МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

Практические занятия по курсу «Математический анализ» для студентов I курса специальности 010101 «Математика» (I семестр)

Курган 2009

Кафедра математического анализа

Дисциплина: «Математический анализ» (специальности 010101, 050201)

Составил: доцент, канд. пед. наук А. Е. Мухин

Утверждены на заседании кафедры «7» октября 2009 г.

Рекомендованы методическим советом университета «18» ноября 2009 г.

Практическое занятие №1

Тема: Множества и операции над ними.

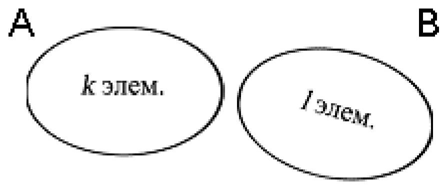
Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 18.

Основные вопросы теории:

1. Понятие множества. Примеры множеств. Понятие элемента множества. Примеры элементов множеств. Принадлежность и непринадлежность элемента множеству. Обозначение множеств и элементов множеств. Способы задания множеств. Конечные и бесконечные множества. Примеры конечных и бесконечных множеств. Включение одного множества в другое. Равенство множеств.
2. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение одного множества до другого. Свойства операций. Диаграммы Эйлера-Венна. Прямое (декартово) произведение множеств.

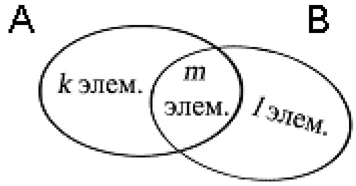
Задачи для решения на занятии:

1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0;2\}$. Найдите: $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$
2. Пусть A – множество значений функции $signx = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$ а B – множество корней уравнения $x(x-1)(x+2) = 0$. Найдите $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$.
3. Опишите, что представляют собой $A \cap B$ и $A \setminus B$, если A – множество студентов данной группы, B – множество студентов-отличников всего факультета.
4. Опишите, что представляют собой $\grave{A} \cup B$ и $A \cap B$, если A – множество успевающих студентов группы, B – множество студентов-отличников этой же группы.
5. Опишите множество – пересечение множества всех прямоугольных треугольников с множеством всех равнобедренных треугольников.
6. Что представляет собой пересечение множества все рациональных чисел Q и множества всех действительных чисел от 1 до 5?
7. Даны множества: A=[1;6], B=(1;8), D=[0;7). Найдите и изобразите на числовой прямой: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, C_D A, C_D B$.
8. Известно: A={1, 3, 5, 7, 9}, B={2, 4, 6, 8}. Найти: $n(A), n(B), n(A \cup B), n(A \cap B).$
9. Дано: C={3, 6, 9, 12, 15}, D={2, 4, 6, 8, 10, 12}. Найдите: $n(C), n(D), n(C \cap D), n(C \cup D).$
10. Дано:



Найдите: $n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$.

11. Дано:



Найдите: $n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$.

12. После выполнения заданий 8-11 сделайте выводы о количестве элементов в объединении множеств, когда множества не пересекаются и когда множества пересекаются. Запишите формулу для числа элементов в объединении пересекающихся множеств.
13. Выведите формулу для числа элементов в объединении трёх пересекающихся множеств.
14. В группе 30 человек, 16 из них занимаются музыкой, 17 - увлекаются теннисом, а 10 - занимаются и музыкой и теннисом. Определите, есть ли в группе ребята, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их.
15. Из 100 студентов английский язык знают 28, немецкий – 30, французский – 42, немецкий и французский – 5, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, все три языка знают 3 студента. Определите, сколько студентов не знают ни одного из трёх языков.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ».

   I. Множества и операции над ними

   I уровень (1, 2, 3);

   II уровень (1 а, б, е);

   III уровень (1, 2, 3, 4);

   IV уровень (1, 2, 3, 4, 6).

Практическое занятие №2

Тема: Множество действительных чисел.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 37.

Основные вопросы теории:

1. Понятие рационального числа. Примеры рациональных чисел. Изображение рациональных чисел на прямой. Изображение рациональных чисел в виде десятичных дробей. Обращение обыкновенной дроби в десятичную и периодической десятичной дроби в обыкновенную.
2. Существование иррациональных чисел (доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум). Изображение иррациональных чисел в виде бесконечных десятичных дробей.
3. Множество действительных чисел. Изображение действительных чисел на прямой. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку, их свойства.
4. Аксиоматика множества действительных чисел. Принцип Кантора вложенных отрезков. Теорема Кантора о стягивающейся системе отрезков.

Задачи для решения на занятии:

1. Найдите десятичные приближения дроби $\frac{2}{7}$ по недостатку и по избытку с точностью до 0,1; 0,01; 0,001;0,0001. Сравните их между собой. Сделайте выводы. Расположите приближения по недостатку и по избытку и дробь $\frac{2}{7}$ в порядке возрастания.
2. Выполните аналогичные задания для дроби $\frac{15}{37}$.
3. Найдите приближенные значения для дроби $\frac{16}{27}$ с точностью до 0,001. Определите, принадлежат ли интервалу с этими концами числа: $\frac{296}{500};0{,}59;\frac{3}{5};0{,}5926$.
4. Выпишите бесконечные десятичные дроби по следующему правилу:

   а) первая цифра после запятой равна нулю, вторая – единице, затем следует один нуль и две единицы, один нуль и три единицы и т.д.;

   б) после запятой располагаются четные числа в порядке возрастания;

   в) первая цифра после запятой равна трём, вторая – трём, третья – семи, четвёртая – трём, пятая – семи и т.д.

   Определите, какие из выписанных дробей периодические. Какие из дробей изображают рациональные числа, а какие – иррациональные.
5. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что $r^2 = 3$.
6. Выберите истинные и ложные утверждения:

а) $5 \in N$;

б) $5 \in Q$;

в) $-6 \in Z$;

г) $\dfrac{3}{7} \in Q$;

д) $3,(1) \in I$;

е) $\log_3 3 \notin Z$;

ж) $\cos 30^\circ \in Q$.

7. Обратите действительное число 0,33(1) в обыкновенную дробь.
8. Решите уравнения и определите, рациональны или иррациональны корни каждого из них:

   а) $x^2 - 2x - 1 = 0$;

   б) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2$;

   в) $3\cos^2 x = 4\sin x \cdot \cos x$;

   г) $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 12$;

   д) $\log_{x-2}(2x-9) = \log_{x-2}(23-6x)$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты по разделу «Введение в анализ»:

   II. Действительные числа

   I уровень (1, 2, 3);

   II уровень (1, 2);

   III уровень (1, 2);

   IV уровень (2).

Практическое занятие № 3

Тема: Ограниченные и неограниченные числовые множества.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988. - С. 64.

Основные вопроси теории:

1. Определения и примеры: ограниченного сверху множества, ограниченного снизу множества, ограниченного множества.
2. Определения и примеры: точной верхней границы множества, точной нижней границы множества.
3. Характеристики точной верхней и точной нижней границ множества.

4. Виды промежутков на прямой. Окрестности точек на прямой.

Задачи для решения на занятии:

1. Из данного набора множеств выберите ограниченные сверху, ограниченные снизу, ограниченные, неограниченные:

   а) $M = \{x \in R | 1 \le x < +\infty\}$;

   б) $P = \{x \in Z | -2 < x \le 12\}$;

   в) $K = \left\{ n \in N \middle| \frac{n^2}{n+1} \right\}$;

   г) $L = \left\{ \frac{n^3}{n^4 + 2}, n \in N \right\}$;

   д) $C = \{n \in N | ((-1)^n + 1)n^2\}$

   Запишите для каждого из них точную верхнюю и точную нижнюю границы.

2. Приведите пример числового множества M, для которого:

   а) inf M=1;

   б) sup M=3;

   в) inf M=1, sup M=3, но M≠[1;3].

3. Приведите пример числового множества M: inf M=sup M.

4. Определите, окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал:

   а) (0;2);

   б) (-1,9;-1,5);

   в) (3,11;3,13);

   г) (-0,8;-0,4);

   д) (1,233;1,235).

5. Выясните, принадлежит точка x_0 окрестности точки a радиуса ε, если:

   а) $x_0=1$, a=2, ε=0,1;

   б) $x_0=1,1$, a=1, ε=0,01;

   в) $x_0=-0,2$, a=0, ε=0,3;

   г) $x_0=2,75$, a=2,5, ε=0,25.

6. Запишите, используя знак принадлежности и обозначение окрестности, в виде интервала утверждение:

   а) расстояние между точками x и -2 меньше 0,9;

б) расстояние между точками y и 1 меньше 0,4;

в) расстояние между точками z и 0 меньше $\frac{\delta}{4}$;

г) расстояние между точками t и 0,1 меньше ε.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты по разделу «Введение в анализ»:

   II. Действительные числа

   I уровень (4, 5);

   III уровень (3, 4).

Практическое занятие № 4

Тема: Модуль действительного числа и его свойства.

Литература:

1. Лекции.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 49.

Основные вопроси теории:

1. Определение модуля действительного числа. Геометрический смысл модуля действительного числа.
2. Свойства модуля действительного числа (с доказательством).

Задачи для решения на занятии

1. Используя неравенство со знаком модуля, запишите утверждение: расстояние между числами x и -0,2 меньше 0,01.
2. Запишите, используя неравенство со знаком модуля, окрестности точек: а)0,2 радиуса 0,1; б) 3,2 радиуса 0,01; в) -1,2 радиуса 1; г) 0 радиуса $\frac{1}{2}$.
3. Решите уравнения:

   а) $|x-2|=3$;

   б) $|3-2x|=5$;

   в) $|x|=x^2-6$;

   г) $|\sin x| = \sin x + 2$;

   д) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$;

   е) $|tgx| + tgx - 2=0$.

4. Решите неравенства:

а) $|x-2|<3$;

б) $|x+3|>2$;

в) $|x|<x+1$;

г) $|x^2-5|>2$;

д) $|x-4|+|x+4|\leq 10$;

е) $|x-1|+|x-2|<2x-3$.

5. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{x^2-6x+9}=6$.

6. Решите неравенства: $|x-1|+|x-4|+|x+5|<6$.

Задачи для решения дома:

1.Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

II Действительные числа, III уровень (4, 5, 6); IV уровень (3, 4).

Практическое занятие № 5

Тема: Действительная функция действительной переменной.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 21; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие соответствия между элементами двух множеств. Примеры соответствий.
2. Понятие отображения одного множества в другое. Примеры отображений множеств. Образ, прообраз.
3. Понятие функции, понятие числовой функции, понятие действительной функции действительной переменной. Примеры. Область определения и множество значений функции, их обозначение.
4. Сужение функции. Композиция функций. Обратная функция. Примеры.
5. Способы задания функций. График функции. Графики функций: степенной с натуральным показателем; степенной с целым отрицательным показателем; показательной; логарифмической; тригонометрических; обратных тригонометрических.
6. Операции над функциями.

Задачи для решения на занятии:

1. Каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат. Является ли это соответствие функцией? Является ли функцией соответствие, при котором каждой окружности сопоставляется вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат?

2. Существует ли функция, область определения которой состоит из пяти элементов, а множество значений - из семи элементов? Из четырех элементов? Приведите примеры.

3. Дан график функции $f(x)=x^2, x\in R$. Постройте графики сужений этой функции:

а) $f_1(x)=x^2$, $x\in[0;+\infty)$;

б) $f_2(x)=x^2$, $x\in[-1;1]$;

в) $f_3(x)=x^2$, $x\in(-1;1]$;

г) $f_1(x)=x^2$, $x\in(-2;+\infty)$.

4. Дана функция $f(x)=\begin{cases} 3x+2, -2\le x<0, \\ x^2, 0\le x<1, \\ \frac{1}{x}, 1\le x\le 2. \end{cases}$

Найдите: $f(-1), f(0), f(\frac{1}{2}), f(1), f(1,5)$.

5. Дана функция $F(x)=x^3+2$.

Найдите: $F^3(x)-1$; $F(a+3в)$; $F\ \ (x+10)$; $F(a)+3F(b)$.

6. Даны функции: $f(x)=|1+x|, g(x)=2^{x-1}$. Найдите: f∘f; g∘g; f∘g; g∘f. Запишите в каждом случае область определения и множество значений композиции.

