F(x)$, проходящий через узлы интерполяции:

$$F(x_i) = f(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}.$$

Его можно записать в виде:

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \quad (2)$$

Чтобы найти коэффициент a_0, положим в равенстве (2) $x = x_0$:

$$F(x_0) = a_0 = y_0.$$

Найдем a_1, для этого положим в равенстве (2) $x = x_1$:

$$F(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

$$y_1 = y_0 + a_1 \cdot h,$$

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

Полагая, таким образом, значения x равными поочередно:

$$x = x_2, \ x = x_3, \ \dots, \ x = x_n,$$

можно вычислить все остальные коэффициенты этого многочлена:

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}, \quad a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! \cdot h^3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}.$$

Подставляя все найденные коэффициенты в формулу (2), получим:

$$F(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (3)$$

Это первая интерполяционная формула Ньютона.

Заметим, что при $h \to 0$ формула (3) превращается в многочлен Тейлора.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k y_0}{h^k}=\frac{d^k y}{dx^k}(x_0)=y^{(k)}(x_0),$$

$$\lim_{h\to 0}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)=(x-x_0)^n.$$

Отсюда при $h \to 0$ формула (3) принимает вид многочлена Тейлора:

$$F(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Для практического использования интерполяционную формулу Ньютона (3) обычно записывают в несколько преобразованном виде. Для этого введем новую переменную $t=\frac{x-x_0}{h}$, откуда $x=x_0+t\cdot h$. В этом случае получим:

$$\boxed{F(x_0+t\cdot h)=y_0+t\cdot\Delta y_0+\frac{t\cdot(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\ldots+\frac{t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0.} \quad (4)$$

Это и есть окончательный вид ***первой интерполяционной формулы Ньютона***.

Формулу (4) выгодно использовать для интерполирования функции $y=f(x)$ в *окрестности начального значения* x_0, где t мало по абсолютной величине, т.е. когда x и x_0 мало отличаются. Если необходимо найти значение функции из интервала $(x_1;x_2)$, то в качестве x_0 выбирают левый конец интервала, т.е. x_1 и строят новую интерполяционную формулу Ньютона.

Если в формуле (4) положить $n=1$, то получим формулу *линейного интерполирования*: $F(x_0+t\cdot h)=y_0+t\cdot\Delta y_0$.

При $n=2$ будем иметь формулу *параболического* или *квадратичного интерполирования*:

$$F(x_0+t\cdot h)=y_0+t\cdot\Delta y_0+\frac{t\cdot(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Если дана неограниченная таблица значений функции $y = f(x)$, то число n в интерполяционной формуле (4) может быть любым. Практически в этом случае число n выбирают так, чтобы конечная разность $\Delta^n y_i$ была постоянной с заданной степенью точности. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x.

Если таблица значений функции конечна, то число n - ограничено, а именно: n не может быть больше числа значений функции, уменьшенного на единицу.

Пример 1. Приняв шаг $h = 0.05$, построить на отрезке $[3.5; 3.6]$ интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y = e^x$, заданной таблицей:

x	3.45	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70
y	31.500	33.115	34.813	36.598	38.475	40.447

Решение. Составляем таблицу конечных разностей (таблица 1).

Таблица 1

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	3.45	33.500	1.615	0.083	0.004	0.001
1	3.50	33.115	1.698	0.087	0.005	0.002
2	3.55	34.813	1.785	0.092	0.003	
3	3.60	36.598	1.877	0.095		
4	3.65	38.475	1.972			
5	3.70	40.447				

Т.к. разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле (4) полагаем $n = 3$. Приняв $x_0 = 3.50$ (интерполируем на отрезке $[3.5; 3.6]$), будем иметь:

$$F(3.50 + t \cdot 0.05) = 33.115 + 1.698t + 0.087\,\frac{t \cdot (t-1)}{2!} + 0.005\frac{t \cdot (t-1) \cdot (t-2)}{3!},$$

$$F(3.50 + t \cdot 0.05) = 33.115 + 1.698 \cdot t + 0.0435 \cdot t \cdot (t-1) + 0.00083 \cdot t \cdot (t-1) \cdot (t-2),$$

где $t = \dfrac{x - 3.50}{0.05} = 20(x - 3.5)$.

