

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

**Методические указания к выполнению расчетно-графической работы №3
по теоретической механике
для студентов специальностей 260601, 190201, 190202, 050501**

Курган 2007

Кафедра: «Теоретическая механика и сопротивление материалов»

Дисциплина: «Теоретическая механика» (специальности 260601, 190201, 190202, 050501)

Составил: канд. техн. наук Ревняков Е.Н.

Утверждены на заседании кафедры «21» июня 2007 г.

Рекомендованы методическим советом университета

«15» ноября 2007 г.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика является одной из важнейших физико-математических дисциплин. На ее основных законах базируются такие дисциплины как сопротивление материалов, теория машин и механизмов, детали машин, теория упругости и другие. Хорошее знание курса теоретической механики требует не только глубокого усвоения теории, но и умения грамотно поставить задачу, решить ее, проанализировать результаты и при необходимости выбрать оптимальный вариант решения.

Решение задач теоретической механики сопровождается проведением достаточно большого объема рутинных расчетов, за которыми может теряться смысл механических явлений и процессов. С развитием вычислительной техники появились такие мощные пакеты математического моделирования, не требующие специальных знаний в программировании, как Maple, MATLAB, Mathcad и т.д. Облегчая решение сложных математических задач, такие системы позволяют снять психологический барьер в изучении механики и математики, а также делают этот процесс интересным и простым. Достоинством системы Mathcad является простота и интуитивная понятность ее интерфейса при достаточно хороших вычислительных возможностях.

1 ОСНОВЫ РАБОТЫ В СРЕДЕ MATHCAD

В настоящее время выпущено несколько версий программы для инженерных и научных расчетов Mathcad (Mathcad 7pro, Mathcad 2001, Mathcad 11, Mathcad 12, Mathcad 13). Основные приемы работы во всех версиях одинаковы и максимально приближены к классическому способу расчетов при помощи калькулятора. Отличия версий заключаются в наборе дополнительных специализированных функций (сбор и обработка данных, теория вероятностей, решение алгебраических и дифференциальных уравнений и т.д.) и скорости расчетов.

На рисунке 1 приведено рабочее окно системы Mathcad 12. В его верхней части расположены стандартные и специализированные меню: «File» - создание, загрузка и сохранение листов с расчетами; «Edit» - редактирование листа; «View» - управление интерфейсом программы; «Insert» - вставка функций, графиков, таблиц с исходными данными и других элементов; «Format» - форматирование текста и настройка стилей; «Tools» - управление расчетами и настройка системы, создание анимационных роликов; «Symbolics» - управление символьными преобразованиями, решение уравнений в общем виде; «Window» - работа с окнами; «Help» - вызов помощи и примеров с расчетами (QuickSheets).

Для начала работы необходимо войти в меню «File» и создать новый «New» расчетный лист (Worksheet), выбрав соответствующий шаблон (например, Normal). На рисунке 1 приведены примеры выполнения простейших расчетов (работа в режиме калькулятора) и решения системы уравнений при помощи вычислительного блока *Given / Find*. Следует отметить, что при

помощи этого блока можно решать системы как линейных, так и нелинейных и трансцендентных уравнений. При этом должны быть заданы начальные приближения решений. Для ввода знака равенства «=» в уравнениях необходимо одновременно нажать «Ctrl»+«=» (не путать со знаком присваивания «:=»), который вводится одновременным нажатием «Shift»+«:=»).

В Mathcad встроен достаточно мощный символьный процессор, позволяющий решать уравнения в общем виде, находить производные и первообразные функций (рисунок 1).

