МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА «ИНФОРМАТИКА»

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания
для выполнения лабораторной работы
для студентов
специальности 010101

Курган 2009

Кафедра: «Информатика»

Дисциплина: «Методы вычислений»
(специальность: 010101)

Составили:
старший преподаватель М.Б. Бекишева
ассистент Л.Г. Катюхина

Утверждены на заседании кафедры «9» июня 2009 г.

Рекомендованы методическим советом университета
«30» _июня______ 2009 г.

Лабораторная работа

Приближенное решение нелинейных уравнений

Цель работы

1. Изучить численные методы решения нелинейных уравнений.

2. Освоить приемы, алгоритмизации и программирования итерационных процессов.

3. Приобрести практические навыки использования ЭВМ и численных методов при решении нелинейных уравнений.

Содержание и порядок выполнения работы

1. Ознакомиться и изучить численные методы решения нелинейных уравнений:
- метод бисекций;
- метод касательных (Ньютона);
- метод хорд;
- метод комбинированный;
- метод простых итераций.

2. Исследовать заданную функцию, провести изоляцию корня уравнения и проверку применимости заданного численного метода. Отделение корня можно выполнить в Mathcad или в Excel.

3. Разработать алгоритм и программу решения поставленной задачи.

4. Отладить программу и решить задачу средствами Paskal, провести анализ результатов.

5. Проверить полученный результат, решив уравнение в Mathcad.

6. Составить отчет и защитить работу.

Постановка задачи

Дано уравнение $f(x)=0$. Требуется найти корень уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$, пользуясь следующими методами:
- методом бисекций (половинного деления);
- методом касательных (Ньютона);
- методом хорд (секущих);
- комбинированным;
- методом простых итераций.

Замечание 1*: выбор методов и их количество согласовать с преподавателем.*

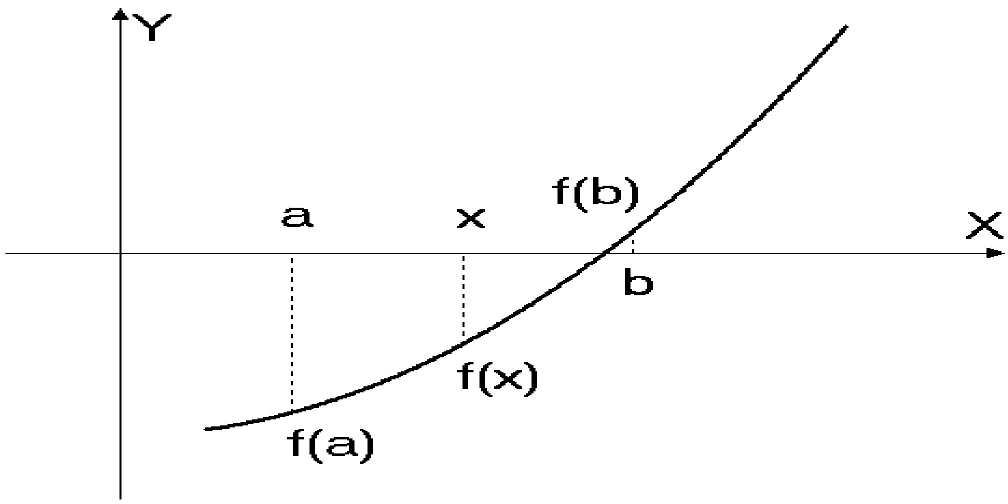
Замечание 2*:в*ычисление функции $f(x)$, определяющей левую часть уравнения, оформить в виде *подпрограммы – функции*. Если метод предполагает использование производных, то это замечание касается первой и второй производных; сам метод оформить в виде *подпрограммы – процедуры*.

В программе предусмотреть печать результатов: приближенное значение корня x_N и значение $f(x_N)$, необходимое для проверки правильности работы алгоритма; количество итераций.

Решение уравнений методом бисекций

Пусть требуется решить уравнение $f(x)=0$, если известно, что единственный корень лежит на отрезке $[\ a,\ b\ ]$. Тогда функция $f(x)$ на концах отрезка $[\ a,\ b\ ]$ имеет разные знаки, т.е.

$$f(a)\cdot f(b)<0.$$



Метод бисекций заключается в том, что исходный отрезок делится пополам, и из двух получившихся отрезков выбирается тот, на котором функция имеет разные знаки, полученный отрезок снова делится пополам, и из двух получившихся отрезков выбирается нужный отрезок и т.д.

Метод всегда сходится, если $f(x)$ непрерывна на $[\ a,\ b\ ]$. На k-ой итерации корень лежит на отрезке длиной $(b-a)\ /\ 2^k$, поэтому число итераций, необходимых для достижения заданной точности ε , определяется из неравенства $(b-a)\ /\ 2^k<\varepsilon$.

Алгоритм метода бисекций следующий:

а) вычислить $k-$ число необходимых для достижения точности ε итераций;

б) выполнить N итераций метода вида : ($a_0 = a$; $b_0 = b$)

$$x_k=\frac{a_k+b_k}{2}\quad;\quad k = 0,\ 1,\ \dots\ ,(N-1).$$

Если $f(\ x_k\ )\ =\ 0$, то алгоритм завершается.

Если $f(x_k)\cdot f(a_k)<0$, mo $a_{k+1}=a_k\ ;b_{k+1}=x_k$.

Если $f(x_k)\cdot f(b_k)<0$, mo $a_{k+1}=x_k\ ;b_{k+1}=b_k$.

в) в качестве корня x взять значение x_{k+1} .

