МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

I курс I и II семестр

Курган 2010

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования
Курс: «Математика»
Составила: доцент кафедры ПМиКМ В.Н. Агафонова
Контрольные задания составлены на основе учебных программ по курсу «Математика».
Утверждены на заседании кафедры «_3__» _июля__2009_ г.
Рекомендованы методическим советом университета «_18__» _января_ 2010 г.

Введение

Данные контрольные задания предназначены для выполнения студентами заочной формы обучения технических специальностей по Математике. Они составлены в соответствии с программой и охватывают следующие разделы курса:

Контрольная работа 1 содержит задачи по темам: «Элементы линейной алгебры», «Векторной алгебры и аналитической геометрии».

Контрольная работа 2 содержит задачи по темам: «Введение в математический анализ», «Непрерывность и точки разрыва функции».

Контрольная работа 3 содержит задачи по теме: «Производная функции и ее приложения».

Контрольная работа 4 содержит задачи по темам: «Функции многих переменных», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл, его приложения».

В I семестре выполняются **контрольные работы 1, 2.**

Во II семестре – контрольные работы 3, 4.

Ниже приводятся таблицы с номерами задач, входящих в контрольные работы в соответствии с вариантом.

Студент должен выполнить вариант, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (номера зачетной книжки), если последняя цифра 0, то нужно решить задачи с №10, 20, 30 и т.д.

№ вар.	**Номера задач для контрольных работ**								
	№ 1					**№ 2**			
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

№ вар.	Номера задач для контрольных работ											
	№ 3						№ 4					
1	91	101	111	121	131	141	151	161	171	181	191	201
2	92	102	112	122	132	142	152	162	172	182	192	202
3	93	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	203
4	94	104	114	124	134	144	154	164	174	184	194	204
5	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205
6	96	106	116	126	136	146	156	166	176	186	196	206
7	97	107	117	127	137	147	157	167	177	187	197	207
8	98	108	118	128	138	148	158	168	178	188	198	208
9	99	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199	209
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210

ПРОГРАММА КУРСА МАТЕМАТИКИ

I курс I семестр

I. Элементы линейной алгебры

1. Матрицы. Основные понятия. Действия над матрицами.
2. Определители 2-го и 3-го порядков, их вычисление. Свойства определителей. Понятие минора и алгебраического дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Понятие определителя n - го порядка.
3. Решение и исследование систем линейных уравнений. Формулы Крамера. Однородные системы.
4. Ранг матрицы, его вычисление. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Решение и исследование систем линейных уравнений методом Гаусса.
6. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условия ее существования. Вычисление обратной матрицы и применение ее к решению систем линейных уравнений.

II. Элементы векторной алгебры

1. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами (сложение, вычитание, умножение на число), их свойства.
2. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Модуль вектора. Направляющие косинусы вектора, их свойства.
3. Линейно зависимые и независимые векторы. Базис векторов. Разложение вектора по базису.

4. Действия с векторами в координатной форме. Условие коллинеарности двух векторов.
5. Скалярное произведение векторов, его свойства. Вычисление скалярного произведения в координатной форме. Условие перпендикулярности двух векторов. Угол между векторами.
6. Векторное произведение векторов, его свойства. Геометрический смысл векторного произведения.
7. Векторное произведение в координатной форме.
8. Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов, его геометрический смысл, свойства, вычисление в координатной форме. Условие компланарности 3-х векторов.

III. Элементы аналитической геометрии

1. Простейшие задачи аналитической геометрии:

   а) расстояние между двумя точками;

   б) деление отрезка в данном отношении.
2. Понятие об уравнении линии. Прямая на плоскости.

   Различные формы уравнения прямой:

   а) общее уравнение прямой;

   б) уравнение прямой в отрезках;

   в) уравнение прямой, проходящей через две точки;

   г) уравнение с угловым коэффициентом;

   д) уравнение прямой, проходящей через точку с заданным угловым коэффициентом;

   е) нормальное уравнение прямой. Приведение общего уравнения к нормальному виду.
3. Отклонение и расстояние точки от прямой, их вычисления.
4. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
5. Плоскость в пространстве. Различные формы уравнения плоскости в пространстве:

   а) общее уравнение плоскости;

   б) уравнение плоскости в отрезках;

   в) уравнение плоскости проходящей через три точки;

   г) нормальное уравнение плоскости, применение его к решению задач.
6. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности 2-х плоскостей.