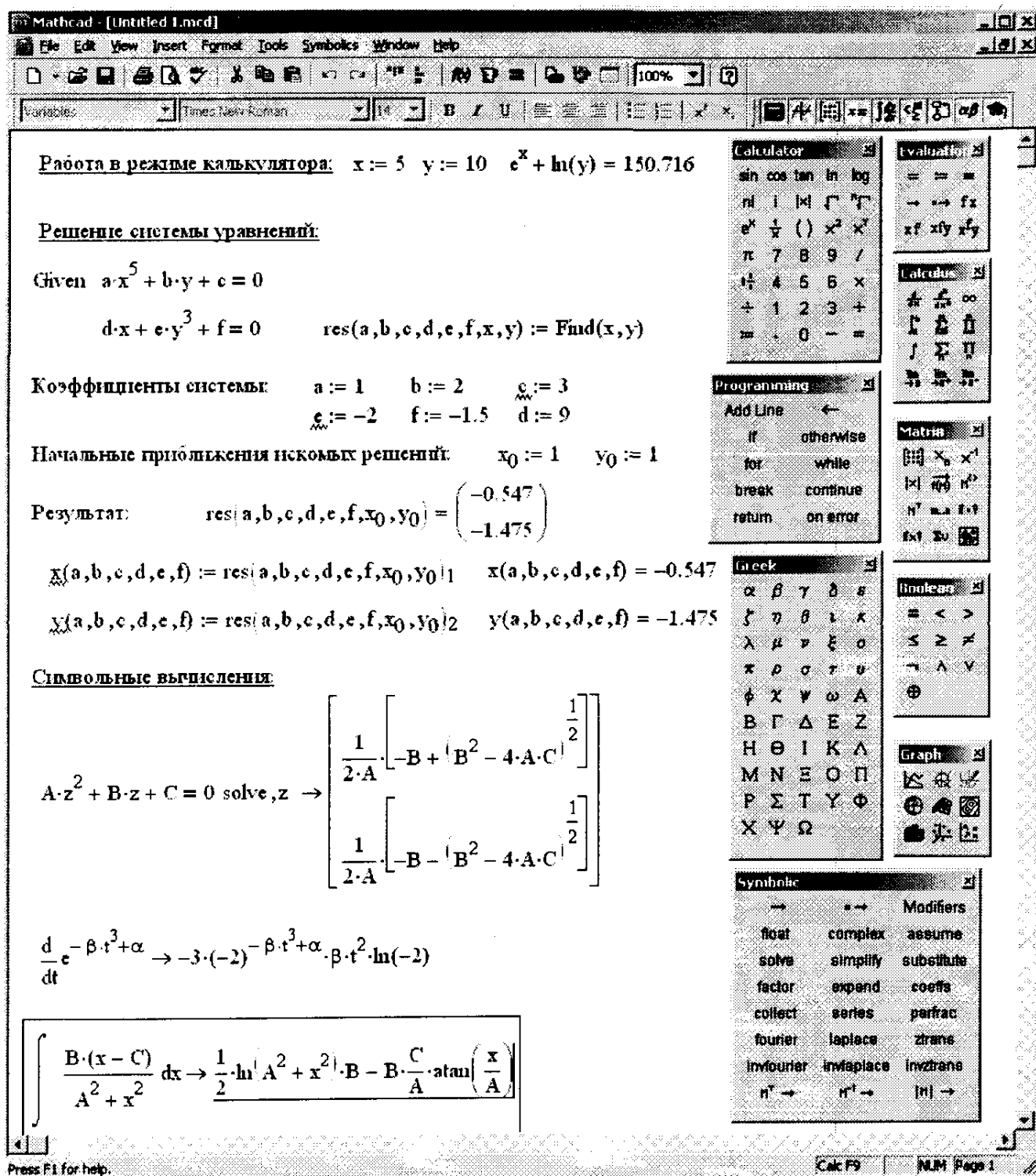




Рисунок 1 – Рабочее окно среды Mathcad 12

Ввод и форматирование выражений осуществляется с клавиатуры и при помощи рабочих панелей (Toolbars): «Calculator» - простейшие функции и

операторы, «Evaluation» - изменение порядка отображения функции и аргумента в формуле, операторы присваивания и вывода результатов; «Boolean» - операторы булевой алгебры; «Programming» - операторы программирования, позволяющие задавать функции пользователя и собственные расчетные алгоритмы; «Greek» - греческие буквы; «Calculus» - ввод производных, интегралов, сумм и пределов; «Matrix» - ввод и операции с векторами и матрицами; «Symbolic» - операторы символьных вычислений. Для вставки встроенных функций Mathcad необходимо нажать на иконку «» системной панели. В открывшемся окне слева будут приведены категории функций (работа с комплексными числами; сглаживание и аппроксимация; анализ данных и т.д.), а справа – имена и аргументы функций, входящих в выбранную категорию.

При редактировании формул клавиша «space» («пробел») позволяет переходить от выделения одного символа до выделения фрагмента или всего выражения целиком. Фрагмент, для которого будет применено следующее действие, подчеркивается тонкой синей линией снизу (на рисунке 1 выделен результат символьного интегрирования). Клавиша «.» (точка) позволяет при вводе имени переменной перейти к нижнему индексу. Например, чтобы ввести t_1 , необходимо набрать такую последовательность: «t», «.», «1». При обращении к элементам вектора или матрицы вводится имя переменной, затем символ «[», после чего в появившейся ниже строке задается номер элемента (для вектора) или через запятую номер строки и столбца (для матрицы).

Рабочая панель «Graph» позволяет размещать в расчетном листе двух- и трехмерные графики и диаграммы. Для построения двухмерного графика служит иконка «».

По умолчанию в Mathcad включен автоматический режим расчетов, при котором после каждого внесенного изменения весь документ заново просчитывается. Для его выключения необходимо сбросить флажок в меню «Tools\Calculate\Automatic Calculation». Расчет рабочего листа до текущего положения курсора запускается клавишей «F9», причем при ее последующих нажатиях пересчитываются только те выражения, в которые были внесены изменения.

Рассмотрим возможности системы Mathcad на примере решения задач расчетно-графической работы №3 для варианта №13 [1], фамилия студента Рыжов. Выбираем по таблице 1 [1] исходные данные:

Р	Ы	Ж	О	В	Р	Ы	Ж	О	В
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

$$k_1 = \frac{2}{3}; \quad k_2 = 1; \quad m_1 = 150; \quad m_2 = 50; \quad c = 163; \quad \omega_0 = 2; \quad \tau = 5; \quad k_3 = 1; \quad k_4 = 0,8; \\ m = 260; \quad f_{\ddot{n}\ddot{o}} = 0,3.$$

Методологические особенности решения задач рассмотрены в [2-5].

Все примеры расчетов в среде Mathcad записаны прямым шрифтом, а все предварительные преобразования и формулы набраны курсивом.

2 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Условия задачи 1.