Решение уравнений методом касательных, методом хорд и комбинированным методом

Метод касательных (Ньютона)

Метод Ньютона для численного решения уравнения ***f(x)=0*** с заданной точностью ε заключается в построении итерационного процесса вида:

а) $x_0 \in [\, a, b \,]$ - начальное приближение к корню, для которого выполняется неравенство $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ и на отрезке *[a, b]* производные $f'(x), f''(x)$ не изменяют знаков.

б) $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad k=0,1,2,\ldots$

в) вычислительный процесс прекращают на N - ой итерации, если справедливо неравенство $\left|x_N - x_{N-1}\right| < \sqrt{\dfrac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$,

где m_1 - наименьшее значение $\left|f'(x)\right|$,

M_2 - наибольшее значение $\left|f''(x)\right|$ на отрезке $[a,b]$.

Обозначим $\varepsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$.

Это неравенство может быть заменено на эквивалентное ему $\left|\dfrac{f(x_{N-1})}{f'(x_{N-1})}\right| < \sqrt{\dfrac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$;

г) в качестве искомого корня возьмем значение x_N .

Погрешность k – й итерации определяется соотношением (x^* - корень уравнения):

$$\left| x^* - x_k \right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left| x_k - x_{k-1} \right|^2,$$

которое и определяет критерий останова итерационного процесса.

Для сходимости последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_N$ к корню x^* необходимо выполнение ряда условий: функция определена и дважды дифференцируема на $[a,b]$, причем $f(a)\cdot f(b)<0$, а производные $f'(x), f''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[\,a, b\,]$.

Замечание

В особых случаях метод касательных приводит к построению медленно сходящихся итерационных процессов (например, такая ситуация возникает, когда производная $f'(x)$ вблизи корня мала). Рекомендуется количество итераций ограничить величиной $N_{\max}$ и при достижении количества итераций значения $N_{\max}$ дальнейшие вычисления прекращаются.

При нарушении необходимых условий сходимости конкретного метода последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_N$ может расходиться. Для анализа такой ситуации можно воспользоваться соотношением $\left|x_k - x_{k-1}\right| < \left|x_{k-1} - x_{k-2}\right|$. Если это условие не выполняется, то итерационный процесс расходится.

Метод хорд

Пусть отрезок *[a, b]* содержит единственный корень уравнения *f(x)= 0*, тогда выполнено условие : *f(a) f(b) < 0.*

Проводится хорда между точками *(a, f (a)) и (b, f(b)).*

В качестве приближения к корню выбирается точка *x*, являющаяся пересечением хорды с осью абсцисс. Из двух получившихся отрезков *[a, x]* и *[x, b]* выбирается тот отрезок, на концах которого функция принимает разные знаки, затем вновь проводится хорда и т.д.

Процесс вычислений корня уравнения идет по следующей схеме :

а) $a_0 = a$; $b_0 = b$, $f(a_0) * f(b_0) < 0$.

б) Если $f(a_0)\cdot f''(a_0)>0$, то

$$x_k = b_k - (b_k - a_k)\cdot f(b_k)/(f(b_k) - f(a_k)),\ \ (k=0,1,2,\ldots).$$

Если $f(b_0)\cdot f''(b_0)>0$, то

$$x_k = a_k - (b_k - a_k)\cdot f(a_k)/(f(b_k) - f(a_k)),\ \ (k=0,1,2,\ldots).$$

в) Если $f(a_0)\cdot f(x_k)<0$, то $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = x_k$.

Если $f(x_0)\cdot f(b_k)<0$, то $a_{k+1} = x_k$; $b_{k+1} = b_k$.

г) Итерационный процесс метода хорд прекращается на N -ой итерации, если $\left| x_N - x_{N-1} \right| \le \varepsilon,$ где ε - требуемая точность. В противном случае пункт б) алгоритма повторяется.

Замечание. Необходимо отметить, что выбор в пункте б) формулы для вычисления x_k, который осуществляется на основе выполнения одного из указанных условий, достаточно выполнить один раз. Данное замечание справедливо и для пункта в) алгоритма, так как в методе хорд один из концов отрезков
$[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …., $[a_k, b_k]$
фиксирован и определяется единственной проверкой условия
$f(a_0)\cdot f(x_0)<0$ или $f(x_0)\cdot f(b_0)<0$.

Комбинированный метод (хорд и касательных)

Требуется решить уравнение $F(x)=0$.

Предположим, что удалось найти интервал изоляции корня уравнения: $\bar{x} \in [a, b]$.

Истинное значение корня уравнения представляет собой абсцисса точки пересечения кривой y = F(x) с осью x. Возможен один из четырех случаев:

1) $F'(x) > 0; F''(x) > 0$; 2) $F'(x) > 0; F''(x) < 0$;
3) $F'(x) < 0; F''(x) > 0$; 4) $F'(x) < 0; F''(x) < 0$;

Рассмотрим первый случай. Пусть $a_1 = a$, $b_1 = b$. Проведем через точки $(a_1, F(a_1))$ и $(b_1, F(b_1))$ хорду. Ее уравнение будет
$$\frac{y - F(a_1)}{F(b_1) - F(a_1)} = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}.$$

Абсцисса точки пересечения прямой и оси x дает первое уточненное значение левой границы интервала изоляции корня
$$a_2 = a_1 - \frac{b_1 - a_1}{F(b_1) - F(a_1)} F(a_1).$$

Таким образом, интервал изоляции корня будет : $\bar{x} \in [a_2, b_1]$.