7. Для каждой из функций выясните, является ли она обратимой. Если да, то напишите аналитическое выражение, найдите $D(f^{-1}), E(f^{-1})$, постройте график обратной функции:

а) $f(x)=-x^3+1$, $x\in R$;

б) $f(x)=-5^x$, $x\in R$;

в) $f(x)=\sqrt{x-2}$, $x\in[2;+\infty)$;

г) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $x\in[1;+\infty)$.

8. Укажите множество, на котором справедливо каждое из равенств:

а) $\sqrt{x^2+6x+9}=x+3$;

б) $\ell g(x^2-6x+8)=\ell g(x-2)+\ell g(x-4)$.

9. Докажите что, функции *f(x)* и g(x) тождественны, если:

а) $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$, g(x)=$\begin{cases} x, x\ge 0, \\ 0, x<0; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, x\neq 0,\\ 0, x=0;\end{cases}$ g(x)=$\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0.\end{cases}$

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   Ш. Функция: основные понятия и классификации

   I уровень (1,2,5,6); II уровень (1);

   III уровень (1,2,6); IV уровень (2,3,5,6).

Практическое занятие № 6

Тема: Область определения и множество значений функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 21; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие области определения и множества значений функции, их обозначение.
2. Области определения функций: P(x), где P(x) – многочлен; $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,где P(x) и Q(x) - многочлены; $\sqrt[2k]{f(x)}$; $\sqrt[2k+1]{f(x)}$ где $k\in N$; $\log_a f(x), a>0$; *tgx*; *ctgx*; *arcsinf(x)*; *arccosf(x)*; *arctgf(x)*; *arcctgf(x)*.
3. Множества значений функций: x^n, $n\in N$; $\dfrac{1}{x}$;$\sqrt[n]{x}$, $n\in N$; $\log_a x$, a>0; sinx; cosx; tgx; ctgx; arcsinx; arccosx; arctgx; arcctgx; a^x, a>0.
4. Арифметические операции над функциями. Области определения суммы, произведения и частного функций. Область определения композиции функций.

Задачи для решения на занятии:

1. Дана функция:

$$f(x)=\begin{cases}x^2, |x|<1, x\in Q,\\ -x^2, |x|<1, x\in I,\\ x^2+4, |x|\geq 1, x\in Q,\\ -x^2-4, |x|\geq 1, x\in I.\end{cases}$$

   Найдите: f($\frac{5}{6}$), f(-1), f($\dfrac{\sqrt{3}}{2}$), f(-$\frac{\sqrt{5}}{2}$), f(7,1), f(π), f($\dfrac{\pi}{4}$).

2. Найдите: D(f):

а) $f(x)=\frac{[x]}{(x+1)^2}$;

б) $f(x)=\sin\frac{x+3}{x^2-5x+6}$;

в) $f(x)=\cos\lg\frac{1}{2x-1}$;

г) $f(x)=\log_a(\cos\log_3 x), a>0$;

д) $f(x)=\arcsin\frac{x+2}{3}+\frac{1}{x}$;

е) $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt[4]{9-x^2}}+\frac{1}{\sin x}$.

3. Найдите E(f):

а) $f(x)=2\cos 2x$;

б) $f(x)=x^2-3$;

в) $f(x)=4-x^2$;

г) $f(x)=\frac{1}{x}$.

4. Приведите примеры аналитически заданных функций, имеющих области определения:

а) $D(f)=[-2;2]$;

б) $D(f)$=(-2,2);

в) $D(f)=(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$;

г) $D(f)=(-\infty;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$.

5.Приведите примеры функций, удовлетворяющих уравнениям:

а) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$;

б) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$;

в) $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$.

<u>Задачи для решения дома:</u>

Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

III. Функция: основные понятия и классификации, I уровень (3,4), III уровень (1,2,4,6).

Практическое занятие №7

Тема: Классификация функций по аналитическим выражениям и свойствам.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 145; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Классификация функций по аналитическим выражениям: целые рациональные, дробно-рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные.
2. Четные, нечетные функции. Их свойства. Графики.
3. Монотонные функции, их свойства. Способы исследования функций на монотонность.
4. Ограниченные и неограниченные функции.
5. Периодические функции и их свойства.

Задания для решения на занятии:

1. Приведите пример целой рациональной функции, укажите ее область определения, исследуйте на четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
2. Приведите пример дробно-рациональной функции, укажите ее область определения, исследуйте на четность, нечетность, монотонность, периодичность, ограниченность.
3. Приведите пример иррациональной функции, укажите ее область определения, исследуйте на четность, нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
4. Докажите, что сумма и произведение двух четных функций – четная функция.
5. Исследуйте на четность и нечетность функции:

   а) $f(x)=e^{-x^2}+x^4-6x^2+11$;

   б) $f(x)=\sin x^2-e^{-x^2}$;

   в) $f(x)=\dfrac{\cos x^3+7x^{12}}{x^6+\sin^2 x^3}$;

   г) $f(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), a>0$.

6. Исследуйте на монотонность функции:

   а) $f(x)=x^4+6x^2+1$;

   б) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}, x\neq 1$;

   в) $f(x)=\lg^5 x+x^5$.

7. Исследуйте функции на периодичность (в случае периодичности укажите основной период функции):

а) f(x)=2sin($\frac{x}{2}+3$);

б) f(x)=sin$\sqrt{x}$;

в) f(x)=$\frac{1}{x^2+1}$;

г) f(x)=$\{x\}$.

8. Исследуйте функции на ограниченность, укажите точные верхние и точные нижние границы функций:

а) f(x)=x^2+2, x$\in[-1;3]$;

б) f(x)=$\frac{1}{x^2+1}$, x$\in(-\infty;+\infty)$;

в) f(x)=$\frac{1}{x^2-4}$, x$\in$(-2;2);

г) f(x)=$x+\frac{1}{x}$, x$\in\left(\frac{1}{2};2\right)$;

д) f(x)=$\{x\}$.

<u>Задачи для решения дома:</u>

Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

III. Функция: основные понятия и классификации, I уровень (7,8); IIуровень (2,3,4,5,6,7); III уровень (7,8,9,10,11); IV уровень (7,8).

<u>Практическое занятие №8</u>

<u>Тема:</u> Построение графиков функций.

Литература: Лекции.

<u>Задачи для решения на занятии:</u>

Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

IV. Построение графиков функций: I уровень (1е,ж,з,и,к,м); II уровень (1,3,5,7); III уровень (1а,в,д,ж); IV уровень (1а,в,д,ж,и).

<u>Задачи для решения дома:</u>

Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

IV. Построение графиков функций,

I уровень (1а,б,в,г,д,л,н); II уровень (2,4,6); III уровень (1б,г,е,з); IV уровень (1б,г,е,з,к).

Практическое занятие №9

Тема: Самостоятельная работа (Множества, функции и их свойства).

I вариант

1. Дано: A=$[1;9]$, B=(0;7), D=$[2;8)$.

   Найти: $A\cup B$; $A\cap B$; A\B; B\A; $C_D B$; $C_B D$.
2. Дано: f(x)=ℓg(x^2-10x).

   Найти: f(-5), f(0), f(15), f($\sin\frac{\pi}{2}$), f(10+a^2), a≠0.
3. Дано: f(x)=$\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}$.

   Найти: D(f).
4. Дано: f(x)=$5^{\sin x}$.

   Найти: E(f).
5. Построить график функции f(x)=ℓg(x+1).
6. Исследовать на четность (нечетность) функцию f(x)=x-$\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$.
7. Исследовать на монотонность функцию f(n)=$\frac{3n-2}{2n-1}, n\in N$.

II вариант

1. Дано: A=$(2;9]$, B=[1;7), D=(0;6).

   Найти: $A\cup B$; $A\cap B$; A\B; B\A; $C_B D$; $C_D B$.
2. Дано: f(x)=ℓg$|6x-8|$.

   Найти: f(-1), f(sin0), f($\frac{8}{6}$), f(-$\frac{1}{3}$), f($\frac{1}{a^2}$).
3. Дано: f(x)=(x-3)$\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$.

   Найти: D(f).
4. Дано: f(x)=(-$(x+2)^2$ +5).

   Найти: E(f).
5. Построить график функции f(x)=$\left(\frac{1}{3}\right)^x$+1.
6. Исследовать на четность (нечетность) функцию f(x)=(1-x^2)·cosx.
7. Исследовать на монотонность функцию f(n)=$\frac{4n-1}{2n+1}, n\in N$.

III вариант

1. Дано: A=$[3;7)$, B=(0;4], D=$[1;6]$.

   Найти: A\B; B\A; A$\cup$B; A$\cap$B; C_DB; C_BD.

2. Дано: f(x)=$\sqrt{\ell g(x^2-9x)}$.

   Найти: f(-1), f(ℓg1), f(coso), f($\frac{a^2}{1+a^2}$), f($|a|+10$).

3. Дано: f(x)=$\sqrt{x^2-4x+3}$.

   Найти: D(f).

4. Дано: f(x)=1-2$|\cos x|$.

   Найти: E(f).

5. Построить график функции f(x)=$(x-2)^3$.

6. Исследовать на четность (нечетность) функцию f(x)=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Исследовать на монотонность функцию f(n)=$\frac{7n+4}{2n+1}, n \in N$.

IV вариант

1. Дано: A=(-1;4], B=[-2;6], D=(0;3).

   Найти: A$\cup$B; A$\cap$B; A\B; B\A; C_BD; C_DB.

2. Дано: f(x)=$\begin{cases} x^2, -1 < x < 1, \\ 1-2x, x \geq 1. \end{cases}$

   Найти: f(0), f(1), f(1+t^2), f(tg(-$\frac{\pi}{3}$)).

3. Дано: f(x)=$\ell\,\mathrm{g}\frac{x-5}{2+x-x^2}$.

   Найти: D(f).

4. Дано: f(x)=$1-(x-1)^2$.

   Найти: E(f).

5. Построить график функции f(x)=$3^{x-2}+1$.

6. Исследовать на четность (нечетность) функцию f(x)=ℓn$\frac{1-x}{x+1}$.

7. Исследовать на монотонность функцию f(n)=$\frac{2n-5}{3n+1}, n \in N$.

Практическое занятие №10

Тема: Последовательности и их свойства.

Литература: лекции.

Основные вопросы теории:

1. Определение последовательности, общий член последовательности. Способы задания последовательностей. График числовой последовательности.
2. Арифметическая и геометрическая прогрессии как примеры числовых последовательностей.
3. Монотонные последовательности. Исследование последовательностей на монотонность.
4. Ограниченные и неограниченные последовательности. Исследование последовательностей на ограниченность.

Задачи для решения на занятии:

1. Даны последовательности:

   а) 1,2,4,8,16,32,64,128,…;

   б) 5,7,9,11,13,15,17,19,…;

   в) 1,4,9,16,25,36.49,64,…;

   г) 1,2,3,2,5,6,7,2,2,...;

   д) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},...;$

   е) 2,0,-2,-4,-6,-8,-10,…;

   ж) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...;$

   з) $1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},...;$

   и) $1,-1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{5},\frac{1}{7},-\frac{1}{7},...;$

   к) $1,\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{6}{7},\frac{1}{7},\frac{8}{9},....;$

   л) 1,1,2,3,5,8,13,21,…;

   м) 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159;…

1) напишите, если это возможно, одну из формул n-го члена каждой из последовательностей а) - м).

2) задайте последовательности а) и б) рекуррентным способом.

3) постройте графики последовательностей г), д), и).

4) задайте последовательности л), м) словесно.

5) выберите среды последовательностей арифметические и геометрические прогрессии.

6) определите, какие из данных последовательностей являются монотонными.

7) выберите из данных последовательностей ограниченные снизу, ограниченные сверху, ограниченные, неограниченные.

8) выберите из данных последовательностей возрастающие и ограниченные сверху последовательности.

2. По формуле n-го члена каждой из последовательностей вычислите ее 27-й член:

а) $(a_n), a_n = 2 + 3n;$

б) $(x_n), x_n = 3 \cdot \frac{1}{2^n};$

в) $(y_n), y_n = (1 + \frac{1}{n})^n.$

Какие из данных формул являются формулами n-х членов арифметической (геометрической) прогрессии?

3. Выпишите по пять первых членов каждой из последовательностей и задайте последовательности формулой n- го члена:

а) (x_n): $x_1=4$, $x_{n+1}=-x_n$, $n\geq1$;

б) (y_n): $y_1=-10$, $y_{n+1}=y_n+5$, $n\geq1$.