Тело начинает движение в точке A участка AB длины l , наклоненного под углом α к горизонту, со скоростью V_A . Коэффициент трения скольжения на участке f . Через τ секунд тело покидает участок AB со скоростью V_B и летит в воздухе T секунд, приземлившись в точке C со скоростью V_C .

Исходные данные: $V_A = 2,5 \text{ м/с}$; $f \neq 0$; $\beta = 60^\circ$; $d = 10 \text{ м}$;
 $\alpha = 45^\circ \cdot k_1 = 30^\circ$; $l = 6 \cdot k_2 = 6 \text{ м}$.

Найти: V_B , τ .

Решение:

Так как нас интересует только поступательная составляющая движения, при решении задачи тело можно считать материальной точкой. Сопротивление воздуха не учитываем.

1 Изобразим расчетную схему (рисунок 2). Зададим координатные оси: Ax_1y_1 для участка AB и Bxy - для BC .

2 Для нахождения искомых величин независимо от варианта задания необходимо решить II задачу динамики для обоих участков движения.

Рассмотрим участок AB . Запишем для движущейся точки II закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_e. \quad (2.1)$$

Изобразим действующие на точку силы: $\sum \bar{F}_e = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{\text{од}}$.

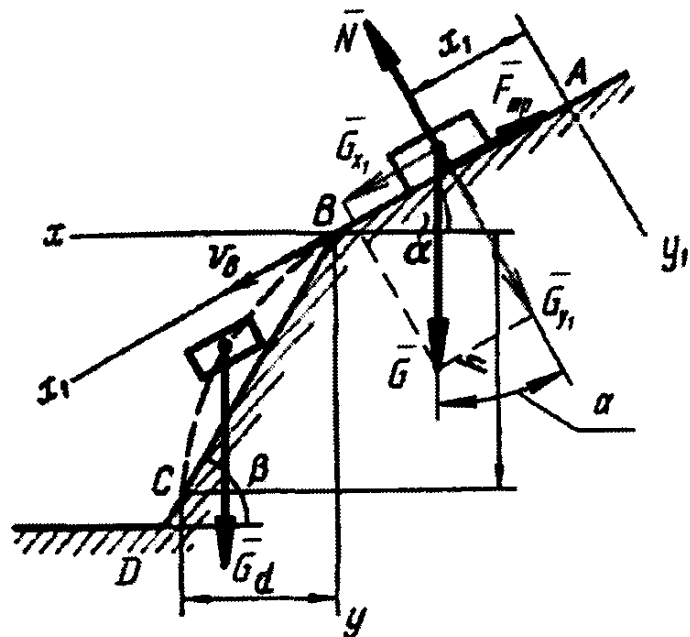


Рисунок 2 – Расчетная схема

Спроецируем (2.1) на оси координат Ax_1 и Ay_1 :

$$ma_{x_1} = G\sin(\alpha) - F_{\text{од}}, \quad (2.2)$$

$$ma_{y_1} = G\cos(\alpha) - N, \quad (2.3)$$

где $F_{\text{од}} = Nf$ - сила трения скольжения; N - нормальная реакция.


3 Так как на участке AB точка движется вдоль оси Ax_1 , то $y_1 = \text{const}$ и $a_{y_1} = \ddot{y}_1 = 0$. Следовательно, из уравнения (2.3) можем выразить

$$N = G\cos(\alpha) - ma_{y_1} = mg\cos(\alpha)$$


и подставить в уравнение (2.2):

$$ma_{x_1} = mg \sin(\alpha) - mg f \cos(\alpha) \rightarrow \frac{dV_{x_1}}{dt} = g[\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)]. \quad (2.2')$$


4 Для решения II задачи динамики полученное дифференциальное уравнение движения материальной точки вдоль оси Ax_1 (2.2') необходимо дважды проинтегрировать с учетом следующих начальных условий: в момент времени $t_0 = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_{x0} = V_A$.

Разделим в уравнении переменные и запишем его интеграл в среде Mathcad при помощи шаблона «» рабочей панели «Calculus». Следует отметить, что в среде Mathcad недопустимо совпадение имен переменных, стоящих в пределах интегрирования и под знаком дифференциала в подынтегральном выражении. Поэтому верхние пределы интегралов обозначим V_{x1} и t_1 , а не V_x и t :

$$\int_{V_{x0}}^{V_{x1}} 1 dV_x = \int_0^{t_1} g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f dt$$

Для получения результата в символьном виде необходимо выделить полученное выражение, нажать на иконку «» рабочей панели «Symbolic» и в появившемся после слова «solve» поле указать искомую переменную (в нашем случае это V_{x1} - скорость в момент времени t_1). Нажав клавишу «F9», получим ответ:

$$\int_{V_{x0}}^{V_{x1}} 1 dV_x = \int_0^{t_1} g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f dt \xrightarrow{\text{solve, } V_{x1}} V_{x0} + t_1 \cdot g \cdot \sin(\alpha) - t_1 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f$$

Чтобы привести подобные, выделим курсором часть выражения « $\text{solve, } V_{x1}$ », нажмем иконку «» (панель «Symbolic») и укажем переменную t_1 . А для замены переменной V_{x0} на ее значение V_A , в соответствии с начальными условиями, после ввода t_1 один раз нажмем клавишу «space» и выберем на панели «Symbolic» оператор «substitute». Слева от знака « \Rightarrow » запишем V_{x0} , а справа V_A . После ввода V_A нажмем клавишу «space» дважды и снова выберем оператор «substitute» для получения ответа как функции переменной t (сделаем замену $t_1 = t$). После нажатия «F9» получится следующее:

$$\int_{V_{x0}}^{V_{x1}} 1 dV_x = \int_0^{t_1} g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f dt \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{solve, } V_{x1} \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } V_{x0} = V_A \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array}} (g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f) \cdot t + V_A$$