Теперь проведем через точку $(b_1, F(b_1))$ касательную к кривой $y = F(x)$; ее уравнение $y - F(b_1) = F'(b_1)(x - b_1)$.

Абсцисса точки пересечения касательной с осью x дает уточненную границу интервала изоляции корня

$b_2 = b_1 - \dfrac{F(b_1)}{F'(b_1)}$. Теперь интервал изоляции корня представляет собой $\bar{x} \in [a_2, b_2]$. Снова проведем хорду и касательную. Точки пересечения прямой и касательной дадут новые уточненные границы интервала изоляции корня $[a_3, b_3]$ и т.д.

Сужение интервала изоляции корня следует проводить до тех пор, пока не выполнится условие $b_i - a_i < \varepsilon$. За значение корня берут $\bar{x} = \frac{1}{2}(b_i + a_i)$.

При нахождении корня уравнения следует ясно представлять себе, через какую из точек $(a_1, F(a_1))$ или $(b_1, F(b_1))$ следует проводить касательную (мы рассмотрели только один из 4-х случаев).

Основные вопросы теории

1. Как строится последовательность в методе касательных? Как выбирают нулевое приближение? Геометрическая иллюстрация метода.
2. Как образуется последовательность приближений в методе хорд? Какой конец отрезка $[a, b]$, в котором находится корень уравнения, считают неподвижным? Геометрическая иллюстрация метода хорд.
3. Комбинированный метод (хорд и касательных), геометрическая иллюстрация этого метода.
4. Оценка абсолютной погрешности приближенного значения корня уравнения при применении метода касательных
   ($|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1} \cdot \left(x_n - x_{n-1}\right)^2$, где ξ - точный корень уравнения
   x_n - приближенное значение корня, $m_1 = min\,|f'(x)|$, $x \in [a, b]$,
   $M_2 = max|f''(x)|$, $x \in [a, b]$.
5. Формула для оценки абсолютной погрешности приближенного значения корня уравнения при применении метода хорд
   ($|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot |x_n - x_{n-1}|$, где ξ - точный корень уравнения,
   x_n - приближенное значение корня, $m_1 = min\,|f'(x)|$, $x \in [a, b]$,
   $M_1 = max|f'(x)|$ $x \in [a, b]$. При каком соотношении M_1 и m_1 получается, что $|\xi - x_n| \le \cdot |x_n - x_{n-1}|$?
6. Оценка абсолютной погрешности приближенного значения корня комбинированным методом (хорд и касательных).
7. Какой формулой для оценки абсолютной погрешности приближенного значения корня уравнения можно пользоваться при любом методе решения уравнения?

Порядок выполнения работы

1. Отделите корень уравнения $f(x)=0$ таким отрезком $[a, b]$, чтобы вы-

полнялись следующие условия:

1) функция $f(x)$ *при* $x \in [a, b]$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$;
2) значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах отрезка имеют разные знаки: $f(a)\,f(b) < 0$;
3) обе производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая определенный знак на отрезке $[a, b]$.

2. Постройте схематически график функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и покажите первые приближения корня, полученные методом касательных, хорд, комбинированным методом.

3. Вычислите корень уравнения методом касательных

Оценка абсолютной погрешности приближенного значения корня уравнения при применении метода касательных

($|\xi - x_n| \le \dfrac{M_2}{2m_1} \cdot \left(x_n - x_{n-1}\right)^2$, где ξ - точный корень уравнения,

x_n - приближенное значение корня, $m_1 = min\,|f'(x)|$, $x \in [a, b]$,

$M_2 = max|\,f''(x)\,|$ $x \in [a, b]$.

4. Вычислите корень уравнения методом хорд. Для оценки погрешности приближенного значения корня воспользуйтесь формулой:

$|\xi - x_n| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m_1}$, где $m_1 = min\,|f'(x)|$, $x \in [a, b]$,

или формулой, данной в пункте 5 вопросов теории.

5. Вычислите корень уравнения комбинированным методом (хорд и касательных). При уточнении корня комбинированным методом используйте приближенное значение корня, полученное методом хорд.

Решение уравнений методом простых итераций

Основные вопросы теории

1. Понятие итерационной последовательности. Как строится итерационная последовательность для уравнения $x = \varphi(x)$?

2. Применение принципа сжимающих отображений к обоснованию существования и единственности решения уравнения $x = \varphi(x)$. Какой метод нахождения приближенного решения уравнения $x = \varphi(x)$ дает доказательство принципа сжимающих отображений?

3. Достаточные условия сходимости итерационной последовательности (последовательности приближений) к корню уравнения.

4. Геометрическая иллюстрация метода простой итерации.

5. Общие приемы преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$,

где $| \varphi '(x) | \le q < 1$ $(| \varphi '(x) | \le ½)$ для $x \in [a, b]$ (уравнение имеет единственный корень в $[a, b]$).

6. Оценка погрешности приближений

$$\left(\left| \xi - x_n \right| \le \frac{q^n}{1-q} \left| x_1 - x_0 \right|, \quad \left| \xi - x_n \right| \le \frac{q}{1-q} \left| x_n - x_{n-1} \right| \right),$$

где ξ - корень уравнения.

Как зависит сходимость последовательности приближений от числа q? При каком значении q справедливо неравенство $| c - x_n | \le |x_n - x_{n-1}|$?

7. Как можно оценить погрешность приближений при решении уравнения $x = \varphi(x)$, если $-1 < \varphi(x) < 0$?

8. Какое условие является достаточным для достижения заданной точности при решении уравнения $x = \varphi(x)$ методом итерации?