7. Прямая в пространстве. Различные формы уравнения прямой в пространстве:

а) канонические уравнения прямой;

б) параметрические уравнения;

в) общее уравнение прямой;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки.

8. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Угол между прямой и плоскостью.
10. Окружность, определение, каноническое уравнение, его особенности.
11. Эллипс, определение. Каноническое уравнение (вывод), его особенности. Геометрический смысл параметров, связь между ними. Эксцентриситет.
12. Гипербола. Определение, каноническое уравнение гиперболы (вывод), его особенности. Геометрический смысл параметров, связь между ними. Эксцентриситет.
13. Асимптоты, гиперболы.
14. Парабола. Определение, каноническое уравнение (вывод), его особенности. Смысл входящих параметров.
15. Полярная система координат. Полярные координаты точки. Связь декартовых координат с полярными.

Контрольная работа № 1

IV. Введение в математический анализ

1. Постоянные и переменные величины. Множества. Числовые промежутки (отрезок, интервал). Модуль числа. Свойства модулей.
2. Зависимые и независимые переменные. Определение функции, способы задания функции. Область определения. Символы математической логики (кванторы).
3. Графики основных элементарных функций; ($y = x^{\mathbf{n}}$**,** $y = \boldsymbol{a}^{x}$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и т. д.). Построения графиков. Основные правила преобразований. Построение графиков путем деформации и сдвига.
4. Последовательность. Монотонные последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности.
5. Предел последовательности (определение, геометрическая иллюстрация).
6. Основные теоремы о последовательностях, имеющих конечный предел. (О единственности предела, об ограниченности последовательности, имеющей конечный предел; критерий сходимости последовательности; теорема,

связывающая пределы трех последовательностей, две из которых имеют одинаковый предел.)

7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
8. Основные теоремы о пределах.
9. Теоремы о пределах (предел суммы, произведения, частного двух последовательностей).
10. Предел функции. Определение, геометрическая иллюстрация. Бесконечно большие и бесконечно малые функции, их пределы.
11. Односторонние пределы. Признак существования предела функции в точке.
12. Первый замечательный предел.
13. Второй замечательный предел.
14. Предел показательно-степенных функций.
15. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые, их применение при вычислении пределов.
16. Непрерывность функции в точке и на отрезке. Точки разрыва, их классификация.

Контрольная работа № 2

I курс II семестр

V. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции. Определение, геометрический и механический смысл. Задачи, приводящие к понятию производной.
2. Основные теоремы о производных.
3. Производная степенной функции (вывести формулу для целого, положительного n).
4. Производная показательной функции (вывод).
5. Производная логарифмической функции (вывод).
6. Производные синуса и косинуса (вывод).
7. Производная тангенса и котангенса.
8. Производная сложной функции.
9. Обратная функция, ее производная. Теорема о существовании производной обратной функции (доказать).
10. Производные от обратных тригонометрических функций (вывести для арксинуса).
11. Производная от функций, заданных неявно и параметрически. Производная показательно - степенных функций.
12. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Производные высших порядков от параметрических функций.

13. Дифференцируемые функции. Теорема о дифференцируемости функций в точке (необходимость и достаточность). Доказать.
14. Дифференциал функции. Определение, вычисление, геометрический смысл.
15. Основные формулы и правила дифференцирования.
16. Инвариантность формы дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
17. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.
18. Дифференциалы высших порядков.

VI. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков

1. Условия возрастания и убывания функций на интервале. Экстремум функции. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции непрерывной на отрезке.
2. Выпуклость и вогнутость графика функции на интервале. Точки перегиба.
3. Асимптоты графика функции.
4. Общая схема исследования функции и построение ее графика.
5. Уравнение касательной и нормали к кривой.

Контрольная работа № 3

VII. Функции нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции двух переменных. Непрерывность.
2. Частные производные, их геометрический смысл.
3. Дифференцируемость функции. Полный дифференциал, его геометрический смысл. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Касательная и нормальная плоскость к пространственной кривой.
5. Дифференцирование сложных функций, функций, заданных неявно.
6. Частные производные высших порядков.
7. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия существования экстремума. Условный экстремум.
8. Наибольшее и наименьшее значения функций двух переменных в замкнутой области.
9. Производная по направлению. Градиент. Связь между ними.