Итак, первая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования вблизи левого конца таблицы – для ***интерполирования вперед*** и для вычислений x, лежащих вне отрезка за левым концом – ***экстраполирования назад***.

Для интерполирования значений вблизи правого конца таблицы применяется вторая интерполяционная формула Ньютона.

5. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Для получения второй интерполяционной формулы Ньютона нужно представить искомый многочлен в виде:

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1). \quad (5)$$

Полагая значения x в формуле (5) равными поочередно:

$$x = x_n, \; x = x_{n-1}, \; \ldots, \; x = x_0,$$

можно вычислить все коэффициенты этого многочлена:

$$a_0 = y_n, \; a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1! \cdot h}, \; \ldots, \; a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! \cdot h^k}, \; \ldots, \; a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}.$$

Если подставить найденные коэффициенты в формулу (5), получится вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$F(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! \cdot h}(x - x_n) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! \cdot h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1), \quad (6)$$

которую называют ***последовательностью приближений или итерационной последовательностью*** *(от лат. iteratio - повторение).*

Введем более удобную запись формулы (6). Пусть $t = \frac{x - x_n}{h}$, откуда $x = x_n + t \cdot h$. В этом случае получим:

$$\boxed{F(x_0 + t \cdot h) = y_n + t \cdot \Delta y_{n-1} + \frac{t \cdot (t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t + (n-1))}{n!}\Delta^n y_0.} \quad (7)$$

Это и есть обычный вид ***второй интерполяционной формулы Ньютона***.

Вторая интерполяционная формула Ньютона применяется при построении многочленов для узлов, расположенных ближе к правому концу таблицы (интерполирование назад) и для узлов, расположенных вне таблицы за правым концом (экстраполирование вперед).

Пример 2. Пользуясь таблицей 1, вычислить значение функции для $x = 3.67$.

Решение. Т.к. $x \in [3.65; 3.70]$, то, приняв $x_n = 3.70$, будем иметь:

$$F(3.70 + t \cdot 0.05) = 40.447 + 1.972 \cdot t + 0.095 \cdot \frac{t \cdot (t+1)}{2!} + 0.003 \cdot \frac{t \cdot (t+1) \cdot (t+2)}{3!},$$

где $t = \dfrac{x - 3.70}{0.05} = 20(x - 3.7) = 20(3.67 - 3.7) = -0.6$.

$$F(3.67) = 40.447 + 1.972 \cdot (-0.6) + 0.095 \cdot \frac{(-0.6) \cdot (-0.6+1)}{2!} +$$

$$+ 0.003 \cdot \frac{(-0.6) \cdot (-0.6+1) \cdot (-0.6+2)}{3!} = 39.252136.$$

6. Оценка погрешности интерполяционных формул Ньютона

Задача интерполирования состоит в отыскании многочлена $F(x)$ степени n, совпадающего в узлах интерполяции с функцией $y = f(x)$, т.е.

$$F(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}.$$

Если заданная функция сама является многочленом n-ой степени, то имеет место тождественное совпадение $F(x) \equiv f(x)$, но в общем случае для разных функций в точках, отличных от узлов интерполяции, разность $f(x) - F(x) = R_k(x)$ отлична от нуля и представляет собой погрешность, которую называют остаточным членом.

Если аналитическое выражение функции $y = f(x)$ задано, то остаточный член первой интерполяционной формулы имеет вид:

$$R_k(x) = f^{(k+1)}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{h^{k+1} \cdot t \cdot (t-1) \cdot \ldots \cdot (t-k)}{(k+1)!},$$

где $\boldsymbol{\xi}$ – промежуточная точка между узлами интерполирования $x_0, x_1, ..., x_n$ и точкой x, т.е. для интерполирования $\boldsymbol{\xi} \in [x_0; x_n]$ при экстраполировании возможно, что $\boldsymbol{\xi} \notin [x_0; x_n]$.