9. Преимущества метода итераций.

Порядок выполнения работы

1. Отделите корень уравнения (используя графический способ решения уравнений и аналитическое обоснование существования и единственности корня уравнения).
2. Замените данное уравнение на равносильное ему вида $x = \varphi(x)$. При этом нужно выбрать то, для которого выполняются достаточные условия сходимости итерационной последовательности.
3. Выберите начальное приближение x_0 .

Рассмотрим один из способов приведения уравнения к равносильному виду. Заданное уравнение $f(x)=0$ преобразуется к равносильной форме $x = \varphi(x)$.

Равносильная форма получается следующим образом. Умножая исходное уравнение $f(x) = 0$ на некоторое число $\lambda \neq 0$ (λ нужно будет найти), получим $\lambda \cdot f(x)=0$. Прибавляя и вычитая из уравнения x, имеем $x - x + \lambda \cdot f(x) = 0$ *или* $x = x - \lambda \cdot f(x)$.

Обозначая $\varphi(x) = x - \lambda \cdot f(x)$, получим равносильную форму уравнения $x = \varphi(x)$.

Строится последовательность простых итераций по следующей схеме :

а) $x_0 \in [a,b]$ - начальное приближение к корню уравнения;

б) $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

в) процесс вычисления $\boldsymbol{x_{k+1}}$ прекращается на N -ой итерации, как только для заданной точности $\boldsymbol{\varepsilon}$ выполнится условие

$$\left| x_N - x_{N-1} \right| \le \varepsilon;$$

г) значение x_N - искомый корень.

Условием сходимости последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ к точному корню ξ уравнения является выполнение неравенства

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \varphi'(x) \right| = q < 1$$

Погрешность k-ой итерации определяется соотношением

$$\left| x_k - \xi \right| \le \frac{q \left| x_k - x_{k-1} \right|}{1-q}.$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В MATHCAD

Графическое отделение корня уравнения

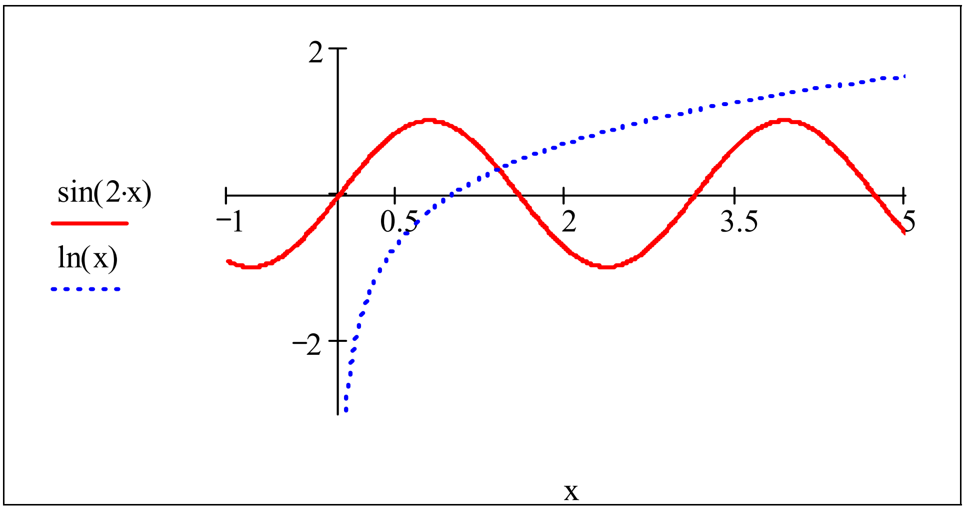
Дано уравнение вида F(x)=0:

$$\sin(2 * x) - \ln(x) = 0.$$

Запишем уравнение в таком виде F1(x)=F2(x)

$$\sin(2 * x) = \ln(x).$$

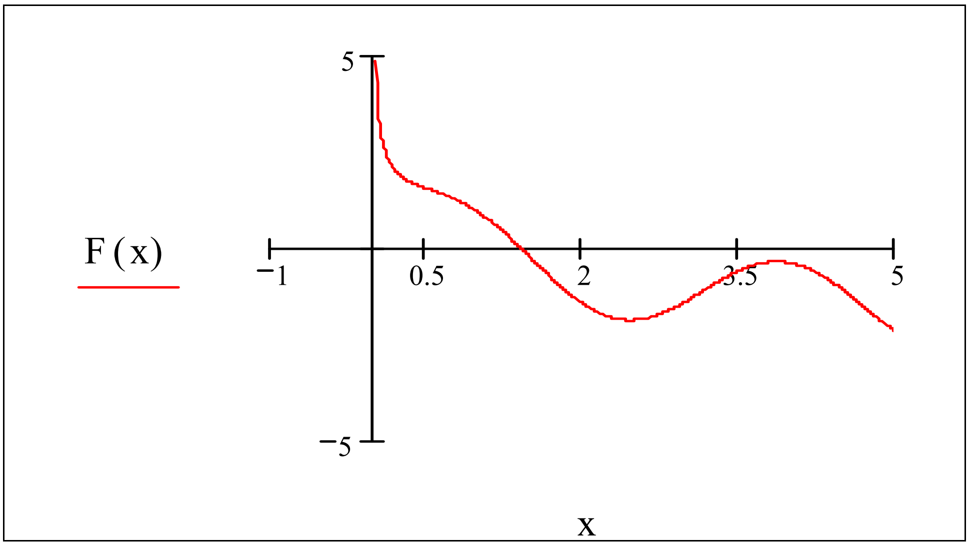
Построим графики двух функций.