VIII. Элементы высшей алгебры

1. Комплексные числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Геометрическое представление комплексного числа.

2. Действия с комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах.
3. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Формула Муавра. Решение двучленных уравнений.
4. Многочлены. Теоремы Безу. Корни многочлена. Основная теорема алгебры (без доказательства). Разложение многочлена на множители.

IX. Интегральное исчисление функции одной переменной

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Теоремы о первообразных.
2. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование.
3. Основные методы интегрирования. (Метод замены переменной, подведение множителя под знак дифференциала, интегрирование по частям).
4. Интегрирование выражений, содержащих в знаменателе квадратный трехчлен.
5. Интегрирование рациональных дробей. Разложение дроби на простейшие.
6. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. (Интегрирование нечетных и четных степеней синуса и косинуса. Подстановки $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\mathrm{tg}\, x = t$. Универсальная тригонометрическая подстановка $\mathrm{tg}\, x/2 = t$.)
7. Интегрирование простейших иррациональных функций. Применение тригонометрических подстановок для вычисления интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$.
8. Поверхности II порядка. Поверхности вращения. Правило получения уравнения поверхности вращения (вывод). Виды поверхностей II порядка: эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, цилиндрические поверхности, их канонические уравнения и их особенности.

X. Определенный интеграл

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, его определение и основные свойства. Теорема существования определенного интеграла. Теорема об оценке определенного интеграла. Теорема о среднем.
2. Вычисление определенного интеграла. Теорема о производной интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
4. Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами, их вычисление. Интегралы от разрывных функций, их вычисление. Теоремы об оценке несобственных интегралов.
5. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.
6. Приложение определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме.

7. Приложение определенного интеграла к вычислению длины дуги плоской кривой (в декартовых, полярных координатах, в параметрической форме).
8. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений с помощью определенного интеграла. Вычисление объемов тел вращения, поверхности вращения.
9. Приложения определенного интеграла к решению физических задач. (Вычисление работы переменной силы, статических моментов, моментов инерции, центра тяжести плоских фигур и дуг).

Контрольная работа № 1

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Векторная алгебра.

1–10. Даны векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$; $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$; $\vec{c} = \{c_1; c_2; c_3\}$; $\vec{d} = \{d_1; d_2; d_3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

1. $\vec{a} = \{1;2;3\}$; $\vec{b} = \{-1;3;2\}$; $\vec{c} = \{7;-3;5\}$; $\vec{d} = \{6;10;17\}$.

2. $\vec{a} = \{4;7;8\}$; $\vec{b} = \{9;1;3\}$; $\vec{c} = \{2;-4;1\}$; $\vec{d} = \{1;-13;-13\}$.

3. $\vec{a} = \{8;2;3\}$; $\vec{b} = \{4;6;10\}$; $\vec{c} = \{3;-2;1\}$; $\vec{d} = \{7;4;11\}$.

4. $\vec{a} = \{10;3;1\}$; $\vec{b} = \{1;4;2\}$; $\vec{c} = \{3;9;2\}$; $\vec{d} = \{19;30;7\}$.

5. $\vec{a} = \{2;4;1\}$; $\vec{b} = \{1;3;6\}$; $\vec{c} = \{5;3;1\}$; $\vec{d} = \{24;20;6\}$.

6. $\vec{a} = \{1;7;3\}$; $\vec{b} = \{3;4;2\}$; $\vec{c} = \{4;8;5\}$; $\vec{d} = \{7;32;14\}$.

7. $\vec{a} = \{1;-2;3\}$; $\vec{b} = \{4;7;2\}$; $\vec{c} = \{6;4;2\}$; $\vec{d} = \{14;18;6\}$.

8. $\vec{a} = \{1;4;3\}$; $\vec{b} = \{6;8;5\}$; $\vec{c} = \{3;1;4\}$; $\vec{d} = \{21;18;33\}$.

9. $\vec{a} = \{2;7;3\}$; $\vec{b} = \{3;1;8\}$; $\vec{c} = \{2;-7;4\}$; $\vec{d} = \{16;14;27\}$.

10. $\vec{a} = \{7;2;1\}$; $\vec{b} = \{4;3;5\}$; $\vec{c} = \{3;4;-2\}$; $\vec{d} = \{2;-5;-13\}$.