Итак, закон изменения проекции скорости точки на ось Ax_1 имеет вид

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = [g \sin(\alpha) - g \cos(\alpha) f] t + V_A. \quad (2.4)$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (2.4) и найдем его интеграл:

$$\int_{x_0}^{x_1} 1 dx = \int_0^{t_1} (g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f) \cdot t + V_A dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x_1 \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } x_0 = 0 \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array} \right. \rightarrow \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f \right) \cdot t^2 + V_A \cdot t$$

Таким образом, II задача динамики для участка *AB* решена – найден закон движения точки вдоль оси *Ax₁*:

$$x_1 = \left[\frac{1}{2} g \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g \cos(\alpha) f \right] t^2 + V_A t. \quad (2.5)$$

5 Рассмотрим участок *BC*. Здесь на точку действует только сила тяжести \bar{G} , поэтому II закон динамики для этого участка будет иметь вид

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_e = \bar{G}. \quad (2.6)$$

Спроецируем векторное равенство (2.6) на оси *Bx* и *By*:

$$ma_x = m \frac{dV_x}{dt} = 0, \quad (2.7)$$

$$ma_y = m \frac{dV_y}{dt} = G \rightarrow \frac{dV_y}{dt} = g. \quad (2.8)$$

В соответствии с расчетной схемой определяем начальные условия для участка *BC*: в момент времени $t_0 = 0$ $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_{x0} = V_B \cos(\alpha)$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = V_{y0} = V_B \sin(\alpha)$. Проинтегрируем уравнение (2.7) дважды:

$$\int_{V_{x0}}^{V_{x1}} 1 dV_x = \int_0^{t_1} 0 dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } V_{x1} \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } V_{x0} = V_B \cdot \cos(\alpha) \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array} \right. \rightarrow V_B \cdot \cos(\alpha)$$

Закон изменения проекции скорости точки на ось *Bx*:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = V_B \cos(\alpha). \quad (2.9)$$

Интеграл (2.9) в Mathcad:

$$\int_{x_0}^{x_1} 1 dx = \int_0^{t_1} V_B \cdot \cos(\alpha) dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x_1 \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } x_0 = 0 \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array} \right. \rightarrow V_B \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$

Закон движения вдоль оси Bx :

$$x = V_B \cos(\alpha) t. \quad (2.10)$$

Первый интеграл дифференциального уравнения (2.8):

$$\int_{V_{y0}}^{V_{y1}} 1 dV_y = \int_0^{t_1} g dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } V_{y1} \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } V_{y0} = V_B \cdot \sin(\alpha) \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array} \right. \rightarrow V_B \cdot \sin(\alpha) + g \cdot t$$

Проекция скорости точки на ось By :

$$V_y = \frac{dy}{dt} = V_B \sin(\alpha) + g t. \quad (2.11)$$

Второй интеграл (2.8):

$$\int_{y_0}^{y_1} 1 dy = \int_0^{t_1} V_B \cdot \sin(\alpha) + g \cdot t dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } y_1 \\ \text{collect, } t_1 \\ \text{substitute, } y_0 = 0 \\ \text{substitute, } t_1 = t \end{array} \right. \rightarrow V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Закон движения точки вдоль оси By :

$$y = V_B \sin(\alpha) t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.12)$$

6 При помощи полученных зависимостей выразим кинематические характеристики движения точки в конце каждого участка.

В конце участка AB (точка B) $t = \tau$, $V_{x1} = V_B$, $x_1 = l$. Подставив эти значения в (2.4) и (2.5) при помощи оператора «substitute», получим уравнения

$$V_{x1} = (g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f) \cdot t + V_A \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } V_{x1} = V_B \\ \text{substitute, } t = \tau \end{array} \right. \rightarrow V_B = (g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f) \cdot \tau + V_A$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f \right) \cdot t^2 + V_A \cdot t \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } x_1 = l \\ \text{substitute, } t = \tau \end{array} \right. \rightarrow l = \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f \right) \cdot \tau^2 + V_A \cdot \tau$$

Для точки С (конец участка BC) $t = T$, $V_x = V_{Cx}$, $V_y = V_{Cy}$, $x = d$, $y = h$ и с учетом (2.9)-(2.12):

$$V_x = V_B \cdot \cos(\alpha) \text{ substitute, } V_x = V_{Cx}, t = T \rightarrow V_{Cx} = V_B \cdot \cos(\alpha)$$

$$x = V_B \cdot \cos(\alpha) \cdot t \text{ substitute, } x = d, t = T \rightarrow d = T \cdot V_B \cdot \cos(\alpha)$$

$$V_y = V_B \cdot \sin(\alpha) + g \cdot t \text{ substitute, } V_y = V_{Cy}, t = T \rightarrow V_{Cy} = V_B \cdot \sin(\alpha) + T \cdot g$$


$$y = V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \text{ substitute, } y = h, t = T \rightarrow h = V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot T + \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2$$

При подстановке высоты h следует обратить внимание на знак, который зависит от направления оси By .