Видим, что корень находится на отрезке [0.5; 2].

Можно не переносить в правую часть, а сразу построить график функции F(x).

$$F(x) := \sin(2 \cdot x) - \ln(x)$$



Решение уравнения с помощью функции root

Для решения одного уравнения с одним неизвестным используется встроенная функция **root(F(x), x)**, где F(x) — функция, представляющая собой левую часть уравнения вида *F(x)=0*.

Предварительно следует задать начальное значение переменной *x*, относительно которой решается уравнение, определяя его, например, из графика.

В случае нескольких корней уравнения в ответе после нажатия клавиши (=) получим корень, ближайший к начальному заданному значению. Для каждого корня нужно задавать свое начальное значение. Если корень не может быть найден, то либо он не существует, либо надо изменить начальное значение переменной ***x***.

Пример 1. Решить уравнение $sin(2x)-ln(x)=0$ на отрезке $[\,1;\,2]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение.

$x := 1$ указываем приближение корня

$TOL := 10^{-5}$

$root(F(x), x) = 1.39943$ находим корень при указанном выше приближении корня

Вторым вариантом использования функции root является

$$root(F(x),x,a,b),$$

где a, b — границы отрезка, содержащий единственный корень;

Решение 2-м способом.

$$F(x) := \sin(2 \cdot x) - \ln(x)$$

$$TOL := 10^{-5}$$

$$root(F(x), x, 1, 2) = 1.39943$$ указываем отрезок на котором находится корень

Точность вычислений задается встроенной переменной TOL. По умолчанию ее значение равно 0,001. Это значение можно изменить либо через меню *Математика/Параметры* или непосредственно в тексте документа.

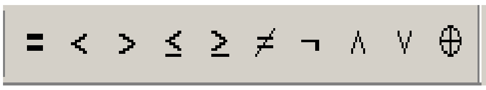
Решение уравнения с одним неизвестным с помощью функции Find

Указываем *начальное значение* (***guess value***) корня (переменной ***x***) перед вычислительным блоком (до ключевого слова ***Given),*** поиск корня производится вблизи этого числа, таким образом, требуется априорная информация о примерной локализации корня.

Дальше указываем вычислительный блок.

Вычислительный блок такой:

1. ***Given*** – *ключевое слово*;
2. Уравнение записывается *логическими операторами* в виде равенства и, возможно, в виде неравенства;
3. ***Find(x)*** – *встроенная функция* для решения уравнения относительно указанной переменной.

Логические операторы 

нужно вставлять с помощью панели  ***Boolean*** (*Булевы операторы*). Блок ***Given / Find*** использует для поиска итерационные методы. Вычислительный блок использует константу ***CTOL = 0,001*** в качестве погрешности решения уравнения (по умолчанию). Константа ***TOL= 0,001*** руководит окончанием итерационных процессов численного метода. Значения ***CTOL и TOL*** можно изменять по своему усмотрению.

Пример 2. Решить уравнение $sin(2x)-ln(x)=0$ на отрезке $[\ 0.5;\ 2]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Решение.

$$x := 0.7$$ указываем начальное приближение неизвестного

Given открываем блок решений

$$\sin(2 \cdot x) - \ln(x) = 0$$

$\mathrm{Find}(x) = 1.39943$ нахождение решения уравнения, которое указано в блоке решения

При решении уравнений могут быть сообщения: «***No solution was found***» - *решение не найдено*; «***This variable or function is not defined above***» - *эта переменная или функция ранее не определена.*

Символьное решение уравнений

С помощью символьного процессора можно вычислить аналитически значение переменной, при котором выражение ***f(x)*** обращается в ноль.

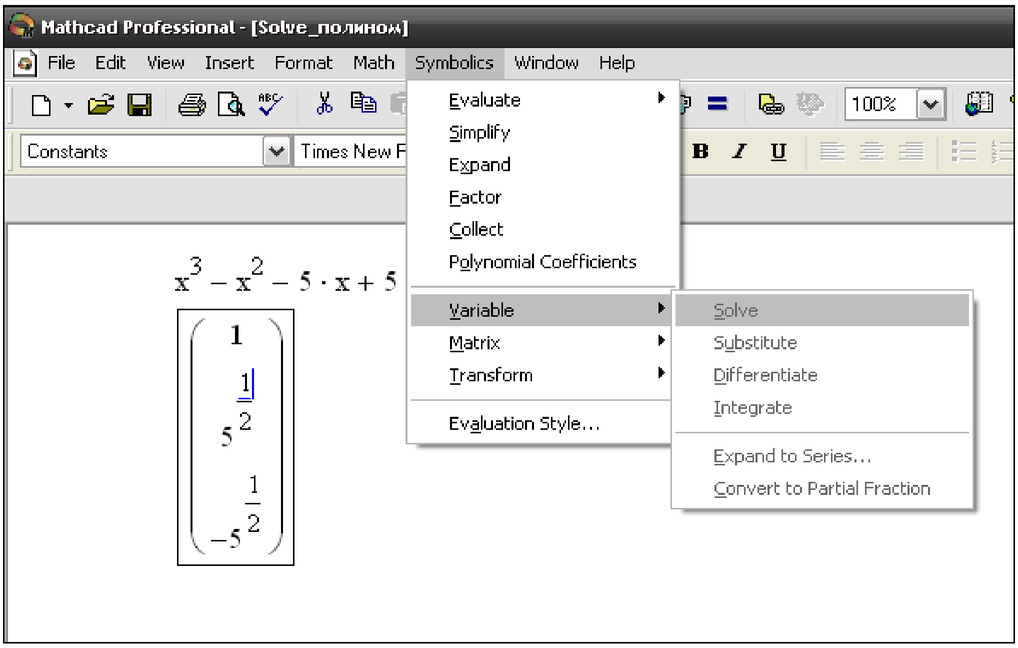
Рассмотрим на примере.