11–20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

1) найти: длину ребра A_1A_2 ;

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) площадь грани $A_1A_2A_3$;

4) объем пирамиды;

5) уравнение прямой A_1A_2;

6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

7) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

8) угол между ребром A_1A_4 и плоскостью $A_1\ A_2\ A_3$. Сделать чертеж.

11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.

12. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;4)$.

13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10;)$, $A_4(7;5;9)$.

14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.

15. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.

16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.

17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.

18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$.

19. $A_1(8;6;4)$,$A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$.

20. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

21 – 30. Найти точку M_1, симметричную точке M относительно плоскости

21. M (-1; 0; -1), $2x + 6y – 2z + 11 = 0$.

22. M (0; 2; 1), $2x + 4y – 3 = 0$.

23. M (2; 1; 0), $y + z + 2 = 0$.

24. M (-1; 2; 0), $4x – 5y – z – 7 = 0$.

25. M (2; -1; 1), $x – y + 2z – 2 = 0$.

26. M (1; 1; 1), $x + 4y + 3z + 5 = 0$.

27. M (1; 2; 3), $2x + 10y + 10z – 1 = 0$.

28. M (1; 0; -1), $2y + 4z – 1 = 0$.

29. M (3; -3; -1), $2x – 4y – 4z – 13 = 0$.

30. M (-2; -3; 0), $x + 5y + 4 = 0$.

31–40. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

31. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

33. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

41–50. Дана линия своим уравнением в полярной системе координат $r = r(\varphi)$. Требуется:

1) построить линию по точкам, давая φ значения через $\pi/6$, начиная с $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$.

2) найти уравнение этой линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс с полярной осью.

41. $r = 2\,(1+\cos\varphi)$.

42. $r = 3(1-\cos\varphi)$.

43. $r = 4\sin\varphi$.

44. $r = 2\cos\varphi$.

45. $r = 2\,(1-\sin\varphi)$.

46. $r = 4\cos\varphi$.

47. $r = 2\sin 2\varphi$.

48. $r = 3(1+\sin\varphi)$.

49. $r = \cos 2\varphi$.

50. $r = 8\sin\varphi$.

Контрольная работа № 2

Графики элементарных функций, введение в математический анализ, непрерывность и точки разрыва функции.

51–55. Построить график функции y = A sin(ax + b) преобразованием графика функции y = sin x.

Замечание. При решении задачи написать все пункты преобразования исходного графика и указать, как каждый последующий график получается из предыдущего.

51. $y = \sin(2x + 2)$.

52. $y = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$.

53. $y = -2\sin(x - 1)$.

54. $y = -\sin\frac{1}{2}x$.

55. $y = \sin(2x + 1) + 1$.

56–60. Построить график функции y =A cos(ax + b) преобразованием графика функции y = cos x.

Замечание. При решении задачи написать все пункты преобразования исходного графика и указать, как каждый последующий график получается из предыдущего.

56. $y = \cos(2x + 2)$.

57. $y = -\cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$.

58. $y = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

59. $y = \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) - 1$.

60. $y = -2\cos(x + 1)$.

61–70. Найти пределы функции, не применяя правило Лопиталя.

61. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{\sqrt{1+x}+x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x - 1}{5x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$

д) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

62. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{5x^3+4x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{\sin 2x}$.

63. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{3x^3-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{\sin^3 x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x\cdot(x+3)}$.

64. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+2x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

65. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6x-5}}{\sqrt{4x^2+3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\right\}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$.

66. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-x^2+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]\right\}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{ctg}2x}{\sin 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

67. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-2x^2+5x^4}}{\sqrt{2+3x+x^4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]\right\}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2+5}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$.

68. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+4x-x^2}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2+x)-\ln 2}{\mathrm{tg}(x^2+x)}$.

69. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3}}{\sqrt[3]{27x^2+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}\right]$.

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot\mathrm{tg}2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

70. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{2x^2-3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x-8}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2\cdot\mathrm{ctg}3x}{\sin 2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{\ln(1+2x)}$.

71–80.Задана функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1 и x_2 . Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва определить, какого он рода; 3) все рассуждения обосновать.

71. $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

72. $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

73. $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

74. $f(x) = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{x}} - 1}$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

75. $f(x) = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

76. $f(x) = 10^{\frac{1}{7-x}}$, $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

77. $f(x) = 14^{\frac{1}{6-x}}$, $x_1 = 6$; $x_2 = 4$.

78. $f(x) = 2 + 3^{\frac{1}{x}}$, $x_1 =0$; $x_2 = 1$.