Зададим в системе Mathcad исходные данные:

$$V_A := 2.5 \quad f \neq 0 \quad \beta := 60 \cdot \text{deg} \quad d := 10 \quad g := 9.81$$

$$k_1 := \frac{2}{3} \quad k_2 := 1 \quad \alpha := 45 \cdot \text{deg} \cdot k_1 \quad l := 6 \cdot k_2$$

При вводе угловых величин в градусах после написания цифры необходимо нажать «*» (умножение), затем иконку «» системной панели (ввод размерностей). В верхнем меню «Dimension» (размерность) появившегося окна выбираем «Angle» (угол) и «Degree [deg]» (градусы) в меню «Unit» (единица измерения).

Решим полученную систему уравнений при помощи вычислительного блока *Given / Find*. Для его работы предварительно необходимо задать начальные приближения 7 неизвестных, входящих в эти уравнения:

$$V_B := 1 \quad f := 0.2 \quad \tau := 1 \quad V_{Cx} := 1 \quad T := 1 \quad V_{Cy} := 1 \quad h := d$$

В качестве седьмого уравнения запишем геометрическую связь между дальностью d и высотой h .

После нажатия «F9» с учетом введенных начальных приближений численно решается система уравнений и в переменную «Result» записывается результат. Повторно набрав имя переменной и нажав «Ctrl+1» (операция транспонирования – обозначена индексом «T»), а затем «=» и «F9» – увидим вектор решения. Первый элемент вектора соответствует первой переменной в скобках после оператора «Find», второй – второй переменной и т.д.

Given

$$V_B = \tau \cdot (g \cdot \sin(\alpha) - g \cdot \cos(\alpha) \cdot f) + V_A$$

$$l = \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot f \right) \cdot \tau^2 + V_A \cdot \tau$$

$$V_{Cx} = V_B \cdot \cos(\alpha)$$

$$d = T \cdot V_B \cdot \cos(\alpha)$$

$$V_{Cy} = V_B \cdot \sin(\alpha) + T \cdot g$$

$$h = V_B \cdot \sin(\alpha) \cdot T + \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{d}$$

$$\text{Result} := \text{Find}(V_B, f, \tau, V_{Cx}, T, V_{Cy}, h)$$

$$\text{Result}^T = (7.526 \quad 0.083 \quad 1.197 \quad 6.518 \quad 1.534 \quad 18.815 \quad 17.321)$$

Так как в задаче необходимо было найти V_B и τ , выведем отдельно 1-й и 3-й элементы вектора «Result» (номер элемента вводится после нажатия «[»):

$$\underline{V_B} := \text{Result}_1 \quad \underline{\tau} := \text{Result}_3$$

$$\text{Ответ: } V_B = 7.526 \quad , \quad \tau = 1.197 \quad .$$

Итак, на основе приведенного примера можно сделать вывод, что система Mathcad позволяет быстро и точно интегрировать дифференциальные уравнения движения точки, не отвлекаясь на такие чисто математические задачи, как решение систем уравнений и определение первообразных. Листинг полученной расчетной программы – около 3 страниц.

3 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Условия задачи 2.

Тело H массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A , отсчитываемом вдоль желоба, находится материальная точка K массой m_2 . В некоторый момент времени ($t=0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t=\tau$ действие сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t = \tau$.

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ . В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 - новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону $OK = s = s(t_1)$.

Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1 = T$.

Исходные данные: $a = 1 \text{ м}$; $AO = 0,5 \text{ м}$; $M_z = c\sqrt{t} \text{ Н} \cdot \text{м}$; $OK = 0,15t_1^2 \text{ м}$;
 $T = 2 \text{ с}$; $m_1 = 150 \text{ кг}$; $m_2 = 50 \text{ кг}$; $c = 163$;
 $\omega_0 = 2 \text{ рад}^{-1}$; $\tau = 5 \text{ с}$.

Найти: ω_τ , ω_T .

Решение:

Считаем тело H однородной пластинкой.

1 Рассмотрим систему, состоящую из тела H , материальной точки K и вертикальной оси. Изобразим расчетную схему (рисунок 3) и зададим координатные оси $Exyz$.

2 Исследуем движение системы на первом этапе при помощи теоремы об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e). \quad (3.1)$$