Пример 3

Решить уравнение $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$. Для этого:

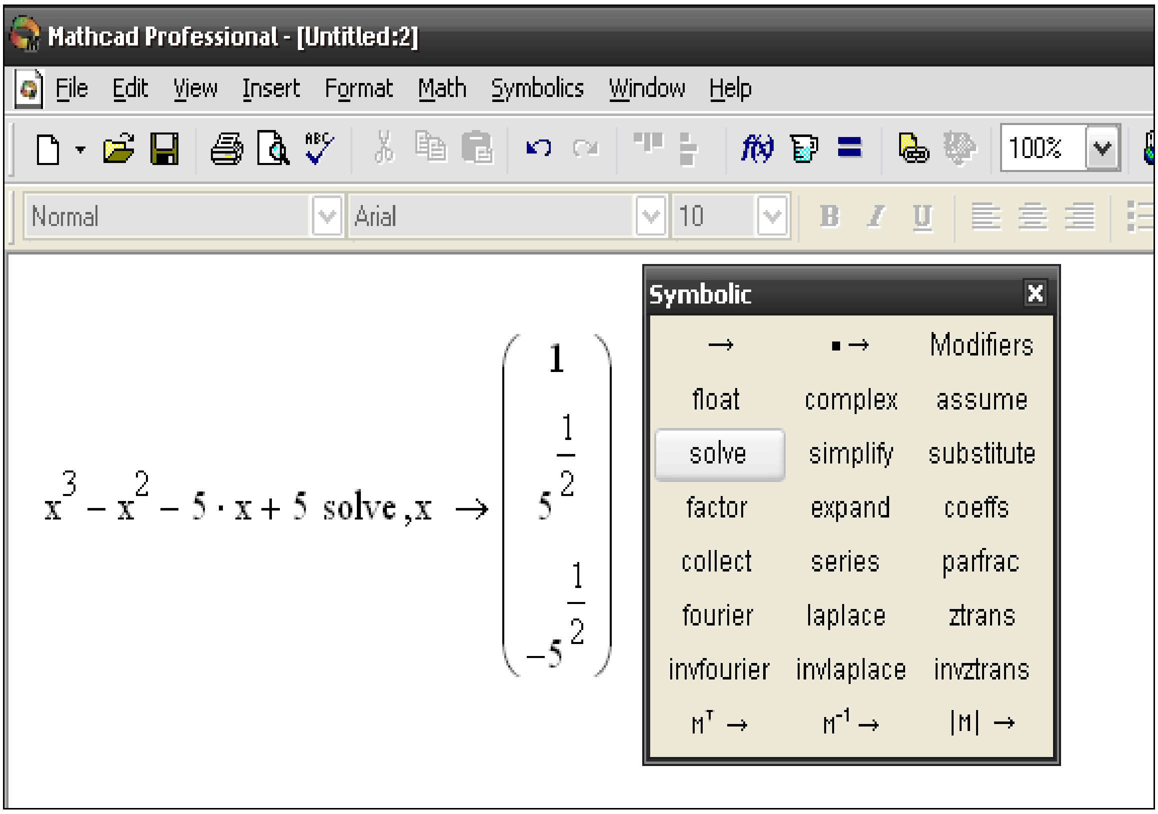
1. Вводим выражение $x^3 - x^2 - 5x + 5$.
2. Выделяем переменную, относительно которой будем решать уравнение, приравнивающую выражение к нулю.
3. Выберем в меню ***Symbolics*** (*Символика*) пункт ***Variable / Solve*** (*Переменная / Решить*).
4. Результат – значения корней *x1 x2, x3* уравнения *f(x)=0* – будет отображен внизу в виде матрицы. В данном примере имеем

$$x1 = -1, \quad x2 = +\sqrt{5}, \quad x3 = -\sqrt{5}.$$



Символьное решение уравнения с использованием меню *Symbolics / Variable / Solve*

Символьное решение этого уравнения в *MathCAD* может занять и одну строчку. Для этого используем панель символьных вычислений и кнопку решения уравнений ***solve.*** Вводим в помеченной позиции слева от ключевого слова ***solve*** (*решить*) выражение для правой части уравнения, а в позиции справа от ***solve*** – имя переменной (здесь это ***x***) , относительно которой нужно решить уравнение. Результат – значения корней уравнения – будет отображен в рабочем документе справа от стрелки в виде матрицы, т.к. это уравнение имеет более одного корня.



Решение уравнения с использованием окна диалога *(Symbolic / solve*)

Пример 4

Решить уравнение *sin(2x) – ln(x) = 0*

$$\sin(2\cdot x) - \ln(x)\ \text{solve}, x\ \rightarrow 1.3994288664924711336 \quad .$$

Нахождение корней полиномов

Для нахождения корней полиномов имеется встроенная функция polyroots(A). Аргументом функции является вектор коэффициентов (матрица-столбец) полинома $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.

Если в полиноме отсутствуют некоторые степени, то на соответствующих местах следует писать 0.

Пример 5

Решить уравнение $x^3-10x+2=0$.

Решение.