4. Каждую из последовательностей задайте рекуррентным способом:

а) 2,4,16,256,…;

б) 1,1,1,1…;

в) 1,2,3,4,5,…;

г) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{6561},...;$

д) 1,6,11,16,21,…;

е) 2,-6,18,-54,…

5. Даны последовательности:

а) (a_n), $a_n=2n$;

б) $(в_n)$, $b_n=5$;

в) (c_n), $c_n=(-1)^{n+1}$;

г) (d_n), $d_n=\frac{(-1)^n+1}{n}$;

д) (ℓ_n), $\ell_n=\frac{2n+1}{n}$;

е) (p_n), $p_n=\frac{3n-6}{2n}$.

1) постройте график каждой из последовательностей.

2) изобразите члены последовательностей на числовой прямой.

3) исследуйте последовательности на монотонность.

4) исследуйте последовательности на ограниченность.

6. Даны последовательности:

а) (x_n), $x_n=\frac{3n+2}{2n}$;

б) (Z_n), $Z_n=n^2-6n$.

Выясните, монотонны ли последовательности. Выделите возрастающие и убывающие последовательности.

7. Даны последовательности:

а) (a_n), $a_n=\frac{2n-1}{n+2}$;

б) ($в_n$), $в_n=-3+\frac{2}{9^n}$.

Выясните, существует ли такой числовой промежуток $[a;в], a, в \in R$, которому принадлежат все члены каждой из последовательностей.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности:

а) 2,5,8,11,14,…;

б) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$;

в) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$.

2. Вычислите пять первых членов последовательности (x_n): $x_1=1$, $x_{n+1}=(n+1)x_n$, $n\geq 1$. Запишите формулу n-го члена последовательности (x_n).

3. Составьте формулу n-го члена последовательности числа сторон правильных вписанных в окружность многоугольников, если каждый следующий получается удвоением числа сторон предыдущего многоугольника, начиная с квадрата.

4. Даны последовательности:

а) (x_n), $x_n=n^2$;

б) (y_n), $y_n=10-3n$;

в) (Z_n), $Z_n=\frac{(-1)^n}{n}$;

г) (t_n), $t_n=\frac{n+1}{n}$;

д) (a_n), $a_n=2+\left(\frac{-1}{2}\right)^n$;

е) $(в_n)$, $в_n=3\cdot 2^n$.

1) постройте график каждой из последовательностей.

2) изобразите члены последовательностей на числовой прямой.

3) исследуйте последовательности на монотонность.

4) исследуйте последовательности на ограниченность.

5. Даны последовательности:

а) (a_n), $a_n=\frac{2}{3^n}$;

б) $(в_n)$, $в_n=\frac{10n+6}{2n}$.

Выясните, монотонны ли последовательности. Выделите возрастающие и убывающие последовательности.

6. Даны последовательности:

а) (a_n), $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$;

б) $(в_n)$, $в_n=2n-1$;

в) (c_n), $c_n=n^2$.

Выясните, существует ли такой числовой промежуток $[a;в], a,в \in R$, которому принадлежат все члены каждой из последовательностей.

Практическое занятие №11

Тема: Определение предела последовательности.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 87; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Окрестности конечной точки на прямой и символов: $+\infty$, $-\infty$, ∞ (определение, обозначение, запись, изображение на прямой).
2. Определение предельной точки множества. Примеры.
3. Определение конечного (бесконечного) предела последовательности. Геометрический смысл предела последовательности.

4. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Сходимость и расходимость геометрической прогрессии.

Задачи для решения на занятии:

1. Из предложенного набора последовательностей выберите последовательности, имеющие конечные пределы:

а) (x_n), $x_n=2-\frac{1}{n}$;

б) (y_n), $y_n=3+\frac{1}{n^2}$;

в) (Z_n), $Z_n=4+\frac{(-1)^n}{n}$;

г) (a_n), $a_n=\frac{3n^3}{n^2+1}$;

д) $(в_n)$, $в_n=(-1)^{n+3}$;

е) (c_n),$c_n=\frac{3n+4}{n-2}$;

ж) (d_n), $d_n=\frac{1+(-1)^n}{n^3}$;

з) (t_n), $t_n=\frac{n}{2n+1}$;

и) $\frac{1}{2};0;\frac{1}{4};0;\frac{1}{8};0;\frac{1}{16};0,...$

2. Укажите номер того члена последовательности $(x_n), x_n=\frac{5n+3}{2n}$, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n-2{,}5|<0{,}01$. Истолкуйте геометрически полученный результат.

3. Определите, при каких значениях n точки, соответствующие членам последовательности (y_n), $y_n=\frac{3n-2}{n}$, отстоят от точки 3 на расстоянии, меньшем 0,1.

4. Найдите номера членов последовательности (Z_n), $Z_n=\frac{2n+3}{n}$, принадлежащих окрестности точки 2 радиуса 0,01.

5. Используя определение предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-7}{n}=5$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$.

6. В некоторой окрестности точки 3 обнаружено бесконечное множество членов последовательности (x_n). Следует ли из этого, что 3=$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. В любой окрестности точки 2 обнаружено бесконечное число членов последовательности (y_n). Можно ли утверждать, что 2=$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

8. В окрестности точки 5 обнаружено 1000 членов последовательности (Z_n). Может ли число 5 быть пределом последовательности (Z_n)?

9. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-5}{9n+4}=\frac{1}{3}$. Укажите число членов этой последовательности, лежащих вне интервала $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1000};\frac{1}{3}+\frac{1}{1000}\right)$.

10. Постройте отрицание определения предела последовательности. Запишите на языке «$\varepsilon - n_\varepsilon$», что значит $\lim\limits_{n\to\infty}$ $x_n \neq a$, $a \in R$; $a=+\infty$; $a=-\infty$.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   V. Предел последовательности: I уровень (1, 3 г, д); II уровень (5); III уровень (1, 2).

2. Докажите, используя определение предела последовательности, что:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{4n^2}=\frac{1}{4}$;

   б) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

<u>Практическое занятие №12</u>

<u>Тема:</u> Свойства сходящихся последовательностей.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 94; лекции.

<u>Основные вопросы теории:</u>

1. Свойства сходящихся последовательностей (нужно уметь доказывать):

   а) единственность предела последовательности;

   б) теорема о пределе подпоследовательности;

   в) ограниченность сходящейся последовательности;

   г) сохранение членами последовательности знака предела последовательности;

   д) сохранение пределом последовательности знака членов последовательности;

   е) предельный переход в равенстве;

   ж) предельный переход в неравенстве;

з) теорема о пределе промежуточной последовательности;

и) теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности. Примеры на применение теоремы (длина окружности, площадь круга, число «е»).

Задачи для решения на занятии:

1. Приведите пример последовательности, сходящийся к числу 2, у которой есть подпоследовательность, сходящаяся к числу 1.
2. Приведите пример неограниченной последовательности, имеющей предел, равный 1.
3. Приведите пример последовательности, имеющей предел, равный 3, все члены которой меньше 2.
4. Приведите пример последовательности, все члены которой отрицательны, сходящейся к числу $\frac{1}{2}$.
5. На какое свойство сходящихся последовательностей опирается доказательство теоремы о предельном переходе в равенстве?
6. Докажите теорему о существовании предела у монотонно убывающей ограниченной снизу последовательности.
7. Докажите неравенство Бернулли: $\forall_n \in N$, $h>-1$ $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$.
8. В каком отношении находятся множество сходящихся последовательностей и множество ограниченных последовательностей?
9. Приведите пример: а) немонотонной ограниченной последовательности, имеющей предел; б) немонотонной ограниченной последовательности, не имеющей предела.
10. Докажите, что существуют пределы последовательностей:

а) (x_n), $x_n=\dfrac{3n^2+2}{n^2}$;

б) (y_n), $y_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}$;

в) (Z_n), $Z_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$;

г) (t_n), $t_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+...+\dfrac{1}{n!}$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты по разделу «Введение в анализ»:

IV. Предел последовательности: I уровень (4); II уровень (1,2,5,7); III уровень (3,4); IV уровень (2,4).

Практическое занятие №13

Тема: Теоремы о пределах последовательностей. Основные виды неопределенностей и их раскрытие.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 109; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства. Примеры. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями.
2. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей.
3. Основные виды неопределенностей и их раскрытие.

Задачи для решения на занятии:

1. Из данных последовательностей выберите те, которые являются бесконечно малыми:

а) (x_n), $x_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$;

б) (y_n), $y_n=\frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\cos n^2$;

в) (Z_n), $Z_n=(-1)^n\cdot n^2$;

г) (a_n), $a_n=q^n$, $|q|>1$;

д) $(в_n)$, $в_n=\ell gn$;

е) (c_n), $c_n=3^{\sqrt{n}}$;

ж) (d_n), $d_n=\frac{3n+5}{2n^2}$;

з) (t_n), $t_n=\frac{4n+1}{4n-1}$.

2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-1$. Найдите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x_n+1}{y_n^{\ 2}+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x_n-3y_n}{y_n^{\,3}}$.

3. Вычислите пределы последовательностей, если они существуют:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{2n^2+1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}-\dfrac{n}{n-1}\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+4}{2n^2+1}-\dfrac{n-3}{3n+5}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n^2+1}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2n-1}\right)$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}, a\neq -1$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+7n-1}-\sqrt{n^2-7n-1}\right)$;

к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+4}{2n-5}\right)^{4n+1}$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-2}{3n^2+4}\right)^{5n^2-1}$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   V. Предел последовательности: I уровень (2); II уровень (6, 8); III уровень (5); IVуровень (1).

Практическое занятие №14

Тема: Предел функции в конечной точке, на бесконечности. Бесконечные пределы.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 146; лекции.

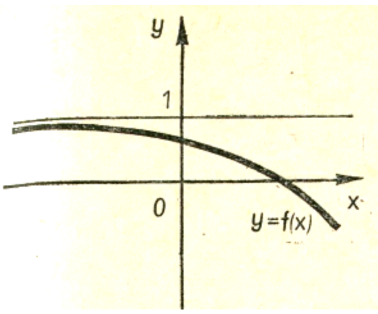
Основные вопросы теории:

1. Определение предела функции в точке на языке последовательностей (по Гейне). Определение предела функции в точке на языке «ε-δ» (по Коши). Эквивалентность этих определений. Геометрический смысл предела функции в точке.
2. Определение предела функции в точке на языке окрестностей.
3. Определение предела функции на бесконечности.
4. Определение односторонних пределов функции в точке, их связь с пределом функции в точке.
5. Бесконечные пределы функции.
6. Свойства функций, имеющих конечный предел в точке.

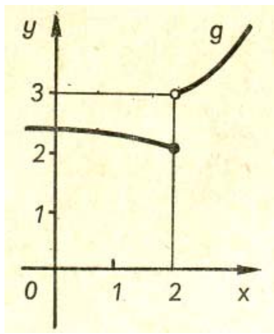
Задачи для решения на занятии:

1. Выберите рисунки, на которых функции имеют конечные пределы при указанном стремлении x:

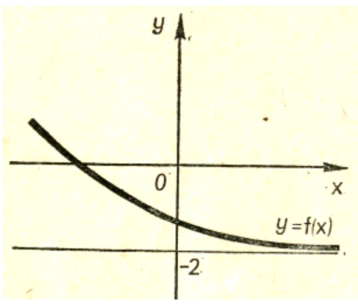
а) x→+∞;



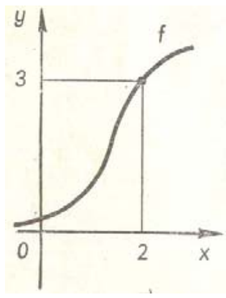
б) x→2;



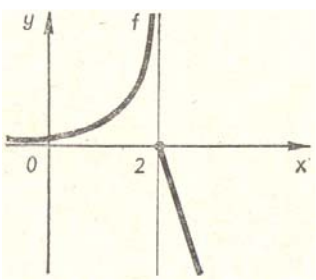
в) x→-∞;



г) x→2

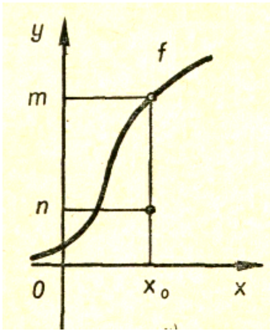


д)x→2, x→-∞.