Остаточный член второй интерполяционной формулы имеет вид:

$$R_k(x) = f^{(k+1)}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{h^{k+1} \cdot t \cdot (t+1) \cdot ... \cdot (t+k)}{(k+1)!}.$$

Если аналитическое выражение функции не задано, то остаточный член $R_k(x)$ для первой формулы Ньютона можно получить, воспользовавшись приближенным равенством:

$$f^{(k+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}},$$

тогда

$$R_k(x) = \frac{t \cdot (t-1) \cdot ... \cdot (t-k)}{(k+1)!} \cdot \Delta^{k+1} y_0. \qquad (8)$$

Аналогично можно получить выражение остаточного члена для второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$f^{(k+1)}(x) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_{n-(k+1)}}{h^{k+1}},$$

где n - количество узлов интерполирования, уменьшенное на единицу.

Для остаточного члена второй интерполяционной формулы Ньютона получим:

$$R_k(x) = \frac{t \cdot (t+1) \cdot ... \cdot (t+n)}{(n+1)!} \cdot \Delta^{k+1} y_{n-(k+1)}. \qquad (9)$$

Учитывая равенства (8) и (9), можно сказать, что, обрывая формулы Ньютона на каком-то члене, мы совершаем ошибку (ошибку усечения), величина которой имеет порядок первого отбрасываемого члена (при этом предполагается, что у функции $y = f(x)$ отсутствуют быстро колеблющиеся составляющие, т.е. составляющие с периодом колебаний меньшим или равным шагу таблицы h.

Пример 3. Используя данные примера 2, оценить погрешность интерполяции в точке $x = 3.67$.

Решение. В примере 2 было найдено с помощью второго интерполяционного многочлена третьей степени значение функции в точке $x = 3.67$:

$$F(3.67) = 39.252136\,.$$

При этом ошибка, допускаемая при интерполировании, не будет по абсолютной величине превосходить первого отбрасываемого члена формулы Ньютона:

$$R_3(x) = \frac{t\cdot(t+1)\cdot(t+2)\cdot(t+3)}{(3+1)!}\cdot\Delta^{3+1}y_{5-(3+1)},$$

т.е. $\Delta \le \left|\dfrac{-0.6\cdot(-0.6+1)\cdot(-0.6+2)\cdot(-0.6+3)}{4!}\cdot 0.002\right| = |-0.0000672| < 0.0001$

В этом случае $F(3.67) = 39.2521 \pm 0.0001$.

Пример 4. Функция задана таблично:

x	1	1,5	2
y	3	3,5	5

Построить интерполяционный многочлен Ньютона 2-й степени.
Решение. Многочлен второй степени можно представить в виде:

$$F(x) = Ax^2 + Bx + C\,.$$

Для нахождения коэффициентов используем задачу интерполирования: интерполирующая функция проходит через узлы интерполяции: $F(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,\,2}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B + C = 3 \\ A\cdot\dfrac{9}{4} + B\cdot\dfrac{3}{2} + C = 3{,}5 \\ A\cdot 4 + B\cdot 2 + C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 3 \\ 9\cdot A + 6\cdot B + 3\cdot C = 14 \\ 4\cdot A + 2\cdot B + C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 4 & 14 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -13 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 3 \\ -3\cdot B - 5\cdot C = -13 \\ \qquad\qquad C = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -4 \\ C = 5 \end{cases}.$$

$F(x) = 2x^2 - 4x + 5$ - искомый интерполяционный многочлен.

ВЫПОЛНЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Задание

1. С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значение функции

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.04	1.19	1.34	1.49	1.64	1.79	1.94	2.09
y_i	2.0306	2.1394	2.26	2.3995	2.5585	2.7444	2.9659	3.2356

в точках $x1 = 1.12$, $x2 = 2.13$ и определить погрешность интерполирования в окрестностях этих точек.

2. Найти значение функции в этих же точках, используя встроенную функцию MathCAD.

Указания по реализации вычислений приближенных значений функций с помощью интерполирования многочленами Ньютона

Определяем интерполируемую функцию. Для этого задаем:

• в строчной матрице ***y*** значения данной функции;

• количество узлов интерполяции ***n_uzl*** (т.е. количество значений переменной ***x*** без единицы, т.к. нумерация начинается с нуля);

• начальное значение аргумента ***x*0**;

• шаг таблицы ***h***:

$$y := (2.0306 \quad 2.1394 \quad 2.2613 \quad 2.3995 \quad 2.5585 \quad 2.7444 \quad 2.9659 \quad 3.2356)$$

$$n\_uzl := 7$$

$$x0 := 1.04$$

$$h := 0.15$$

Для данной функции найдем конечные разности и занесем полученные значения в матрицу ***M***:

- зададим счетчик ***i*** строк и столбцов в матрице, начиная с нуля;
- в нулевой столбец матрицы $M_{i,\,0}$ помещаем значения аргумента x;
- в первый столбец матрицы $M^{<1>}$ помещаем значения матрицы ***y***.

$$i := 0 \,..\, n\_uzl$$

$$M_{i,0} := x0 + i \cdot h$$

$$M^{<1>} := y^T$$

С помощью вспомогательной матрицы ***B*** запрограммируем конечные разности, для расчета которых определим функцию ***g(B)*** (панель ***программирование***):

$$g(B) := \left| \begin{array}{l} for\ n \in 1..n\_uzl \\ \quad for\ k \in 0..n\_uzl - n \\ \quad\quad B_{k,n+1} \leftarrow B_{k+1,n} - B_{k,n} \\ B \end{array} \right.$$

$$M := g(M)$$

M=

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$	$\Delta^7 y_i$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1.04	2.0306	0.1088	0.0131	$3.2\cdot10^{-3}$	$1.3\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-4}$	$-4\cdot10^{-4}$
1	1.19	2.1394	0.1219	0.0163	$4.5\cdot10^{-3}$	$1.6\cdot10^{-3}$	$10\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-4}$	0
2	1.34	2.2613	0.1382	0.0208	$6.1\cdot10^{-3}$	$2.6\cdot10^{-3}$	$1.3\cdot10^{-3}$	0	0
3	1.49	2.3995	0.159	0.0269	$8.7\cdot10^{-3}$	$3.9\cdot10^{-3}$	0	0	0
4	1.64	2.5585	0.1859	0.0356	0.0126	0	0	0	0
5	1.79	2.7444	0.2215	0.0482	0	0	0	0	0
6	1.94	2.9659	0.2697	0	0	0	0	0	0
7	2.09	3.2356	0	0	0	0	0	0	0

По таблице разностей определяем степень многочленов интерполяции – конечные разности четвертого порядка практически постоянны, поэтому составим интерполяционные многочлены Ньютона четвертого порядка:

- задаем степень ***n*** многочленов;
- задаем номер строки ***k*** нулевого приближения (номер отрезка, которому принадлежит ***x*1**);
- в качестве ***x*0** выбираем начало отрезка $M_{k,0}$;

$$n := 4$$
$$k := 0$$
$$x0 := M_{k,0}$$

- программируем первую интерполяционную формулу ***F_1(x)***;
- составляем соответствующую формулу остаточного члена ***R_1(x)***;
- задаем первое значение аргумента ***x*1**;
- определяем значение функции ***F_1(x1)***;
- вычисляем погрешность найденного значения ***R_1(x1)***;

$$F\_1(x) := M_{k,1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{x - x0}{h} - j \right) \right] \cdot \frac{M_{k,i+1}}{i!}$$