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

составляем матрицу из коэфициентов,начиная со свободного члена

$$\text{polyroots}(A) = \begin{pmatrix} -3.2579 \\ 0.20081 \\ 3.05709 \end{pmatrix}$$

функция возвращает числовой массив, содержащий корни полинома

Замечание. Корни полинома могут быть и комплексными.

Пример 6.

Решить уравнение $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 108x + 3 = 0.$

Решение.

$$f(x) := x^4 - 6\cdot x^3 + 12\cdot x^2 - 108x + 3$$

$$M := \begin{pmatrix} 3 \\ -108 \\ 12 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(M) = \begin{pmatrix} -0.331 - 4.015i \\ -0.331 + 4.015i \\ 0.028 \\ 6.635 \end{pmatrix}$$

Пример 7

Решение уравнения ***методом простой итерации*** в Mathcad.

Найти корень уравнения $F(x)=0$ двумя способами:
1) методом простой итерации с точностью $\varepsilon=10^{-4}$;
2) используя встроенную функцию MathCAD.

Решение.

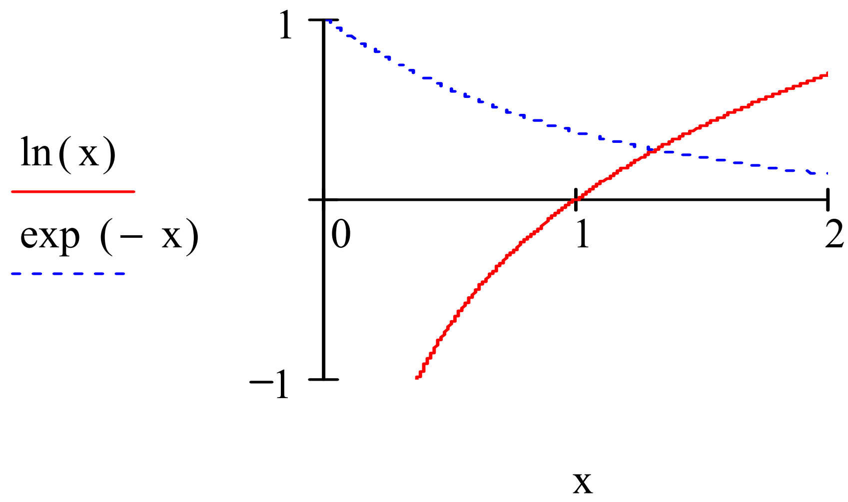
$$F(x) := \ln(x) - \exp(-x)$$

Найдем отрезок *[a; b]*, на котором находится корень уравнения.

Для этого строим графики 2-х функций:

$$f1(x) := \sin(2 \cdot x) \qquad\qquad f2(x) := \ln(x)$$

Графическое отделение корня



Корень принадлежит отрезку *[1; 1.5]*

$a := 1 \qquad b := 1.5$

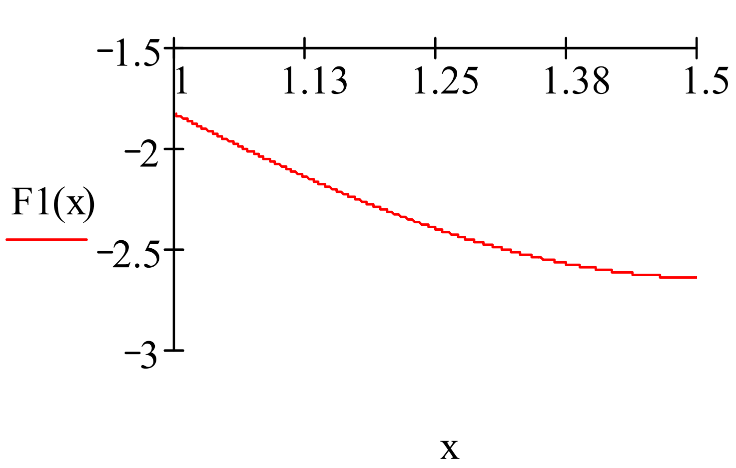
Исходное уравнение F(x)=0 приводим к виду $x=\phi(x)$,

где $\phi(x)$ равняется:

$$\phi(x) := x - \lambda \cdot F(x)$$

Приведем уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Находим λ.
Найдем 1-ю производную функции F(x) и построим график производной F1(x):

$$\frac{d}{dx}F(x) \rightarrow 2 \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{1}{x} \qquad\qquad F1(x) := 2 \cdot \cos(2 \cdot x) - \frac{1}{x}$$



Видим, что максимальное значение модуля 1-ой производной в точке *x=1.5*.

Найдем модуль 1-ой производной M в точке *x=1.5*:

$M := |F1(1.5)| \qquad M = 2.647$

F1(x)<0 на отрезке *[a;b]*, следовательно λ равно

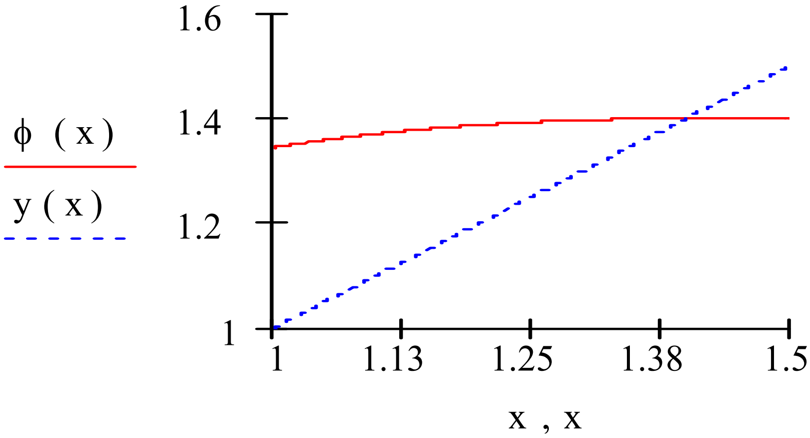
$\lambda := \frac{-1}{M} \qquad \lambda = -0.378$

Исходное уравнение *F(x)=0* приводим к виду $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ равняется:

$\phi(x) := x - (-0.378) \cdot F(x)$.