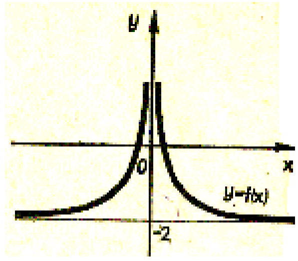


2. Для каждого рисунка запишите соответствующее предельное соотношение:

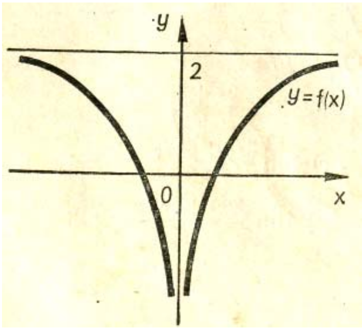
а)



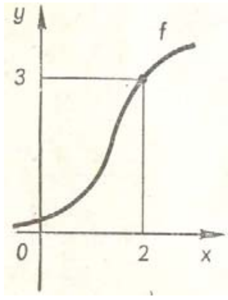
б)



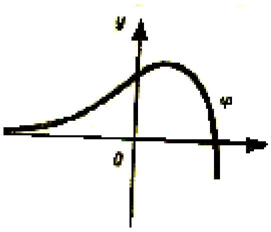
в)



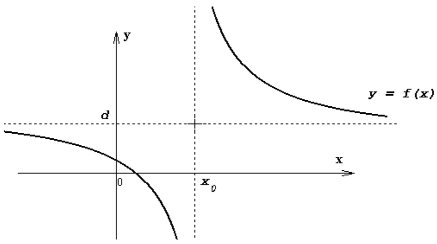
г)



д)



е)



3. Для каждого рисунка из задания 2 соответствующее предельное соотношение запишите на языке «ε - δ».

4. Постройте в окрестности точки 3 график функции, удовлетворяющей условиям: $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=-\infty$; $f(3)=4$.

5. Нарисуйте геометрическую иллюстрацию утверждения: $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=+\infty$. Задайте $\varepsilon>0$ и по нему найдите соответствующее $\delta>0$.

6. Докажите, используя определение предела функции, что:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}=2$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+3}{2x-3}=7$.

7. Выясните, существуют ли пределы функций в указанных точках:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, x<2,\\ 0, x=2,\\ 3-x, 2<x<3,\\ 1, x\geq 3, x_1=2, x_2=3;\end{cases}$

б) $g(x)=\begin{cases}x^3-1, x<1,\\ x-1, 1<x<2,\\ -2, x\geq 2, x_1=1, x_2=2;\end{cases}$

в) $h(x)=\begin{cases}2x+1, x<-\frac{1}{2},\\ 2, x=-\frac{1}{2},\\ x+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ -1, x\geq\frac{1}{2}, x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

8. Приведите пример функции, имеющей своим пределом:

а) 1 при $x\to 1$;

б) -2 при $x\to +\infty$;

в) $\frac{1}{2}$ при $x\to -\infty$;

г) 0 при $x\to 0$;

д) 0 при $x\to\infty$.

Задачи для решения дома:

1.Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

VI.Предел функции в точке и на бесконечности;

I уровень (1,3,4); II уровень (1,2,3,4,5,6,8); III уровень (1,2,3а,б); IV уровень (1).

Практическое занятие №15

Тема: Теоремы о пределах функций. Основные виды неопределенностей и их раскрытие.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 174; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Примеры. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями.

2. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентность бесконечно малых функций. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.
3. Теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций, имеющих пределы.
4. Основные виды неопределенностей и их раскрытие.

Задачи для решения на занятии:

1. Докажите, что функции являются бесконечно малыми при указанном стремлении x:

а) f(x)=$\frac{1}{x}$, x$\to$+∞;

б) g(x)=(x-2)^2, x$\to$2;

в) h(x)=$\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}$, x$\to$+$\infty$;

г) t(x)=2^{-x}, x$\to$+∞.

2. Дано: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2$; $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\frac{1}{2}$.

Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)+g(x))$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)\cdot g(x))$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{g(x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3f(x)-4g(x)}{g^2(x)-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}(3f^2(x)-4g^3(x))$.

3. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-1}{x^2+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{x^5+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2+x-1}{2x^2+x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x+1)}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$;

и) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$;

к) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2-5}{x^2-2x-3}$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   VI. Предел функции в точке и на бесконечности.

   II уровень (7), III уровень (7), IV уровень (4а, б, в, г, ж).

Практическое занятие №16

Тема: Замечательные пределы.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 215; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.
2. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и следствия из него.
3. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ell$ и следствия из него.

Задачи для решения на занятии.

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg5x}{10x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{\sin^2 4x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x\cdot\sin^2 5x}{x^2\cdot\sin 4x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{\cos 2x-\cos 8x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg(x-1)}{x^2-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$.

2. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 5}(16-3x)^{\frac{1}{x-5}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-7)^{\frac{1}{2-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tg2x}{1-\sin 5x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^{x+4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^4-41}{x^4-1}\right)^{\frac{x^2-9}{x-3}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^6+1}{x^6+7}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2+3}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg\dfrac{x}{2}}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1-\sin 3x)}{3tgx-1}$;

л) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ell n(1+tg 2x)}$;

м) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-1}{x-1}$;

н) $\lim\limits_{x\to \ell}\frac{\ell n x^3-3}{x-e}$;

о) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{x-2}$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   VI. Предел функции в точке и на бесконечности

   IV уровень (2, 3, 4 д, е, з, и), IV уровень (5).

Практическое занятие №17

Тема: Контрольная работа «Пределы последовательностей и функций».

I вариант

1. Вычислите:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+8n-3}{n^2-n+3}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$;

   г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

   д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$;

   е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

2. Установите, имеет ли функция предел в указанных точках, и постройте схему графика функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<0, \\ 3, x=0, \\ x-1, 0<x<\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{3}, x\ge\dfrac{1}{3}, \end{cases}$

$x=0, x=\dfrac{1}{3}$;

б) $f(x)=\begin{cases} 3x, -1<x<1, \\ 3, x=1, \\ 3x^2, 1<x\le 2, \end{cases}$

$x=0, x=1.$

3. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$, используя определение предела.

4. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^5+5}{x^5+4}\right)^{2x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

II вариант

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{4x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sqrt{1-tgx}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^4+2x^2-x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$.

2. Установите, имеет ли функция предел в указанных точках, и постройте схему графика функции:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, -2<x<-1, \\ 0, x=-1, \\ x, x>-1, \end{cases}$

$x=0, x=-1;$

б) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x<-\frac{1}{2}, \\ 2, x=-\frac{1}{2}, \\ x+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, \\ -1, x\ge\frac{1}{2}, \end{cases}$

$x=-\frac{1}{2}, x=\frac{1}{2}.$

3. Докажите, используя определение предела функции, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(5x+1)=\frac{7}{2}.$

4. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2};$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6tgxtg3x}.$

III вариант

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-3n^2-n^4}{2n^4-n^2+1};$

б) $\lim\limits_{a\to 2}\frac{8-a^3}{4-a^2};$

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{\sqrt{4-x}};$

г) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2};$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^3 2x-1}{\sin^6 2x};$

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}.$

2. Установите, имеет ли функция предел в указанных точках, и постройте схему графика функции:

а) $f(x)=\begin{cases} 0, x<0, \\ 1, x=0, \\ x^3, x>0, \end{cases}$

$x=-4, x=0;$

б) $f(x)=\begin{cases} x^3-1, x<1, \\ x-1, 1\le x<2, \\ -2, x\ge 2, \end{cases}$

$x=1, x=2.$

3. Докажите, используя определение предела функции, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x-2}=-3.$

4. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6}{x^2+3}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

IV вариант

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6-n-n^2}{6n^2-n-1}$;

б) $\lim\limits_{a\to 2}\frac{8-a^3}{a^4-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$.

2. Установите, имеет ли функция предел в указанных точках, и постройте схему графика функции:

а) $f(x)=\begin{cases}-x, x<-2,\\ 5, x=-2,\\ x, x>-2,\end{cases}$
$x=-2, x=0$;

б) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, x<2,\\ 0, x=2,\\ 3-x, 2<x<3,\\ 1, x\ge 3,\end{cases}$
$x=2, x=3$.

3. Докажите, используя определение предела функции, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}=1$.

4. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+7}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$.

Практическое занятие №18

Тема: Непрерывность функции в точке.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 177; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Различные определения непрерывности функции в точке.
2. Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций.
3. Теорема о непрерывности сложной функции.
4. Свойства функций, непрерывных в точке.
5. Непрерывность элементарных функций: x^n, $n \in \mathrm{N}$; x^{-n}, $n \in \mathrm{N}$; целой рациональной; дробно-рациональной, тригонометрических.
6. Точки разрыва функции и их классификация.
7. Исследование функций на непрерывность и построение схемы графика функции.

Задачи для решения на занятии:

1. Из предложенных функций выберите те, которые являются непрерывными на всей числовой прямой:

   а) $f(x) = -x + 2$; б) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; в) $h(x) = \dfrac{1}{x + 2}$;

   г) $t(x) = \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$; д) $p(x) = x^2 - 4$; е) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2}, x \neq 2, \\ 0, x = 2. \end{cases}$

2. Из предложенных графиков функций выберите те, где функция не является непрерывной, и объясните свой выбор:

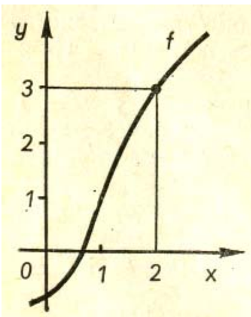


Рис. 1

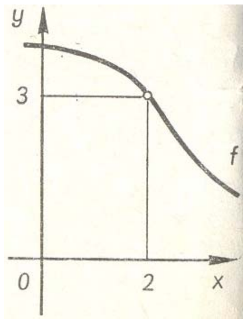


Рис. 2

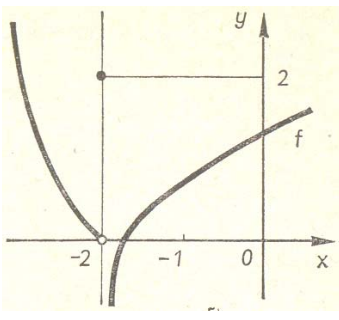


Рис. 3

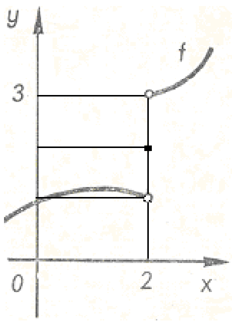


Рис. 4

3. Докажите, используя определение непрерывности в точке, что функция $f(x) = 5x^2 + 1$ непрерывна в точке $x_0=2$.

4. Используя теоремы о непрерывности суммы, произведения, частного, композиции непрерывных функций, докажите непрерывность функций:

   а) $f(x) = x^2+\sin 2x+1$;

   б) $g(x) = \sin^2 3x+e^{2x}(x^2+1)$;

   в) $h(x) = \ln(x^2+8x+20)$.

5. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте схему ее графика:

   а) $f(x) = \operatorname{sign} x$;

   б) $g(x) = 2^{\frac{1}{x}}$;

   в) $h(x) = \begin{cases} x, x \le 0, \\ 1-x, 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, x > 1; \end{cases}$

   г) $k(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 \le x \le 1, \\ 4-2x, 1 < x < 2{,}5, \\ 2x-7, 2{,}5 \le x < +\infty; \end{cases}$

   д) $t(x) = \begin{cases} \ell^{\frac{1}{x}}, x \ne 0, \\ 1, x = 0. \end{cases}$

6. Доопределите функцию f в точке x=0 так, чтобы она стала в ней непрерывной:

   а) $f(x) = \dfrac{\ell n(1-3x)}{x}$; б) $f(x) = \dfrac{2^{3x}-1}{3x}$.

Задачи для решения дома:

1.Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

VII. Непрерывность функции в точке:

I уровень (1,2,3,4,5);

II уровень (1,2,3,4,5,6);

III уровень (5);

IV уровень (2,3).

Практическое занятие № 19

Тема: Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 192; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Теорема об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.
2. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точной нижней и точной верхней границ.
3. Теорема об обращении в нуль функции, непрерывной на отрезке.
4. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке.
5. Применение свойств функций, непрерывных на отрезке, к решению задач.