Внешние силы, действующие

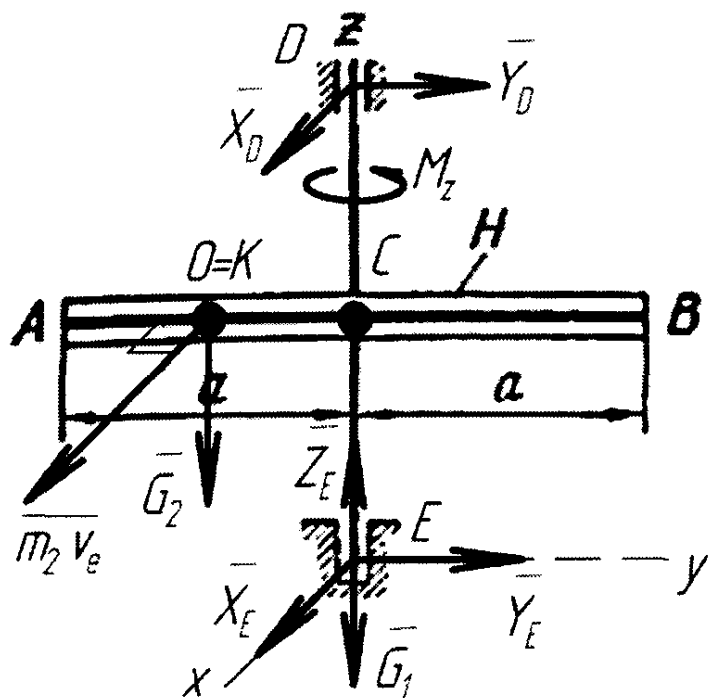


Рисунок 3 – Первый этап движения

на систему: \bar{X}_E , \bar{Y}_E , \bar{Z}_E , \bar{X}_D , \bar{Y}_D , \bar{G}_1 , \bar{G}_2 , M_z . Сумма моментов внешних сил $\sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_z = c\sqrt{t}$. Остальные силы либо пересекают ось Ez , либо ей параллельны.

3 Определим левую часть равенства (3.1). Так как система состоит из двух тел, ее кинетический момент равен $K_z = K_{1z} + K_{2z}$ (здесь K_{1z} - кинетический момент пластины H ; K_{2z} - кинетический момент точки K).

Для пластины как для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, $K_{1z} = J_1\omega$. Момент инерции тонкого однородного стержня вокруг оси, проходящей через центр масс, равен $J_1 = \frac{ml^2}{12} = \frac{m_1(2a)^2}{12}$.

Кинетический момент точки K равен $K_{2z} = m_z(m_2\bar{v}_e) + m_z(m_2\bar{v}_r)$. На первом этапе относительная скорость точки $v_r = 0$, а переносная скорость равна

$v_e = \omega OC$ и направлена перпендикулярно отрезку $OC = a - AO$. Следовательно, $K_{2z} = (m_2 \omega OC) OC$.

Запишем выражение для кинетического момента системы в Mathcad:

$$K_z = \frac{m_1 \cdot (2 \cdot a)^2}{12} \cdot \omega + OC^2 \cdot m_2 \cdot \omega \text{ collect, } \omega \rightarrow K_z = \left(\frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot a^2 + OC^2 \cdot m_2 \right) \cdot \omega$$

Учитывая, что множитель перед угловой скоростью – величина постоянная, разделим в уравнении (3.1) переменные и найдем его интеграл:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_\tau} \left(\frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot a^2 + OC^2 \cdot m_2 \right) d\omega = \int_0^\tau c \cdot \sqrt{t} dt \left| \begin{array}{l} \text{solve, } \omega_\tau \\ \text{collect, } \omega_0, \tau \end{array} \right. \rightarrow \omega_0 + 2 \cdot \tau^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{c}{m_1 \cdot a^2 + 3 \cdot OC^2 \cdot m_2}$$

С учетом исходных данных получим ответ:

$$a := 1 \quad AO := 0.5 \quad m_1 := 150 \quad m_2 := 50 \quad c := 163 \quad \omega_0 := 2 \quad \tau := 5$$

$$OC := a - AO \quad OC = 0.5$$

$$\omega_\tau := \omega_0 + 2 \cdot \tau^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{c}{m_1 \cdot a^2 + 3 \cdot OC^2 \cdot m_2} \quad \omega_\tau = 21.439$$

$$K_{z_T} := \left(\frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot a^2 + OC^2 \cdot m_2 \right) \cdot \omega_\tau \quad K_{z_T} = 1.34 \times 10^3$$

Для вывода текущего значения любой переменной в Mathcad достаточно записать имя этой переменной, нажать «=» и «F9».

4 На втором этапе правая часть (3.1) обращается в нуль ($M_z = 0$), следовательно, выполняется закон сохранения кинетического момента:

$$\frac{dK_z}{dt_1} = 0 \Rightarrow K_z = const \quad \text{и} \quad K_{z_T} = K_{z_T} \quad (3.2)$$

Определим положение точки K в момент времени $t_1 = T = 2 \text{ } \ddot{n}$:

$$OK = 0.15 \cdot t_1^2 \text{ substitute, } t_1 = 2 \rightarrow OK = .60$$

Изобразим расчетную схему системы на втором этапе (рисунок 4) и вычислим ее кинетический момент $K_{z_T} = K_{1z_T} + K_{2z_T}$.

Для пластины: $K_{1z_T} = J_1 \omega_T$.

Для точки K : $K_{2z_T} = m_z (m_2 \bar{v}_{e_T}) + m_z (m_2 \bar{v}_{r_T})$. Переносная скорость $v_{e_T} = \omega_T CK$. Зная закон относительного движения точки K $OK(t_1)$, вычислим ее относительную скорость в момент $t_1 = T = 2 \text{ } \ddot{n}$:

$$v_{r_T} = \frac{d}{dt_1} (0.15 \cdot t_1^2) \rightarrow v_{r_T} = .30 \cdot t_1 \text{ substitute } t_1 = 2 \rightarrow v_{r_T} = .60$$

Изобразим векторы $m_2 \bar{v}_{e_T}$ и $m_2 \bar{v}_{r_T}$ на расчетной схеме и определим их плечи относительно оси Ez :

$$h_e = CK, h_r = 0$$

(вектор $m_2 \bar{v}_{r_T}$ пересекает ось Ez).