79. $f(x) =1 + \dfrac{1}{x-2}$, $x_1 =0$; $x_2 = 2$.

80. $f(x) = \dfrac{2}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

81–90. Задана функция y = f(x). Найти точки разрыва функции, если они существуют и определить характер разрыва. Сделать чертеж. Рассуждения обосновать, пользуясь определением непрерывной функции.

81. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x\le 1; \\ 2x, & x>1. \end{cases}$

82. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

83. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

84. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$

85. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

86. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

87. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$

88. $f(x)=\begin{cases} -x^2, x\le 0; \\ \mathrm{tg}x, \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 2, \quad x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

89. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$

90. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ \sqrt{x}, & 0<x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$

Контрольная работа № 3

Производная функции и ее приложения

91–100. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

91. а) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^5$; б) $y = \ln \sin(x^2 + 5)$;

в) $y = x^{x^2}$; г) $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = 5x$.

92. а) $y = \frac{4\sin x}{\cos^2 x}$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{x^2} + x}$;

в) $y = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{x}}$; г) $x - y^2 + \operatorname{arctg} y = 0$.

93. а) $y = \arcsin e^{2x+1}$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 - 3x}$;

в) $y = x^{\cos x}$; г) $y \sin x = \cos(x - y)$.

94. а) $y = \sin^3 x - x\cos x$; б) $y = x^3 \ln(x^2+1)$;

в) $y = (\operatorname{tg} x)^{x^2}$; г) $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

95. а) $y = \frac{\sin^2 x}{2 + e^{3x}}$; б) $y = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$;

в) $y = (\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$; г) $y^2 + xy = e^y + 3$.

96. а) $y = 2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg}(x^2+1)}$;

в) $y = (\arcsin x)^x$; г) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$.

97. а) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x \operatorname{tg}^2 x$; б) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1 + \sqrt{x}}$;

в) $y = \left(x + 2x^2\right)^x$. г) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

98. а) $y = \ln \arcsin e^{3x-2}$; б) $y = \operatorname{arctg}\cos^2 x$;

в) $y = (\sin 2x+1)^{\ln x}$; г) $x - y^2 + a \sin y = 0$.

99. а) $y = 2^x e^{-x^2}$; б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y = \left(\cos x + x\right)^{x}$; г) $\ln y = a\mathrm{rctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

100. а) $y = \dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}\, x + x$; б) $y = a\mathrm{rctg}\,\sqrt{e^x + 3}$;

в) $y = \left(\sin x\right)^{x^2}$; г) $x^2 - y^2 = e^{y}\, a\mathrm{rctg}\, x$.

101–110. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от функций, заданных параметрически.

101. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$ **102**. $\begin{cases} x = t^3 + 8t, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$

103. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ **104.** $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$ **106.** $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

107. $\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$ **108.** $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

109. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t, \\ y = t - \ln\sin t. \end{cases}$ **110.** $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

111–120. Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(x) на отрезке [a; b].

111. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; [0;3]. **112**. $f(x) = x^5 + \dfrac{5}{3}x^3 + 2$; [0;2].

113. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$; $[0;\dfrac{\pi}{2}]$. **114.** $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; [-3;1].

115. $f(x)= x^3 - 3x + 1$; $[\frac{1}{2}; 2]$.

116. $f(x)= x^4 + 4x$; $[-2; 2]$.

117. $f(x)= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$; $[0; \frac{\pi}{2}]$.

118. $f(x)= 81x - x^4$; $[-1; 4]$.

119. $f(x)= 3 - 2x^2$; $[-1; 3]$.

120. $f(x)= x - \sin x$; $[-\pi; \pi]$.

121–130. Найти уравнения касательных к графикам функций $F(x;y) = 0$ и проходящих через т. $M_0(x_0; y_0)$

121. $y = e^{x^2-1}$, $M_0(1; 1)$.

122. $y = \frac{2x}{x^2+1}$, $M_0(1; 1)$.

123. $y = \sqrt{x^2-9}$, $M_0(5; 4)$.

124. $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $M_0(8; -1)$.

125. $y = \ln(x^2+2)$, $M_0(1; \ln 3)$.

126. $x^2 + y^2 = 2x + 4$, $M_0(2; 2)$.

127. $x^2 - y^2 = 1 - 2y$, $M_0(1; 2)$.