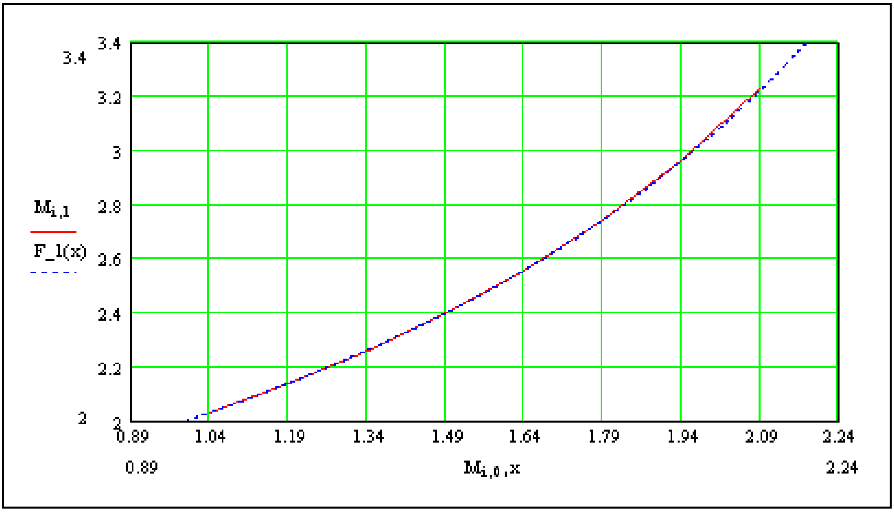
$$R\_1(x) := \left[\prod_{j=0}^{n} \left(\frac{x - x0}{h} - j \right) \right] \cdot \frac{M_{k,n+2}}{(n+1)!}$$

$$x1 := 1.12$$

$$F\_1(x1) = 2.065551$$

$$R\_1(x1) = 7.80 \cdot 10^{-6}$$

- построим графики интерполируемой функции и интерполирующей функции, основанной на первой формуле Ньютона в одной системе координат:



Вывод: $F(1.12) = 2.06555 \pm 0.00001$.

Для второго значения аргумента, лежащего ближе к концу таблицы, составляем вторую интерполяционную формулу Ньютона:

- задаем номер строки ***k*** нулевого приближения;
- в качестве ***xn*** выбираем конец отрезка $M_{k,0}$;
- программируем вторую интерполяционную формулу ***F_2(x)***;
- составляем соответствующую формулу остаточного члена ***R_2(x)***;
- задаем второе значение аргумента ***x*2**;
- определяем значение функции ***F_2(x2)***;
- вычисляем погрешность найденного значения ***R_2(x2)***;

$$k := n\_uzl$$

$$xn := M_{k,0}$$

$$F\_2(x) := M_{k,1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}\left(\frac{x-xn}{h}+j\right)\right]\cdot\frac{M_{k-i,i+1}}{i!}$$

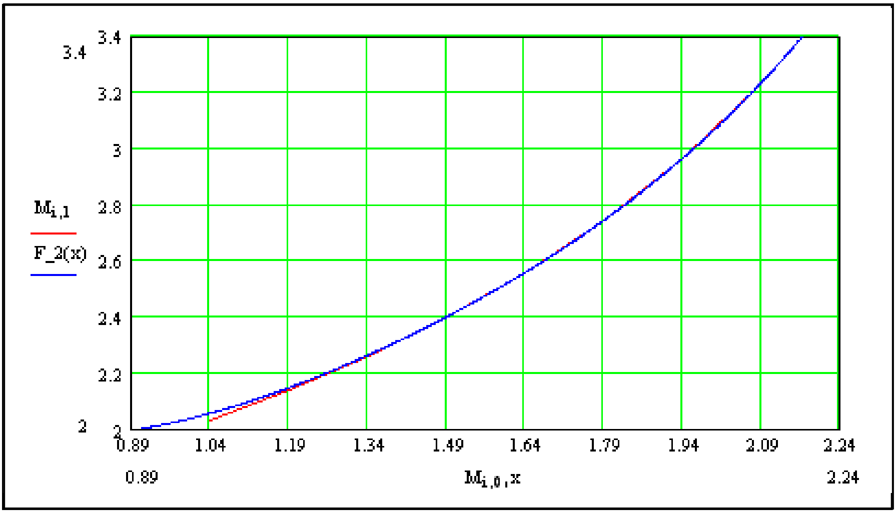
$$R\_2(x) := \left[\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{x-xn}{h}+j\right)\right]\cdot\frac{M_{k-(n+1),n+2}}{(n+1)!}$$