Задачи для решения на занятии:

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

   VIII.Свойства функций, непрерывных на отрезке:

   II уровень, III уровень.

2. Докажите, что:

   а) sup(3x+7)=13, $x \in [-1;2]$;

   б) inf(3x+1)=-2, $x \in [-1:2]$.

3. Выясните, существует ли корень уравнения:

   а) $x+\cos x = \frac{1}{2}$; б) $x^3-x^5+4=0$.

   4.Решите неравенство:

   а) $\frac{(1-e^x)(x^4+2)(2-x)^3}{x^2(x-1)} \le 0$;

   б) $\frac{(1+\ell gx)^3(5+x)(2+\cos x)}{x^5(x-2)} > 0$.

Задачи для решения дома:

1. Педагогические тесты по разделу «Введение в анализ»:

VIII. Свойства функций, непрерывных на отрезке: IVуровень (2,3,4).

Практическое занятие №20

Тема: Обратная функция. Теорема существования обратной функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 203; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие обратимой функции. Понятие обратной функции. Условия обратимости функции.
2. Свойство графиков взаимнообратных функций.
3. Теорема существования и непрерывности обратной функции.
4. Существование корня n-ой степени из неотрицательного числа.
5. Существование и непрерывность обратных тригонометрических функций.

Задачи для решения на занятии:

1. Выясните, является ли функция f обратимой, и если не является, то найдите ее сужение, которое было бы обратимой функцией:

   а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=|x-3|$; в) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 0, \\ x, x>0. \end{cases}$

2. Даны функции: $f_1(x) = x^2$, $x\in(-\infty;+\infty)$; $f_2(x) = x^2$, $x\in[0;2]$; $f_3(x) = x^2$,

   $x\in[-2;3]$. Определите, какая из данных функций обратима. Для обратной функции запишите соответствующее аналитическое выражение. Укажите область определения и множество значений обратной функции. Постройте графики данной и обратной функций.

3. Выясните, имеется ли обратная функция для сужения функции f(x)=sinx: а) на промежуток $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; б) на промежуток $[2\pi;\frac{5\pi}{2}]$; в) на множество $\{0;\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\}$. Если да, то постройте график соответствующей обратной функции.

4. Выясните, является ли функция f обратимой:

   а) $f(x)=-x^3+1, x\in R$; б) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}, x\in[1;+\infty)$.

   Если функция является обратимой, то напишите аналитическое выражение соответствующей обратной функции; укажите ее область определения и множество значений; постройте графики данной и обратной функций.

5. Найдите функцию, обратную данной (доказав, что она существует); постройте графики данной и обратной функции:

   а) $f(x)=\begin{cases} x+1, 1\le x<2, \\ -3x+12, 2\le x\le 3; \end{cases}$

   б) $f(x)=4x-x^2, x\le 2$;

   в) $f(x)=3x+\sqrt{x+2}, x\ge -2$.

6. Покажите, что функция $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-2}$ обратна самой себе. Установите особенность графика функции, обратной самой себе.

7. Найдите область определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{\arccos\dfrac{2}{x}}+\sqrt{x^2-x-2}$;

б) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+2}{1-x}+\sqrt{x^2-2x}$;

в) $f(x)=ctg\pi x+\arccos(2^x)$;

г) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$;

д) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{36-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

8. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(arctg\frac{x}{5})^2}{x\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\arcsin\frac{x}{3}tg5x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\frac{x^2}{4}}{1-\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\arcsin 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(x^2+2x)}{\arcsin 2x}$;

з) $\lim\limits_{x\to -1+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

9. Доопределите функцию f в точке x=0 так, чтобы она стала в ней непрерывной:

а) $f(x)=\dfrac{tgx}{\arcsin 3x}$; б) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{2tgx}$.

10. Исследуйте функцию f на непрерывность; постройте схему ее графика:

а) $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\arcsin x, x<0,\\ x^2+1, x\ge 0;\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}xarctg\dfrac{1}{x}, x\ne 0,\\ 1, x=0.\end{cases}$

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Педагогические тесты достижений по разделу «Введение в анализ»:

VIII. Свойства функций, непрерывных на отрезке: IV уровень (1).

2. Найдите область определения функции:

а) $f(x)=\arcsin(3x-4)$; б) $f(x)=\arccos\dfrac{2x-3}{4}$;

в) $f(x)=arctg\frac{3-x}{x^2-4}$; г) $f(x)=\arccos\frac{2x}{x^2+3}$.

Практическое занятие №21

Тема: Вычисление производной функции по определению.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 235; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятия приращения независимой переменной и приращения функции.
2. Понятие предела функции в точке.
3. Первый и второй замечательный пределы и следствия из них.
4. Задачи, приводящие к понятию производной.
5. Определение производной функции в точке.
6. Алгоритм нахождения производной функции в точке по определению.
7. Односторонние производные. Связь односторонних производных с производной функции в точке.

Задачи для решения на занятии:

1. Найдите $f(x_o+\Delta x)$, $f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$, $\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$, если:

   а) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; в) $f(x)=e^{2x}$; г) $f(x)=\ln(x^2-1)$.

2. Путь, пройденный свободно падающим телом, определяется формулой $S=4{,}9t^2$. Определите приращение пути свободно падающего тела за промежуток времени от t_1 = 2с до t_2 = 4с с начала падения. Запишите формулу приращения пути в общем виде.
3. Установите, на каком из отрезков средняя скорость изменения функции $f(x)=x^2$ больше: на отрезке [0;4] или на отрезке [1;3].
4. При нагревании тела его температура T изменяется по закону $T=0{,}4t^2$, где T – температура в градусах Цельсия, t – время в секундах. Найдите:

   а) среднюю скорость изменения температуры тела за промежуток времени от t_1 = 4с до t_2 = 6с;

   б) скорость изменения температуры тела в момент времени t = 4с.

5. Какие из приведенных ограничений накладываются на Δx при определении производной функции в точке:

   а) $\Delta x>0$;

   б) $\Delta x\geq 0$;

   в) $\Delta x<0$;

г) $\Delta x \le 0$;

д) $\Delta x \ne 0$;

е) $x_o + \Delta x \in D(f)$;

ж) $f(x)$ непрерывна на $(x_o - \Delta x;\ x_o + \Delta x)$.

6. Используя определение производной функции в точке, найдите производные функции из упражнения 1 в точке x_o.
7. Найдите производную функции $f(x) = \begin{cases} 0, x \in Q, \\ x^2, x \in I, \end{cases}$ в точке x_o=0, если она существует.
8. Докажите, что функции в указанных точках не имеют производной:

а) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, x \ne 0, \\ 0, x = 0; x_o = 0; \end{cases}$ б) $g(x) = |\ln x|$, $x_o = 1$.

Что можно сказать о непрерывности этих функций в указанных точках?

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Используя определение производной функции в точке, найдите в точке x_o производные функций:

а) $f(x)=ax+b$;

б) $g(x)=x^3$;

в) $h(x)=\sqrt{x^2-5}$;

г) $k(x)=\cos x$;

д) $l(x)=2^{-x}$.

2. Количество соли, растворившейся в воде за промежуток времени t, определяется по закону $x=x(t)$. Найдите:

а) среднюю скорость растворения соли за промежуток времени $[t_o;\ t_o+\Delta t]$;

б) скорость растворения соли в момент времени t_o.

3. Найдите производную функции

$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in Q, \\ -x^2, x \in Y \end{cases}$ в точке $x_o = 0$, если она существует.

4. Докажите, что функции в указанных точках не имеют производной:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2, x < 0, \\ \sin x, x \ge 0, x_o = 0; \end{cases}$ б) $g(x) = |x-1|, x_o = 1.$

Что можно сказать о непрерывности этих функций в указанных точках?

Практическое занятие № 22

Тема: Дифференцируемость функции в точке. Таблица производных. Правила дифференцирования. Дифференцируемость сложной функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 235; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие дифференцируемости функции в точке. Связь дифференцируемости с существованием производной и непрерывностью.
2. Таблица производных.
3. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного дифференцируемых функций (с доказательством).
4. Дифференцируемость сложной функции (с доказательством).

Задачи для решения на занятии:

1. Выясните, дифференцируемы ли функции в указанных точках:

а) $f(x) = \frac{1}{2}\left|x-1\right|$; $x_0 = 1$;

б) $g(x) = \frac{1}{2\left|x-1\right|}$; $x_0 = 1$;

в) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$; $x_0 = 1$;

г) $k(x) = \begin{cases} x \cdot arctg\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$.

2. а) сформулируйте определение непрерывности функции в точке.

б) всякая ли дифференцируемая в точке функция является в этой точке непрерывной?

в) всякая ли непрерывная в точке функция является в ней дифференцируемой?

г) нарисуйте график непрерывной в некоторой точке функции, однако не являющейся в этой точке дифференцируемой.

3. Найдите производные функций:

а) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$;

б) $g(x) = \left(x^2-1\right)^5$;

в) $h(x)=\sqrt[3]{x}$;

г) $k(x)=\sqrt{a^2-x^2}$;

д) $l(x)=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

е) $f_1(x)=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$;

ж) $g_1(x)=\cos^5 x$;

з) $h_1(x)=\cos ax\cdot\sin bx$;

и) $k_1(x)=ctg^2\frac{x}{2}$;

к) $l_1(x)=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}tg^4\frac{x}{2}$;

л) $f_2(x)=e^{-x^2}$;

м) $g_2(x)=2^{x^2-1}$;

н) $h_2(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$, $h_2'(0)$;

0) $k_2(x)=\ln\left(x^2+a^2\right)$;

п) $l_2(x)=\log_2\left(x^3+1\right)$.

Задачи для решения дома:

1. Выясните, дифференцируемы ли в указанных в точках функции:

   а) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}$; $x_0=1$;

   б) $g(x)=(x-1)^{\frac{2}{5}}$; $x_0=1$.

   Что можно сказать о непрерывности этих функций в указанных точках?

2. Найдите производные функций:

   а) $f(x)=x^3\left(x^2-1\right)^2$;

   б) $g(x)=\frac{3x-1}{x^5}$;

   в) $h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

   г) $k(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $l(x) = \sin^3 x;$

е) $f_1(x) = x^2 \sin\frac{1}{x};$

ж) $g_1(x) = tgx + tg^3 x + \frac{3}{5} tg^5 x + \frac{1}{7} tg^7 x;$

з) $h_1(x) = \frac{1}{\cos x};$

и) $k_1(x) = e^{ax} \cdot \cos bx;$

к) $l_1(x) = \sqrt{x} + \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}};$

л) $f_2(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}};$

м) $g_2(x) = e^{\ln\cos x};$

н) $h_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x^2},\ h_2'\left(\frac{1}{2}\right), h_2'\left(\frac{\pi}{4}\right);$

о) $k_2(x) = \frac{1}{2} tg^2 x + \ln n \cos 3x;$

п) $l_2(x) = e^{-x^2} \cdot \ln 5x.$

Практическое занятие №23

Тема: Производная обратной функции. Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно-степенной функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 253; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие обратной функции. Теорема существования обратной функции для непрерывной монотонной функции.
2. Дифференцирование обратной функции (с выводом).
3. Понятие показательно-степенной функции, ее область определения, непрерывность.
4. Основные логарифмические тождества. Связь между логарифмами с разными основаниями.
5. Производные сложных функций: показательной, логарифмической, степенной.
6. Суть метода логарифмического дифференцирования.
7. Производная показательно-степенной функции.

Задачи для решения на занятии:

1. Продифференцируйте функции:

а) $f(x) = \arcsin\frac{x}{a}$;

б) $g(x) = \arccos\frac{1}{x}$;

в) $h(x) = arctg(x-1)$;

г) $k(x) = (\arcsin x)^2$;

д) $l(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} arcctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

е) $t(x) = 2\sqrt{3} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{x^2+3}, t'(3)$.

2. Найдите производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

а) $f(x) = \frac{(x+1)^6 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-22)^2}}$;

б) $g(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$;

в) $h(x) = (\ln x)^x$.

3. Продифференцируйте функции:

а) $f(x) = x^{\sin x}$; б) $g(x) = (x^2+1)^x$.

Задачи для решения дома:

1. Продифференцируйте функции:

а) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

б) $g(x) = \arccos(3x-4x^2)$;

в) $h(x) = arctg\frac{x+1}{x-1}, x \neq 1$;

г) $k(x) = -arcctg\frac{x}{1+x}, x \neq -1$.