128. $y = x \cdot \ln x$, $M_0(e; e)$.

129. $y = \frac{1}{2}\sin^2(4x - \frac{\pi}{3})$, $M_0(\frac{\pi}{6}; \frac{3}{8})$.

130. $y = \frac{1}{x^4} + 2x$, $M_0(1; 3)$.

131–140. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию, используя результаты исследования, построить ее график.

131. $y = x \ln x$.

132. $y = x\ e^{-x^2}$.

133. $y = \frac{x}{e^x}$.

134. $y = x^2/(x-1)$.

135. $y = \ln(x^2 - 4)$.

136. $y = \frac{e^x}{x}$.

137. $y = x \cdot e^x$.

138. $y = \ln(x^2 + 1)$.

139. $y = \ln(9 - x^2)$.

140. $y = 4x/(4 + x)$.

141–150. Вычислить пределы, применяя правило Лопиталя.

141. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^{\cos x}}{1-\sin x-\cos x}$.

142. а) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$.

143. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 3x - 1}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\ln(1+x)}$.

144. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

145. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

146. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

147. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

148. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$.

149. а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg}\pi x)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$.

150. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Контрольная работа № 4

Функции многих переменных. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл, его приложения

151. Дана функция $z=\dfrac{y}{(x^2-y^2)^5}$. Показать, что $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

152. Дана функция $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(x\,y)$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

153. Дана функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

154. Дана функция $z=e^{x\,y}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0.$$

155. Дана функция $z=\ln(x+e^{-y})$. Показать, что $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

156. Дана функция $z=\dfrac{x}{y}$. Показать, что $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

157. Дана функция $z=x^{\,y}$. Показать, что $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

158. Дана функция $z=x\ e^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

159. Дана функция $z = \sin(x + ay)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

160. Дана функция $z=\cos y+(y-x)\sin y$. Показать, что $(x-y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

161–170. Даны функция $z = F(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$ и вектор $\boldsymbol{a}$. Найти: 1) grad z в точке A; 2) производную функцию z в точке A по направлению вектора $\boldsymbol{a}$.

161. $z = x^2 + xy + y^2$; A(1; 1), $\boldsymbol{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

162. $z = 2x^2 + 3\,xy + y^2$; A(2; 1), $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j}$.

163. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; A(1; 1), $\boldsymbol{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

164. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; A(1; 1), $\boldsymbol{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

165. $z = 5x^2 + 6\,xy$; A(2; 1), $\boldsymbol{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

166. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$; A(2; 3), $\boldsymbol{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

167. $z = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$; A(1; 2), $\boldsymbol{a} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$.

168. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; A(1; 3), $\boldsymbol{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

169. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; A(- 1; 2), $\boldsymbol{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

170. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; A(1; 1), $\boldsymbol{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

171–180. Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах результаты проверить дифференцированием:

171. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$; г) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

б) $\int arctg\sqrt{x}\,dx$; д) $\int \dfrac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{x^3+8}$; е) $\int \dfrac{dx}{2+3\cos x}$.

172. а) $\int \dfrac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$; г) $\int \dfrac{dx}{\sin x + tgx}$.

б) $\int e^x \ln(1+3e^x)\,dx$; д) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$;

в) $\int \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 27}dx$; е) $\int \dfrac{4\,\mathrm{arctgx} - x}{1+x^2}dx$.

173. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}}$;

б) $\int x e^x dx$; д) $\int \sin^5 x dx$;

в) $\int \frac{3x-7}{x^3+4x^2+4x+16}dx$; е) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}dx$.

174. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

б) $\int x\cos 2x\, dx$; д) $\int \cos^3 x\cdot\sin^3 x dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; е) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

175. а) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}dx$; г) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

б) $\int x^2 e^{3x}\, dx$; д) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}$;

в) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x-1)}dx$; е) $\int \frac{dx}{5+\cos x}$.

176. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$; г) $\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+4\right)\sqrt[4]{x^3}}dx$;

б) $\int x\, \arcsin\frac{1}{x}dx$; д) $\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; е) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x}$.

177. а) $\int \frac{\left(x+\operatorname{arctg}x\right)dx}{1+x^2}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1+\sqrt[3]{x+5}}dx$;

б) $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx$; д) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}dx$;

в) $\int \frac{(x^2-3)}{x^4+5x^2+6}dx$; е) $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

178. а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$;

б) $\int x\sin x\cos x\, dx$; д) $\int \frac{x-(\mathrm{arcctg} x)^4}{1+x^2}$;

в) $\int \frac{x^2}{x^4-81}dx$; е) $\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x dx$.