$$x2 := 2.13$$

$$F\_2(x2) = 3.317647$$

$$R\_2(x2) = 1.16\cdot 10^{-4}$$

- построим графики интерполируемой функции и интерполирующей функции, основанной на второй формуле Ньютона в одной системе координат:



Вывод: $F(2.13) = 3.318 \pm 0.0001$.

Использование встроенной функции MathCad interp(…) для кубической сплайн-интерполяции

Для нахождения значений функции в точках $x1 = 1.12$, $x2 = 2.13$ с помощью встроенных функций MathCad:

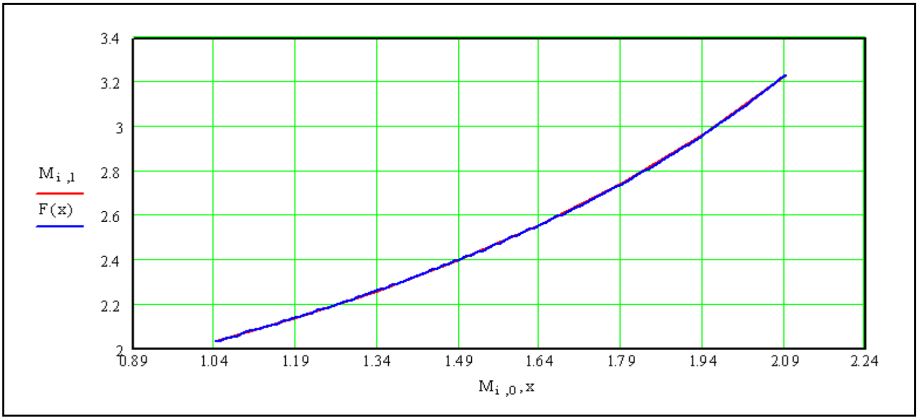
- находим вспомогательную величину для приближения к кубическому многочлену с помощью функции ***cspline(X, Y)***, которая возвращает столбец вторых производных;
- задаем интерполирующую функцию с помощью функции ***interp(S, X, Y, x)***, которая определяет коэффициенты кубического сплайна и возвращает интерполирующую функцию;
- вычисляем значения функции в заданных точках;

$$S := cspline(M^{<0>}, M^{<1>})$$

$$F(x) := interp(S, M^{<0>}, M^{<1>}, x)$$

$$F(1.12) = 2.087175 \qquad F(2.13) = 3.317381$$

- построим графики интерполируемой и интерполирующей функций в одной системе координат.



ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

1. В каких случаях используется аппроксимация функций?
2. В чем заключается общая задача аппроксимирования функций? Неопределенности общей задачи аппроксимирования.
3. Постановка задачи интерполирования функций.
4. В чем отличие интерполирования и экстраполирования?
5. Понятия конечных разностей 1-го, 2-го, 3-го и n-го порядков.
6. Что называется шагом таблицы?
7. Первая интерполяционная формула Ньютона, смысл входящих параметров. Когда применяется эта формула?
8. Доказать справедливость формулы $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2}$ - коэффициента первой интерполяционной формулы Ньютона.
9. Вторая интерполяционная формула Ньютона, смысл входящих параметров и ее применение.
10. Доказать справедливость формулы $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! \cdot h^2}$ - коэффициента второй интерполяционной формулы Ньютона.
11. Как определить степень многочлена интерполяции в неограниченной таблице?
12. Как выбирают x_0 и x_n в интерполяционных формулах?
13. Как оценивается ошибка интерполяции по формулам Ньютона?
14. Построить интерполяционный многочлен Ньютона 2-й степени для функции, заданной таблично:

x	1	2,5	4
y	2	3,5	14

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задание

1. С помощью интерполяционных формул Ньютона найти значение функции в точках $x1$, $x2$ и определить погрешность интерполирования в окрестностях этих точек.
2. Найти значение функции в этих же точках, используя встроенную функцию MathCAD.

Вариант 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80
y_i	3.0042	3.3201	3.6693	4.0552	4.4817	4.9530	5.4739	6.0496
	x1=1.17				x2=1.83			

Вариант 2

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.60	1.80	2.0	2.20	2.40	2.60	2.80	3.0
y_i	0.2019	0.1653	0.1353	0.1108	0.0907	0.0742	0.0608	0.0497
	x1=1.83				x2=3.32			

Вариант 3

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4.	3.5	3.6	3.7
y_i	0.0497	0.0450	0.0407	0.0368	0.0333	0.0302	0.0273	0.0247
	x1=2.97				x2=3.62			

Вариант 4

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y_i	0.4006	0.6931	0.9163	1.0986	1.2528	1.3863	1.5041	1.6094
	x1=1.47				x2=4.44			

Вариант 5

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
y_i	1.2528	1.3863	1.5041	1.6094	1.7047	1.7918	1.8718	1.9459
	x1=3.72				x2=7.02			

Вариант 6

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.0
y_i	3.6693	4.0552	4.4817	4.9530	5.4739	6.0496	6.6859	7.3891
	x1=1.42				x2=2.05			

Вариант 7

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	7.0	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4
y_i	1.9459	1.9741	2.0015	2.0281	2.0541	2.0794	2.1041	2.1282
	x1=6.99				x2=8.415			

Вариант 8

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85
y_i	0.3829	0.4177	0.4515	0.4843	0.5161	0.5467	0.5763	0.6047
	x1=0.56				x2=0.859			

Вариант 9

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
y_i	0.6827	0.7287	0.7699	0.8064	0.8385	0.8664	0.8904	0.9109
	x1=0.09				x2=1.52			

Вариант 10

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.80	1.83	1.86	1.89	1.92	1.95	1.98	2.01
y_i	0.9281	0.9328	0.9371	0.9412	0.9451	0.9488	0.9523	0.9643
	x1=1.819				x2=2.013			

Вариант 11

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
y_i	0.8415	0.8912	0.9320	0.9636	0.9854	0.9975	0.9996	1.0017
	x1=0.97				x2=1.62			

Вариант 12

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
y_i	1.0296	1.1383	1.2602	1.3984	1.5574	1.7433	1.9648	2.2345
	x1=0.88				x2=1.18			

Вариант 13

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.25	1.27	1.29	1.31	1.33	1.35	1.37	1.39
y_i	3.0096	3.2236	3.4672	3.7471	4.0723	4.4552	4.9131	5.4707
	x1=1.23				x2=1.378			

Вариант 14

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
y_i	0.6967	0.6600	0.6216	0.5817	0.5403	0.4976	0.4536	0.4085
	x1=0.84				x2=1.159			

Вариант 15

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	2.00	2.15	2.30	2.45	2.60	2.75	2.90	3.05
y_i	0.9545	0.9684	0.9786	0.9857	0.9907	0.9940	0.9963	1.0014
	x1=2.17				x2=3.12			

Вариант 16

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
y_i	1.5431	1.6038	1.6685	1.7374	1.8107	1.8884	1.9709	2.0583
	x1=1.03				x2=1.37			

Вариант 17

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
y_i	1.2214	1.2840	1.3499	1.4147	1.4918	1.5683	1.6487	1.7333
	x1=0.18				x2=0.52			