Итак, кинетический момент системы в конце второго этапа

$$K_{z_T} = \frac{m_1 (2a)^2}{12} \omega_T + (m_2 \omega_T CK) CK.$$

Решим уравнение (3.2), учитывая, что $CK = AO + OK - a$:

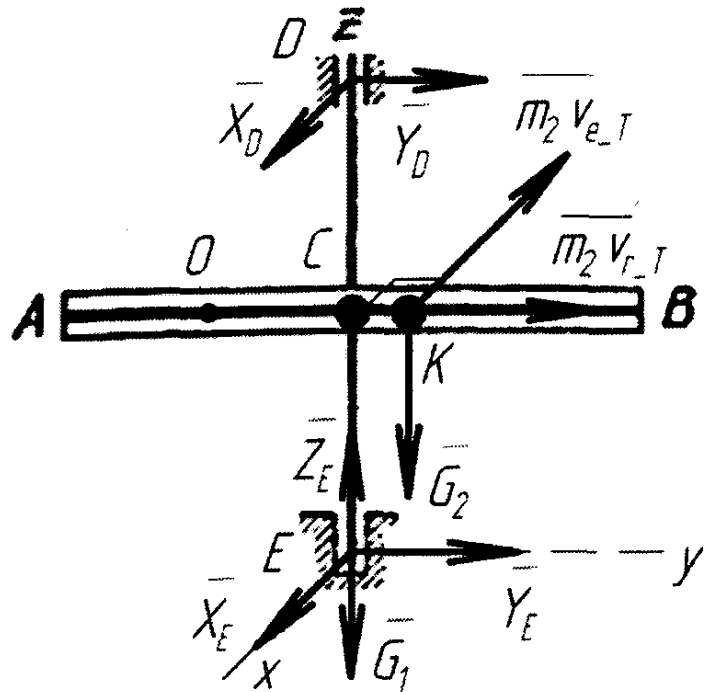


Рисунок 4 – Второй этап движения

$$OK := .60 \quad CK := AO + OK - a \quad CK = 0.1$$

$$K_{z_T} = \frac{m_1 \cdot (2 \cdot a)^2}{12} \cdot \omega_T + m_2 \cdot \omega_T \cdot CK^2 \text{ solve } \omega_T \rightarrow 26.533272629205658120$$

$$\omega_T := 26.533272629205658120$$

$$\text{Ответ (в системе СИ):} \quad \omega_\tau = 21.439 \quad \omega_T = 26.533$$

Применение системы Mathcad позволило получить аналитическое решение задачи на первом этапе и решить уравнение, выражающее закон сохранения кинетического момента, без дополнительных преобразований.

Аналитическое решение может быть получено и для второго этапа. Для этого в соответствующем уравнении выделяем переменную « ω_T » и кликаем на команде «Solve» меню «Symbolics\Variable» (рисунок 5). После чего в следующей строке появится результат аналитического решения выбранного уравнения относительно выделенной переменной. Если такого решения не существует или система Mathcad его получить не может, будет выдано сообщение об ошибке.