179. а) $\int \frac{\sin dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; г) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}dx$;

б) $\int x^2\sin 4x\, dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg} x+2}}$;

в) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; е) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$.

180. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

б) $\int x\ln^2 x\, dx$; д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

в) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

181–190. Вычислить определенные интегралы.

181. а) $\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot \mathrm{arctg}\, x\, dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

182. а) $\int_2^e x\cdot\ln x\, dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

183. а) $\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\, dx$; б) $\int_0^5 \frac{x\, dx}{\sqrt{1+3x}}$.

184. а) $\int_0^1 x^2\cdot e^x\, dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

185. а) $\int_0^1 x^2 \cos x\, dx$; б) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

186. а) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{(1+x)^3}$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

187. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \cdot \sin x\, dx$; б) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

188. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cdot \sqrt{\cos\varphi}\, d\varphi$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\cos x}$.

189. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 5x + 4}$; б) $\int_5^1 \frac{t\, dt}{\sqrt{5 + 4t}}$.

190. а) $\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \sin x \cdot \cos x\, dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

191–200. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

191. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

192. а) $\int_{-\infty}^{-3} \frac{x\, dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{4 - x^2}$.

193. а) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

194. а) $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^3}}$; б) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}$.

195. а) $\int_1^2 \frac{dx}{\left(x - 1\right)^2}$; б) $\int_1^{\infty} \frac{x}{1 + x^2} dx$.

196. а) $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{\left(x + 3\right)^2}$; б) $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

197. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$; б) $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

198. а) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\left(x-2\right)^2}$; б) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{x^4+1}$.

199. а) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; б) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$.

200. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{\left(x+2\right)^2}$.

201. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$. Сделать чертёж.

202. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t); \\ y = a(1-\cos t); \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi) \text{ и осью Ox.}$$

203. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1+\cos\varphi)$. Сделать чертёж.

204. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = 4\sin 2\varphi$. Сделать чертёж.

205. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox, фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. Сделать чертёж.

206. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2 + y^2 = 4x$ и $y = x$. Сделать чертёж.

207. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ox, фигуры, ограниченной линиями: $y = 2\sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{2}x$. Сделать чертёж.

208. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{\left(x-2\right)^3}$ от точки A (2;0) до точки B (6;8).

209. Вычислить длину кардиоиды $r = 3(1 - \cos\varphi)$. Сделать чертёж.

210. Вычислить длину одной арки циклоиды.

$$\begin{cases} x = 3(t-\sin t); \\ y = 3(1-\cos t); \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Правила выполнения и оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), названия дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату её выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго в соответсвтвии с номером варианта. Контрольные работы, содержащие не все подпункты задач, а также задачи иного варианта не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью написать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует переписывать условие задачи, заменив общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера. Например, условие задачи 1 должно быть переписано так:

   1. Даны векторы $\overline{a}$=(1; 2; 3), $\overline{\mathrm{b}}$=(-1; 3; 2), $\overline{\mathrm{c}}$=(7; -3; 5), $\overline{\mathrm{d}}$=(6; 10; 17;) *в некотором базисе. Показать…* и т. д.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения, сделать необходимые чертежи и написать формулы, используемые при решении.

7. После получения прорецензированной работы, как незачтенной, так и зачтенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок. В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново. При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

Список литературы

1. Агафонова В.Н. Высшая математика в задачах. Ч. 1. Курган: КГУ, 2006.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М.: Наука, 1970. Т. 1.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
5. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И. Краткий курс высшей математики. М.: Высшая школа, 1978. Т .1.
6. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа. Ч. 1. 1980.
7. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1964.
8. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Высшая школа, 1972.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по матанализу. М.: Высшая школа, 1966.
10. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1969.
11. Руководство к решению задач по высшей математике/ Под общей ред. Е.И.Гурского. Минск: Высшая школа, 1989. Ч. 1.
12. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматгиз, 1962.

СОДЕРЖАНИЕ

Агафонова Валентина Николаевна

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

I курс I и II семестр

Редактор Н.М. Устюгова

Подписано в печать	Формат 60x 84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,0	Уч. - изд. л. 2,0
Заказ	Тираж 200	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.