2. Найдите производные функций, используя правило логарифмического дифференцирования:

а) $f(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$;

б) $g(x) = (\sin x)^{\cos x}$;

в) $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}}$;

г) $k(x)=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$.

Практическое занятие №24

Тема: Применение производной к решению геометрических и физических задач.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 238; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Геометрический смысл производной функции в точке.
2. Геометрический смысл дифференцируемости функции в точке.
3. Уравнение касательной и нормали к графику функции в данной точке.
4. Нахождение угла между двумя кривыми в данной точке.
5. Физический смысл производной функции в точке.

Задачи для решения на занятии:

1. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=x^2-4x+4$ в точке с абсциссой $x_0=3$.
2. Выясните, какой угол (тупой или острый) образует с положительным направлением оси ох касательная к графику функции:

   а) $f(x)=(1-x)^2, x_0=3$; б) $g(x)=1-\dfrac{1}{x}, x_0=2$.

3. Найдите угол между касательными к графику функции $f(x)=x^3-4x^2+3x+1$, проведенными в точках с абсциссами $x_1=0$, $x_2=1$.
4. Определите, в какой точке касательная к графику функции $f(x)=x^2$:

   а) параллельна прямой $y=2x+1$; б) перпендикулярна прямой $y=2x$.

5. Найдите координаты точек пересечения с осями координат тех касательных к графику функции $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$, у которых угловой коэффициент равен 4.
6. Найдите угол, под которым парабола $y=x^2$ видна из точки A(2;-1).
7. Проведите нормаль к линии $y=x\cdot\ln x$ параллельно прямой $2x-2y+3=0$.
8. Найдите углы, под которыми пересекаются линии $y=\sin x$ и $y=\cos x$ $(0\le x\le\pi)$.

9. Найдите углы, под которыми пересекаются линии $y=\frac{x+1}{x+2}$ и $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$.

10. При торможении маховик за t секунд поворачивается на угол $\varphi(t)=5+6t-t^2$ радиан. Найдите:

а) угловую скорость ω вращения маховика в момент времени t=2с;

б) угловое ускорение в момент времени t;

в) момент времени t, когда вращение прекратится.

11. Имеется тонкий неоднородный стержень АВ длиной 20 см. Известно, что для любой его точки С, отстоящей от точки А на расстояние l см., масса части АС стержня определяется по формуле $m=3l^2+5l$. Найдите линейную плотность стержня:

а) в точке, отстоящей от точки А на 5 см;

б) в самой точке А;

в) в конце стержня.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Определите угловые коэффициенты касательных к линии $y=1-x^2$ в точках: A(0;1); B(2;-3); C(1/2;3/4).
2. Выясните, какой угол (тупой или острый) образует с положительным направлением оси ох касательная к графику функции:

   а) $f(x)=2x-x^2, x_0=2;$ б) $g(x)=1-\frac{1}{x^2}, x_0=1.$

3. Найдите на графике функции $f(x)=3x^3-4x^2+1$ точку, касательная к графику функции в которой образует с осью абсцисс угол $\pi/4$.
4. Определите координаты точек пересечения с осью OY тех касательных к графику функции $f(x)=\frac{x+4}{x-5}$, которые образуют угол $3\pi/4$ с осью OX.
5. Найдите площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке с абсциссой $x_0=3$.
6. Лестница длиной 1 в момент t=0 стоит вертикально, прислоненная к стене. В этот момент нижний конец начинает равномерно отодвигаться со скоростью v. Найдите:

   а) высоту верхнего конца лестницы в момент времени t от начала движения нижнего конца;

   б) скорость, с которой этот конец опускается в момент времени t.

7. Распад радия совершается по закону $R=R_0e^{-kt}$, где R_0 – количество радия в начальный момент времени $t=0$, R – количество нераспавшегося радия в момент времени t. Определите скорость распада радия в момент времени t. Покажите, что скорость распада пропорциональна начальному количеству радия.

8. Составьте уравнение нормали к кривой $y=x^2-6x+6$, которая перпендикулярна прямой, соединяющей начало координат с вершиной этой кривой.

9. Найдите углы, под которыми пересекаются линии: $y=(x-2)^2$ и $y=4x-x^2+4$.

Практическое занятие №25

Тема: Дифференциал и его применение в приближенных вычислениях.
Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 238; лекции.
Основные вопросы теории:

1. Дифференциал функции, его геометрический и физический смысл.
2. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала I порядка.
3. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Задачи для решения на занятии:

1. Найдите приращение функции $f(x)=x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислите $\Delta f(x_0)$, если $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}1$; $0{,}01$. Определите погрешность (абсолютную и относительную) значения $\Delta f(x_0)$, ограничившись членом, содержащим Δx в первой степени.

2. Докажите, что для дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x)$ справедливо соотношение: $\Delta f(x_0) \sim d\, f(x_0)$, $\Delta x \to 0$.

3. Главная часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0 при $\Delta x=0{,}2$ оказалась равной 0,8. Определите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если она дифференцируема в этой точке.

4. Известно, что в некоторой точке x_0 приращению независимой переменной $\Delta x=0{,}02$ соответствует главная часть приращения функции $f(x)=x2/df(x_0)=-0{,}8$. Определите начальное значение x_0 независимой переменной.

5. Найдите дифференциал функции $f(x)=x^3-2x^2+x+3$ двумя способами:

   а) как главную часть приращения функции;

   б) с помощью производной.

   Сравните полученные результаты. Какой способ вычисления дифференциала функции проще?

6. Найдите дифференциалы функций:

   а) $f(x)=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2$;

б) $g(x) = \cos(\ln x)$;

в) $h(x) = \arcsin\frac{x}{2}$.

7. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[3]{30}$; б) sin 29^0; в) arcsin 0,5011; г) $\frac{1{,}98^5 - 2}{1{,}98^4 - 1}$.

8. Вычислите приближенно с помощью дифференциала площадь кругового кольца между двумя концентрическими окружностями с радиусами 8 см и 8,02 см.

9. Выразите дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}, x = t^3 + 2t + 1$;

б) $s = e^z, z = \frac{1}{2}\ln t, t = 2u^2 - 3u + 1$.

Задачи для решения дома:

1. Найдите приращение Δv объема v шара при изменении радиуса R=2 на ΔR. Найдите погрешность (абсолютную и относительную) приращения Δv при ΔR=0,5; 0,1; 0,01, ограничившись членом, содержащим ΔR в первой степени.
2. Найдите дифференциал функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{(x+1)^3}$;

б) $g(x) = \sin x - x\cos x$;

в) $h(x) = \ln tg(ax + b)$.

3. Вычислите приближенно с помощью дифференциала:

а) $\sqrt[5]{33}$; б) cos 151^0; в) arcos 0.5011; г) $\sqrt{3{,}03^3 - 2}$.

4. Радиус шара увеличился с 5 см до 5,02 см. Вычислите приближенно с помощью дифференциала, на сколько при этом увеличился объем шара.
5. Выразите дифференциал сложной функции через независимую переменную и ее дифференциал:

а) $s = \cos^2 z, z = \frac{t^2 - 4}{4}$;

б) $y = \ln tg\frac{u}{2}, u = \arcsin v, v = \cos 2s$.

Практическое занятие №26

Тема: Производные и дифференциалы высших порядков.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 265; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятия производной второго, третьего, n-го порядка; их обозначение.
2. Свойства производных высших порядков: вынесение постоянного множителя за знак производной n-го порядка; производная n-го порядка от суммы функций; производная n-го порядка от произведения двух функций.
3. Формулы для производных n-го порядка функций: $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$, a^x, e^x.
4. Понятия дифференциала второго, третьего, n-го порядка; их обозначение; формулы для их вычисления.
5. Дифференциал второго порядка сложной функции. Нарушение инвариантности формы у дифференциалов высших порядков.

Задачи для решения на занятии:

1. Найдите производные указанного порядка:

   а) $f(x)=x^6, f^{(7)}(x)$;

   б) $g(x)=x\sqrt{x^2+1}+\ln(x+\sqrt{x^2+1}), g^{(4)}(x)$;

   в) $h(x)=x^2\sin x, h^{(10)}(x)$;

   г) $k(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}, k^{(n)}(x)$;

   д) $l(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}, l^{(n)}(x)$.

2. Тело движется по закону: $S(t)=ae^t+be^{-t}$. Покажите, что его ускорение численно равно пройденному пути.
3. Докажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, -1<x\le 0,\\ 1, x>0\end{cases}$$

   имеет в точке x=0 первую производную, но не имеет второй производной. Сделайте чертёж.

4. Точка совершает затухающие колебания по закону $x(t)=Ae^{-kt}\sin(\omega t+\varphi)$. Установите связь между её координатой x, скоростью υ и ускорением a.
5. Найдите $d^2f(x)$, если:

   а) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$;

   б) $f(x)=(x+1)^3(x-1)^2$;

в) $f(x)=e^{2x}$.

6. Найдите $d^3 f(x)$, если:

а) $f(x)=x^m$;

б) $f(x)=\sin^2 x$;

в) $f(x) = \text{tg}\, x$.

7. Выразите $d^2 y$ через:

а) z и dz;

б) x и dx;

в) t и dt,

если $y=\sin z, z=a^x, x=t^3$

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Найдите производные указанного порядка:

а) $f(x)=\sqrt[5]{x^3}, f'''(x)$;

б) $g(x)=\dfrac{a}{x^m}, g^{(4)}(x)$;

в) $h(x)=x^2e^{5x}, h^{(50)}(x)$;

г) $k(x)=x^2\cos 3x, k^{(4)}(x)$.

2. Найдите выражение для $f^{(n)}(x)$:

а) $f(x)=\ln(ax+b)$;

б) $f(x)=\sqrt{x}$;

в) $f(x)=x^3\cdot e^{mx}$.

3. Докажите, что ускорение гармонического колебания $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ пропорционально отклонению x от положения равновесия.

4. Найдите $d^2 f(x)$:

а) $f(x)=4^{-x^2}$;

б) $f(x)=\sin^2 2x$;

в) $f(x)=arctg\dfrac{x}{2}$.

5. Найдите $d^3 f(x)$:

а) $f(x)=(x+1)^2(x-1)^3$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+5x^2}$;

в) $f(x)=\sin ax\cos bx.$

6. Найдите $d^2 f(x), f(x)=\ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$:

а) x – независимая переменная;

б) $x=\varphi(t), t$ – независимая переменная.

Практическое занятие №27

Тема: Функции, заданные параметрически, и их дифференцирование.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 269; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие функции, заданной параметрически. Примеры функций, заданных параметрически.
2. Теорема существования функции, заданной параметрически.
3. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
4. Производные высших порядков функции, заданной параметрически.

Задачи для решения на занятии:

1. Преобразуйте к параметрической форме уравнения линий, положив $y=tx$:

а) $(x+y)^2=a(x-y)$;

б) $(x+y)^3=axy$;

в) $(x+y)^4=a^2(x^2+y^2)$.

2. Исключите параметр t из уравнений:

а) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, t\in[0;\pi]; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, t\in[0;\frac{\pi}{2}]; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=\dfrac{a\sin^3 t}{2+\sin t}, t\in[0;\pi]. \end{cases}$

3. Найдите $\frac{dy}{dx}$ для функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases} x=e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ y=e^{\alpha t}\sin\beta t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = \dfrac{a\cos t}{1 + 2\cos t}, \\ y = \dfrac{b\sin t}{1 + 2\cos t}. \end{cases}$

4. Докажите, что параметрически заданная функция

$$\begin{cases} x = \ln t - \arcsin t + C, \\ y = t + \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

при любом постоянном C удовлетворяет уравнению $y = y' + \sqrt{1 - (y')^2}$.

5.Найдите угловой коэффициент касательной к кривой:

а) $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4, \\ y = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$ в точке А(2;1);

б) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ в точке А(1;-$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$).

6. Напишите уравнение касательной к кривой:

а) $\begin{cases} x = 2et, \\ y = e^{-t'} \end{cases}$ в точке t=0;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^2} \end{cases}$ в точке А($\dfrac{6a}{5}$;$\dfrac{12a}{5}$).

7. На кривой, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases}$$

найдите точки, в которых касательная к кривой параллельна оси OY.

8. Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1 + \sin t \cdot \cos 2t, \\ y = 1 - \sin 2t \cdot ctgt. \end{cases}$

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Исключите параметр t из уравнения:

а) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

2. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{3}(2\cos t + \cos 2t), \\ y = \dfrac{a}{3}(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

3. Докажите, что параметрически заданная функция:

$$\begin{cases} x = Ce^{-t} - 2t + 2, \\ y = C(1+t)e^{-t} - t^2 + 2 \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению: $y = (1 + y')x + (y')^2$ при любом постоянном C.

4. Найдите уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t \end{cases}$ при t=π/6.

5. Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

Практическое занятие № 28

Тема: Контрольная работа «Дифференцирование функций».

I вариант

1. Найдите производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$, используя определение производной функции в точке.

2. Найдите производные функций:

а) $f(x) = 10^{1-\sin^4 3x}$;

б) $g(x) = \dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$;

3. Найдите значение производной функции $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ в точке $x_0=2$.

4. Вычислите приближенно, используя дифференциал: $\sqrt{8.93}$.

5. Найдите $\frac{dy}{dx}$: $\begin{cases} x=1+\sin t\cdot cox2t, \\ y=1-\sin 2t\cdot ctgt. \end{cases}$

6. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2+2x-1$ в точке ее пересечения с кривой $y=2x^2$ (сделайте чертеж).

II вариант

1. Найдите производную функции $f(x)=x^3+15x^2-25$, используя определение производной функции в точке.

2. Найдите производные функций:

а) $f(x)=\ln arctg\frac{1}{1+x}$;

б) $g(x)=e^{2x+3}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.

3. Найдите значение производной функции $f(x)=\cos^2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ в точке $x_0=1$.

4. Вычислите приближенно, используя дифференциал: ln1,02.

5. Найдите $\frac{dy}{dx}$: $\begin{cases} x=\frac{1}{(1-t)^2}-1, \\ y=\frac{t^2}{(1-t)^2}. \end{cases}$

6. Найдите углы, под которыми пересекаются кривые: $x^2=4ay$ и $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

III вариант

1. Найдите производную функции $f(x)=-ctgx-x$, используя определение производной функции в точке.

2. Найдите производные функций:

а) $f(x)=\frac{1}{arctge^{-2x}}$;

б) $g(x)=(\ln x)^x$.

3. Найдите значение производной функции $f(x)=\frac{1-10^x}{1+10^x}$ в точке $x_0=0$.

4. Вычислите приближенно $\frac{2,99}{\sqrt{10-2.99^2}}$, используя дифференциал.

5. Найдите $\frac{dy}{dx}$: $\begin{cases} x=\frac{1}{t^2}\cdot\ln t, \\ y=\frac{2}{t}\cdot\ln t+\frac{1}{t}. \end{cases}$

6. Определите углы, под которыми пересекаются кривые $y=\frac{1}{x}$ и $y=\sqrt{x}$.

IV вариант

1. Используя определение производной функции в точке, найдите производную функции $f(x)=\sin(7x+1)$.

2. Найдите производные функций:

а) $f(x)=e^{\sqrt{\ln\left(a\,x^2+bx+c\right)}}$;

б) $g(x)=arctg\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}.$

3. Найдите значение производной функции $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$ в точке $x_0=0$.

4. Вычислите приближенно $\sqrt[5]{31}$, используя дифференциал.

5. Найдите $\frac{dy}{dx}$: $\begin{cases} x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

6. Определите углы, под которыми пересекаются линии $y=x^2$ и $3x-y-2=0$.

Практическое занятие № 29

Тема: Теоремы о среднем дифференциального исчисления.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. - М.: Высшая школа, 1988. – С. 273; лекции.

Основные вопросы теории:

1.Теорема Ферма, её геометрический смысл.

2. Теорема Ролля, её геометрический смысл.

3. Теорема Лагранжа, её геометрический смысл.

4. Теорема Коши, её геометрический смысл.

Задачи для решения на занятии:

1.Выясните, удовлетворяет ли функция f(x)=x^3 условиям теоремы Ферма на [0;1].

2. Выясните, можно ли к функции $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$ применить теорему Ролля на отрезке [-1;1].

3. Докажите, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет действительный корень и только один.

4. Докажите, что все корни производной многочлена $p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ действительны, и укажите границы, между которыми они заключены.

5. Выясните, удовлетворяет ли функция $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le -1, \\ x^4, & x > -1 \end{cases}$ на отрезке [-2;1] условиям теоремы Ролля. Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля, то найдите ту точку x_0, в которой производная функции обращается в нуль.

6. Выясните, удовлетворяет ли функция $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$ условиям теоремы Лагранжа на отрезке [0;2]. Если функция удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то найдите ту точку x_0, в которой выполняется равенство $f(2) - f(0) = f'(x_0)(2-0)$.

7. Выясните: а) применима ли теорема Лагранжа к функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на отрезке [а;в], если $a \cdot в < 0$; б) удовлетворяет ли функция $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ условиям теоремы Лагранжа на отрезке [-1;2].

8. На кривой $y = x^2 + 3x + 1$ найдите точку, в которой касательная к кривой параллельна хорде, соединяющей точки A(-1;-1) и B(1;5).

9. Используя теорему Лагранжа, докажите, что $\left|\ln x_2 - \ln x_1\right| < \dfrac{\left|x_2 - x_1\right|}{a}$, $x_1, x_2 \in [a;+\infty), a > 0.$

10. С помощью теоремы Лагранжа, докажите, что $\left|\Delta y - dy\right| \le M \cdot (\Delta x)^2$, *где* $M = \max\limits_{[x;\,x+\Delta x]} \left|f''(x)\right|$.

11. Оцените точность приближенного вычисления с помощью дифференциала $\sqrt{9{,}02}$.

12. Выясните, удовлетворяют ли функции $f(x) = \sin x$ *и* $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ условиям теоремы Коши на отрезке [-8;8].

13. Объясните, почему теорема Коши не может быть применима к функциям $f(x) = x^2$ *и* $g(x) = x^3$ на отрезке [-1;1].

Задачи для решения дома:

1. Выясните, удовлетворяет ли условиям теоремы Ролля на [-1;1] функция
$$f(x)=\begin{cases}1-x^2,\ x\le 0,\\ 1-x^3,\ x>0.\end{cases}$$
Если теорема Ролля применима, то найдите ту точку с, в которой производная функции равна нулю.
2. По формуле Лагранжа определите значение с на отрезке [а;в] для функций:
а) $f(x)=x^2$;
б) $g(x)=5x^3+2x$;
в) $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$;
г) $k(x)=x^{\frac{1}{3}}$.
3. Выясните, удовлетворяет ли условиям теоремы Лагранжа на отрезке[-1;2] функция $f(x)=4-x^2$. Если f(x) удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то найдите ту точку с, в которой $f'(c)=\dfrac{f(в)-f(a)}{в-a}$.
4. Используя теорему Лагранжа, докажите неравенство:
$$arctgx_2-arctgx_1\le x_2-x_1,\ x_2>x_1.$$
5. Оцените точность приближенного вычисления с помощью дифференциала $\sin 29^0$.
6. Установите, удовлетворяют ли условиям теоремы Коши на отрезке [-2;2] функции $f(x)=e^x$ и $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Практическое занятие №30

Тема: Раскрытие неопределенностей (вычисление пределов) с помощью производных.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 283; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}(x\to a, a\in R)$.
2. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}(x\to+\infty, x\to-\infty)$.

3. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.
4. Раскрытие неопределенностей вида: $0\cdot\infty; \infty-\infty; \infty^0; 1^\infty; 0^0$ с использованием правила Лопиталя.

<u>Задачи для решения на занятии:</u>

1. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(tgx - \frac{1}{1-\sin x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x - \frac{1}{2}tgx}{1+\cos 4x}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x + 2\ln x}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

з) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+}(tgx)^{\sin 2x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - ctg^2 x\right)$.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x - a}$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\ln(1+ax)}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$;

з) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{x}}$.

Практическое занятие №31

Тема: Исследование функций на монотонность и экстремумы. Условие постоянства функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 307; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Условие постоянства функции. Применение производной к доказательству тождеств.
2. Достаточные условия строгой монотонности функции на промежутке.
3. Необходимые и достаточные условия монотонности функции на промежутке.
4. Понятия максимума, минимума, экстремума функции.
5. Необходимые условия экстремума функции в точке.
6. Достаточные условия экстремума функции в точке (по I и II производной).
7. Применение производной к доказательству неравенств.

Задачи для решения на занятии:

1. Докажите, что функция $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ не зависит от x (является постоянной). Найдите значение этой постоянной.
2. Докажите, что функция $g(x)=-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}+2arctgx$ не зависит от x, если $|x|<1$.
3. Докажите, что возрастают на R функции:

а) $f(x)=x^5+6x^3$;

б) $g(x)=x+\cos x+a$.

4. Докажите, что убывают на R функции:

а) $f(x)=\sin x-2x+c$;

б) $g(x)=-2x+10$.

5. Укажите промежутки монотонности функций:

а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-12x+2$;

б) $g(x)=\frac{x-1}{2x+1}$;

в) $h(x)=\frac{x}{\ln x}$;

г) $k(x)=\sin x+\cos x, 0<x<\frac{\pi}{2}$.

6. Докажите неравенства:

а) $\sin x > x-\frac{x^3}{6}, x>0$;

б) $x-\frac{x^3}{3}<arctgx<x-\frac{x^3}{6}, 0<x\le 1$;

в) $x^2-x^3<\frac{4}{27}, \frac{2}{3}<x<+\infty$.

7. Исследуйте на экстремум функции:

а) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$;

б) $g(x)=-\frac{3}{(x-2)^2}$;

в) $h(x)=x^2e^{-x}$;

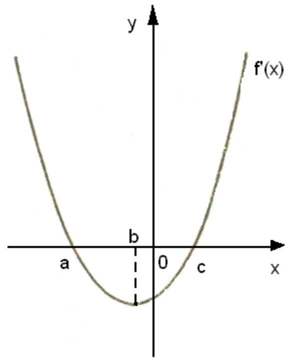
г) $s(x)=\arcsin(x^2-x)$;

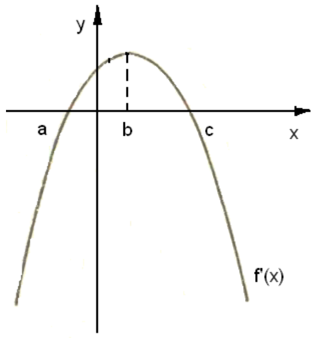
д) $k(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$;

е) $l(x)=x^2(x-4)$.

8. Постройте схему графика функции f(x), производная которой имеет график:

а) б)





Задачи для решения дома:

1. Докажите, что функция $f(\alpha) = \sin^2 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ является постоянной, и найдите значение этой постоянной.
2. Докажите, что возрастают на R функции:

   а) $f(x)=x^3+4x$;

   б) $g(x)=x-\sin x$.

3. Докажите, что убывают на R функции:

   а) $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$;

   б) $g(x)=52-20x$.

4. Исследуйте на монотонность функций:

   а) $f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$;

   б) $g(x) = 2x^2 - \ln x$;

   в) $h(x) = x - 2\sin x, 0 \le x \le 2\pi$;

   г) $l(x) = x^2 e^{-2x}$.

5. Докажите неравенства:

   а) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, x > 1$;

   б) $e^x > 1 + x, x > 0$.

6. Исследуйте на экстремум функции:

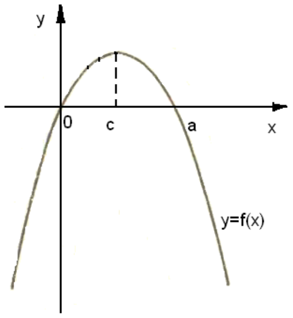
   а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$;

   б) $g(x) = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$;

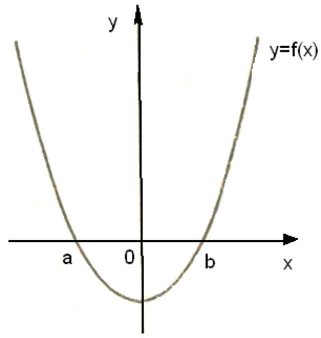
   в) $h(x) = \sin x - x$.