Строим графики функций ***y(x)=x*** и

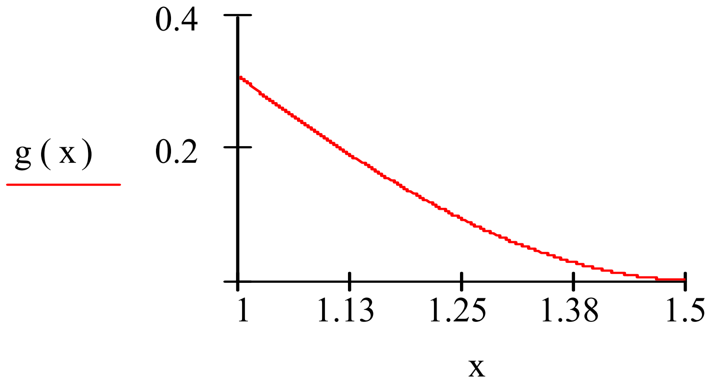
$\varphi(x) = \quad x + 0.378 \cdot (\sin(2 \cdot x) - \ln(x))$.



За начальное приближение возьмем *x=1* на отрезке *[1; 1.5]*.

Проверим достаточное условие сходимости. Для этого найдем модуль первой производной функции $\varphi(x)$ и построим ее график:

$g(x) := \left|\frac{d}{dx}\phi(x)\right|$.



Вывод: все точки графика модуля производной на отрезке *[1; 1.5]* лежат ниже единицы. Наибольшее значение достигается в точке $x=1$.

$q := g(1) \qquad q = 0.308$

Образуем итерационную последовательность, используя рекуррентное соотношение $x_i = \varphi(x_{i-1})$:

$i := 1..15 \qquad x_0 := 1 \qquad x_i := \phi(x_{i-1})$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	1	1.34356521	1.39784228	1.39939946	1.39942833	1.39942886

В массив T записываем погрешности каждого шага метода итераций:

$$T_i := \frac{q}{1-q} \cdot \left|x_i - x_{i-1}\right|$$

$T^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0.1526966	0.0241233	0.0006921	0.0000128	0.0000002	0

$T_4 = 0.000013$

Видим, что точность достигнута при $i = 4$, т.к. $T_4 <= 10^{(-4)}$.
Следовательно, корень находится в массиве $\boldsymbol{x}$ под номером $i = 4$

$xk := x_4 \qquad xk = 1.39943$ - корень уравнения

Использование встроенной функции MathCad:

$TOL := 0.00001$

$F(x) := \sin(2 \cdot x) - \ln(x)$

$x := 1$

$xk := root(F(x), x) \qquad xk = 1.399429$ - корень

Варианты заданий

1. $\ln x + x^2 - 3 = 0,$
2. $\ln(2{,}75x) + 3x - 2 = 0,$
3. $\ln 2x - \sin x = 0,$
4. $0{,}6e^{-0{,}58x} - 0{,}5x = 0,$
5. $6\sin 5x - 4{,}75x = 0,$
6. $0{,}45e^{-0{,}8x} + 2x = 0,$
7. $4x + 2^x = 0,$
8. $x\lg x - 2 = 0,$
9. $3\ln x - \frac{1}{x} = 0,$
10. $x^2 e^x - 2 = 0,$
11. $e^x + x^2 - 3 = 0,$
12. $\cos x - x^2 = 0,$
13. $\sqrt{x} - \cos 0.387 = 0,$
14. $e^{-x} - (x - 1{,}5)^2 = 0,$
15. $tg 2{,}5x - 3{,}5x = 0,$
16. $\lg 4x - 4{,}5x + 2 = 0,$
17. $e^{-x} - 0{,}5x = 0,$
18. $2\sin 3x - 2x = 0,$
19. $tg x + 2x + 2 = 0,$
20. $x^3 + x - 2 = 0,$
21. $7\sin 5{,}5x - 6x = 0,$
22. $\ln x - \frac{1}{x} - 1 = 0,$
23. $tg 3x - 0{,}2x - 0{,}5 = 0,$
24. $e^{-x} - \sqrt{2 - x} = 0,$
25. $8\cos x - x - 6 = 0$
26. $ctg(x) - 3x^2 = 0$

Список литературы

1. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). - М.: Высшая школа, 2001.
2. Лапчик М.П., Рагулина М.И., Хеннер Е.К. Численные методы. – М.:ACADEMA, 2004.
3. Самоучитель Mathcad 12/ Дмитрий Кирьянов. - СПб: БХВ-Петербург, 2004.
4. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970.
5. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «Раско» 1992.

СОДЕРЖАНИЕ

Бекишева Марина Борисовна

Катюхина Людмила Георгиевна

Приближенное решение нелинейных уравнений

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
для студентов
специальности 010101

Редактор Н.М. Устюгова
………………………………………………………………………………

Подписано к печати	Формат 60*84 1/16.	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 1,5	Уч. – изд. л. 1,5
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

………………………………………………………………………………
Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.