Вариант 18

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
y_i	0.9048	0.8647	0.8187	0.7788	0.7408	0.7047	0.6703	0.6376
	x1=0.089				x2=0.42			

Вариант 19

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	0.0998	0.1987	0.2995	0.3894	0.4794	0.5646	0.6442	0.7174
	x1=0.12				x2=0.82			

Вариант 20

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
y_i	1.3356	1.4208	1.5095	1.6019	1.6984	1.7991	1.9043	2.0143
	x1=1.12				x2=1.47			

Вариант 21

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
y_i	0.8253	0.7648	0.6967	0.6216	0.5403	0.4536	0.3624	0.2675
	x1=0.61				x2=1.32			

Вариант 22

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
y_i	1.1052	1.2214	1.3499	1.4919	1.6487	1.8221	2.0138	2.2255
	x1=0.19				x2=0.83			

Вариант 23

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2
y_i	1.2528	1.2809	1.3089	1.3350	1.3610	1.3863	1.4110	1.4351
	x1=3.57				x2=4.22			

Вариант 24

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	4.5	4.7	4.9	5.1	5.3	5.5	5.7	5.9
y_i	1.5041	1.5476	1.5892	1.6292	1.6677	1.7047	1.7405	1.7750
	x1=4.49				x2=5.62			

Вариант 25

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	8.0	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7
y_i	2.0794	2.0919	2.1041	2.1163	2.1282	2.1401	2.1518	2.1633
	x1=8.04				x2=8.78			

Вариант 26

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
y_i	0.0597	0.0550	0.0507	0.0468	0.0433	0.0402	0.0373	0.0347
	x1=3.07				x2=3.72			

Вариант 27

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	6.0	6.2	6.4	6.6	6.8	7.0	7.2	7.4
y_i	2.9459	2.9741	3.0015	3.0281	3.0541	3.0794	3.1041	3.1382
	x1=6.07				x2=7.44			

Вариант 28

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85
y_i	2.3829	2.4177	2.4515	2.4843	2.5161	2.5467	2.5763	2.6047
	x1=1.53				x2=1.87			

Вариант 29

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
y_i	0.7827	0.8287	0.8699	0.9064	0.9385	0.9664	0.9904	1.0109
	x1=2.17				x2=2.72			

Вариант 30

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	2.80	2.83	2.86	2.89	2.92	2.95	2.98	3.01
y_i	0.7281	0.7328	0.7371	0.7412	0.7451	0.7488	0.7523	0.7564
	x1=2.82				x2=3.12			

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонова В.Н. Методические указания к выполнению лабораторной работы “Решение нелинейных уравнений” по курсу “Высшая математика”. –Курган: Изд-во КГУ, 1990.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М. Численные методы. –М.: Наука, 1987.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1, 2. –М.: Наука, 1966.
4. Вержбицкий В.М. Численные методы: Линейная алгебра и нелинейные уравнения. –М.: Оникс 21 век, 2005.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. –М.: Наука, 1970.
6. Дьяконов В. MathCAD 8/2000. Специальный справочник. -СПб.: - Петербург, 2001.
7. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. –М.: Просвещение, 1991.
8. Кирьянов В.Д. Самоучитель MathCAD 2001. -СПб.: БХВ - Петербург, 2002.
9. Лапчик М.П. Численные методы: Учеб. пособие для студентов вузов. –М.: Издательский центр «Академия», 2004.

СОДЕРЖАНИЕ

Тен Эльвира Анатольевна

Леванова Инна Леонидовна

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения лабораторной работы № 3
по курсу математики для студентов специальностей

050501, 140211, 150202, 151001, 151002, 190201, 190202,

190601, 190603, 190702, 200503, 220301, 260601, 280101

Редактор Т.В. Тимофеева

Подписано в печать	Формат 60х 84/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 1,75	Уч. - изд. л. 1,75
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.