7. Постройте схему графика функции f(x), производная которой имеет график:

а)



б)



Практическое занятие №32

Тема: Наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 309; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке.
2. Сравнение наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке с максимумом (минимумом) функции.
3. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

Задачи для решения на занятии:

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

   а) $f(x) = x^3 - x, x \in [0;3]$;

   б) $g(x) = x^4 - 8x^2 - 9, x \in [-1;3]$;

   в) $h(x) = x^2, x \in (0;1]$;

   г) $k(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, x \in (0;3]$;

   д) $l(x) = \cos x, x \in (0;\frac{\pi}{2}]$;

   е) $p(x) = 2tgx - tg^2 x, x \in [0;\frac{\pi}{2})$.

2. Найдите наименьшее значение функции f(x)=$\cos^2$x-2sinx на (-∞;+∞).

3. Найдите наименьшее из расстояний от точки M(2;0) до точек графика функции $y(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27(x-2)}}$.

4. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега, нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км на берегу (считая по берегу реки) от ближайшей к кораблю точки берега. Если матрос может делать пешком 5 км в час, а на веслах 4 км в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?
5. Определите, каким должно быть сопротивление электронагревательного прибора r, включенного в цепь тока сопротивлением R, чтобы в нем выделилось максимальное количество теплоты Q, если $Q=r\cdot I^2$, $I=E/(r+R)$.
6. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 15 см. Как надо выбрать их длины, чтобы длина гипотенузы была наименьшей?
7. Определите число, для которого разность между ним и его квадратом является наибольшей.
8. Среди всех решений уравнения $\cos 4x=-2\cos^2 x$ найдите те, при которых выражение x^2+2x-3 принимает наименьшее значение.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

   а) $f(x)=x^2-1, x\in[0;3]$;

   б) $g(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(0;4]$;

   в) $h(x)=x+2\sqrt{x}, x\in(0;4]$;

   г) $k(x)=\sin x+2\cos x, x\in[0;\dfrac{3\pi}{4}]$;

   д) $l(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x+3}, x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Число 16 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
3. Найдите наименьшее из расстояний от точки M(0;1) до точек графика функции $y(x)=1+\dfrac{1}{4\sqrt{3}\cdot x\sqrt{x}}$.
4. Стадион представляет собой прямоугольное поле с полукругами, присоединенным к его противоположным сторонам. Периметр стадиона должен быть равен 290 м. Найдите максимальную площадь стадиона указанной формы и периметра.
5. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Определите, в каком случае будет наименьшая общая стоимость бриллианта, разбитого на две части.

6. Определите, какое сопротивление нужно подключить к батарее с внутренним сопротивлением r, чтобы выделяемая на нем мощность была наибольшей.
7. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|O_1B|=6\sqrt{3}$, где O_1 – центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Найдите $|BB_1|$, при которой объем призмы будет наибольшим, зная, что $|BB_1|\in[1;8]$.

Практическое занятие №33, 34

Тема: Общая схема исследования функции и построение графика функции.

Литература: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – С. 324; лекции.

Основные вопросы теории:

1. Понятие выпуклости (вогнутости) функции на промежутке.
2. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции на промежутке.
3. Понятие точки перегиба графика функции.
4. Необходимые условия точки перегиба графика функции.
5. Достаточные условия существования точки перегиба графика функции.
6. Асимптоты графика функции: вертикальные, наклонные, горизонтальные.
7. Общая схема исследования функции и построение ее графика.

Задачи для решения на занятии №33:

1. Найдите асимптоты графика функции и постройте схему ее графика:

   а) $f(x)=\dfrac{5x-4}{4x-5}$;

   б) $g(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$;

   в) $h(x)=\dfrac{-3x^2-5x-4}{x+1}$;

   г) $l(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

2. Покажите, что функция $f(x)=(x+4)^4+e^x$ всюду на R выпукла вниз.
3. Покажите, что функция $g(x)=\ln(x^2-1)$ всюду в D(g) выпукла вверх.
4. Определите a и b, зная, что точка A(1;3) является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$.
5. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции:

а) $f(x) = x^4 - 6x^2$;

б) $g(x) = x|x|$;

в) $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$;

г) $l(x) = \frac{2x}{1+x^2}$;

д) $k(x) = x^4(12\ln x - 7)$;

е) $p(x) = e^{\sin x}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Задачи для решения дома к занятию №33:</u>

1. Найдите асимптоты графика функции и постройте схему ее графика:

   а) $f(x) = \frac{3x-2}{2-3x}$;

   б) $g(x) = \frac{4-x^2}{x+3}$;

   в) $h(x) = \frac{5x^2 - 22x - 16}{x-5}$;

   г) $l(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$.

2. Покажите, что функция $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ всюду на R выпукла вниз.
3. Покажите, что функция $g(x) = \ln(x^2 - 3)$ всюду в D(g) выпукла вверх.
4. Определите a и b, зная, что точка A(2;3) является точкой перегиба кривой $y=-ax^3+bx^2-x$.
5. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции:

   а) $f(x) = x^3 + x$;

   б) $g(x) = |x^2 - 1|$;

   в) $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

   г) $l(x) = x + \sin x$.

<u>Задачи для решения на занятии №34:</u>

1. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

   а) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$;

   б) $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

в) $h(x)=\dfrac{1-x^2}{4-x^2}$;

г) $k(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$;

д) $l(x)=\cos 3x-3\cos x$;

е) $p(x)=e^{x^2-2x}$;

ж) $t(x)=x-\ln(x+1)$;

з) $w(x)=x-arctg\sqrt{x}$.

<u>Задачи для решения дома к занятию №34:</u>

1. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:

а) $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(x^2-3\right)^2$;

б) $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$;

в) $h(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$;

г) $k(x)=\sin^2 x+\cos x$;

д) $l(x)=x+e^{-x}$;

е) $p(x)=x^2\ln x$;

ж) $t(x)=x+arctgx$.

Практическое занятие №35

<u>Тема:</u> Самостоятельная работа на тему: «Исследование функций и построение графиков».

<u>I вариант</u>

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$;

б) $g(x)=\ln\left(4-x^2\right)$;

в) $h(x)=x^2e^{-x^2}$.

<u>II вариант</u>

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-6x+9}{2x-1}$;

б) $g(x)=x(\ln x+1)$;

в) $h(x) = x^3 e^{-x}$.

III вариант

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$;

б) $g(x) = \ln(x - \dfrac{1}{x})$;

в) $h(x) = e^{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

IV вариант

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $f(x) = \dfrac{3x^2}{3x-1}$;

б) $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$;

в) $h(x) = x - 2arctgx$.

V вариант

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$;

б) $g(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;

в) $h(x) = \dfrac{1-x^2}{4-x}$.

Практическое занятие №36

Тема: Зачётное занятие по введению в анализ и дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Перечень умений, которые студент должен показать на зачёте:

1. Множества: обозначение; способы задания; принадлежность элемента множеству; подмножество данного множества; равенство множеств; операции над множествами.
2. Действительные числа: изображение действительных чисел на прямой; перевод обыкновенной дроби в десятичную и периодической десятичной дроби в обыкновенную; модуль действительного числа и его свойства; использование свойств модуля при решении уравнений и неравенств; границы множеств.

3. Функция: способы задания; композиция функций, обратная функция; сужение функций; операции над функциями; классификация функций по аналитическим выражениям и свойствам; графики степенной, показательной, логарифмической функции, тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций; построение графиков функций с помощью сдвига и деформации; построение графиков функций с модулем; последовательность как частный случай функции.
4. Пределы: I и II замечательные пределы и следствия из них; использование эквивалентных бесконечно малых при вычислении пределов; теоремы об арифметических свойствах пределов; основные виды неопределённостей и их раскрытие.
5. Непрерывность: арифметические операции над непрерывными функциями; теорема существования и непрерывности обратной функции; свойства функций, непрерывных на отрезке, и их применение при решении задач.
6. Производная: нахождение производной функции в точке по определению; правила дифференцирования и их использование при решении задач; производная сложной функции; производная обратной функции; логарифмическое дифференцирование; производная параметрически заданной функции; дифференциал функции и его применение в приближённых вычислениях; производные и дифференциалы высших порядков; применение производной к раскрытию неопределённостей.
7. Применения производной: исследование функций на монотонность и экстремумы; исследование функций на выпуклость (вогнутость) и перегиб; полное исследование функции и построение её графика; нахождение наименьшего и наибольшего значений функции на промежутке; решение текстовых задач на экстремум.

Вопросы к экзамену за I семестр

1. Доказательство необходимости расширения множества рациональных чисел.
2. Аксиоматика множества действительных чисел.
3. Аксиома непрерывности действительных чисел. Доказательство теоремы Кантора о стягивающейся системе отрезков.
4. Модуль действительного числа и его свойства (с доказательством).
5. Доказательство существования и единственности точной нижней границы у всякого непустого ограниченного снизу множества.
6. Доказательство теоремы о представлении всякой функции, определённой на множестве, симметричном относительно начала координат, в виде суммы чётной и нечётной функций.
7. Свойства сходящихся последовательностей (с доказательством).
8. Доказательство теоремы о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности. Примеры применения этой теоремы.
9. Бесконечно малые последовательности и их свойства (с доказательством).
10. Доказательство теоремы о связи между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями.
11. Теоремы об арифметических свойствах пределов последовательностей (с доказательством).
12. Доказательство эквивалентности двух определений предела функции в точке.
13. Односторонние пределы функции в точке. Доказательство критерия существования предела функции в точке.
14. Локальные свойства функций, имеющих конечный предел в точке (с доказательством)
15. Свойства функций, имеющих конечный предел в точке (с доказательством).
16. Бесконечно малые функции и их свойства (с доказательством).
17. Теоремы об арифметических свойствах пределов функций (с доказательством).
18. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и следствия из него (с доказательством).
19. Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^{\frac{1}{x}})=e$ и следствия из него (с доказательством)

20. Теоремы об арифметических свойствах непрерывных функций (с доказательством).
21. Теорема о непрерывности композиции непрерывных функций (с доказательством). Переход к пределу под знаком непрерывной функции.
22. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций (с обоснованием).
23. Свойства функций, непрерывных в точке (с доказательством).
24. Точки разрыва и их классификация. Исследование функций на непрерывность и построение схемы графика функции.
25. Теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке (с доказательством). Применение теорем при решении задач.
26. Доказательство необходимого условия, необходимого и достаточного условия дифференцируемости функции в точке.
27. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного дифференцируемых функций (с доказательством).
28. Таблица производных (с обоснованием).
29. Вывод формулы для дифференцирования сложной функции.
30. Вывод формулы для дифференцирования обратной функции.
31. Логарифмическое дифференцирование. Вывод формулы для дифференцирования показательно-степенной функции.
32. Производные высших порядков. Свойства производных высших порядков (с доказательством).
33. Дифференциал функции. Вывод формулы для применения дифференциала в приближённых вычислениях.
34. Дифференциал сложной функции. Доказательство инвариантности формы дифференциала.
35. Дифференциалы высших порядков. Доказательство того, что дифференциал II порядка свойством инвариантности формы не обладает.
36. Теоремы о дифференцируемых функциях (с доказательством).
37. Доказательство критерия постоянства функции на промежутке.
38. Доказательство достаточного условия строгого возрастания (убывания) функции на промежутке.
39. Правило Лопиталя для раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}(x \to a+)$ (с доказательством).

40. Доказательство необходимых условий существования экстремума функции в точке.
41. Доказательство достаточного условия существования экстремума функции в точке (по первой производной).
42. Доказательство достаточного условия существования экстремума функции в точке (по второй производной).
43. Доказательство достаточного условия выпуклости (вогнутости) функции на промежутке.
44. Доказательство необходимого условия существования точки перегиба графика функции.
45. Доказательство достаточного условия существования точки перегиба графика функции.
46. Обоснование существования асимптот графика функции.
47. Общая схема исследования функции и построение графика функции.
48. Параметрическое задание функции. Вывод формул для нахождения I и II производных параметрически заданных функций.

Мухин Александр Ефимович

Практические занятия по курсу «Математический анализ»
для студентов I курса специальности 010101 «Математика» (I семестр)

Редактор Н.М. Устюгова

Подписано к печати	Формат 60х84 1	Бумага тип.№1
Печать трафаретная	Усл.печ. л.4,75	Уч.-изд.л.4,75
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета

640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.

Курганский государственный университет.