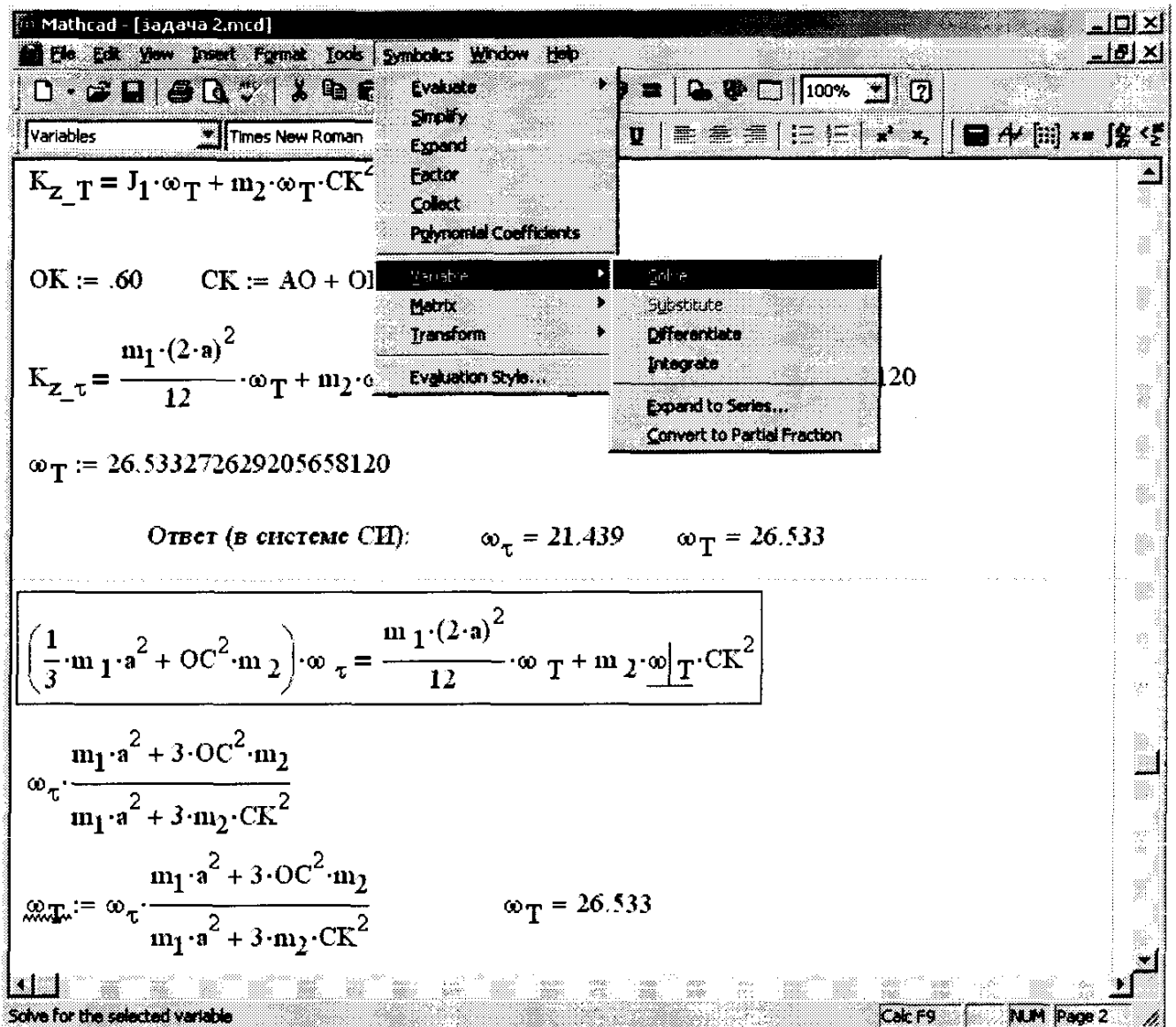


Рисунок 5 – Аналитическое решение уравнения

4 ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Условия задачи 3.

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Коэффициент трения скольжения тела 1 равен f , а коэффициент трения качения тела 3, катящегося без скольжения, – δ . Пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

Блоки и катки, для которых радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям. Массами остальных звеньев пренебречь.

Исходные данные: $m_1 = m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = 5m$; $m_4 = 2m$;
 $R_2 = 0,3$; $R_3 = 0,2i$; $r_2 = 0,8R_2$; $r_4 = 0,2R_4$; $R_4 = R_2$;

$$\alpha = 30^\circ; s = 2i; i_{2x} = 0,2 \cdot k_3; \delta = 0,2 \cdot 10^{-2} \cdot k_4;$$

$$k_3 = 1; k_4 = 0,8; i_{4x} = 0,5i_{2x}.$$

Найти: $v_1 (s = 2i)$.

Решение:

1 Рассмотрим систему, состоящую из тел 1, 2, 3, 4 и соединяющих их нитей (рисунок 6). Применим к решению задачи теорему об изменении кинетической энергии:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i,$$

где T_1 и T_0 - конечное и начальное значения кинети-

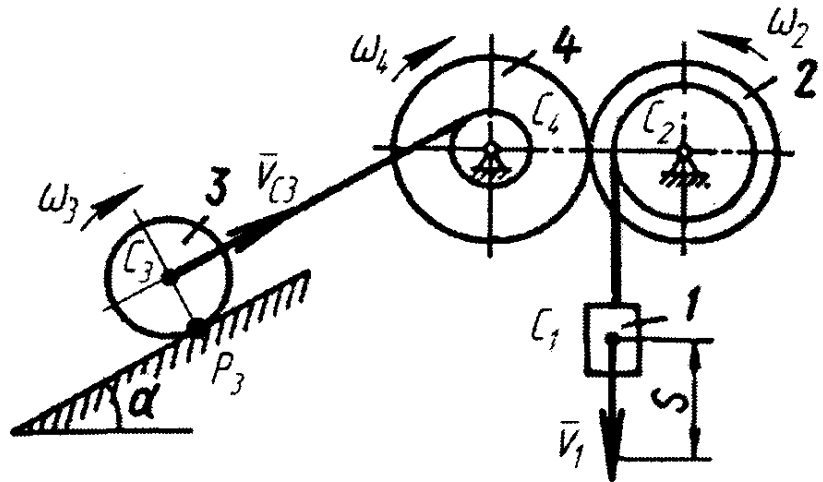


Рисунок 6 – Расчетная схема системы

ческой энергии системы; $\sum A_k^e$ и $\sum A_k^i$ - суммы работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на заданном перемещении.

Так как система начинает движение из состояния покоя, то $T_0 = 0$. Кроме того, для системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, $\sum A_k^i = 0$ (нет внутренних относительных перемещений). Обозначив кинетическую энергию T , получим выражение:

$$T = \sum A_k^e. \quad (4.1)$$

2 Кинетическая энергия системы T равна сумме кинетических энергий входящих в нее тел: $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

Тело 1 совершает поступательное движение: $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2}$.

Тела 2 и 4 – вращательное движение: $T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}; T_4 = \frac{J_4 \omega_4^2}{2}$.

Моменты инерции тел: $J_2 = m_2 i_{2x}^2, J_4 = m_4 i_{4x}^2$. В соответствии с

расчетной схемой угловые скорости равны: $\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}$,

$$\omega_4 R_4 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_4 = \omega_2 \frac{R_2}{R_4}.$$

Тело 3 совершает плоскопараллельное движение: $T_3 = \frac{m_3 v_{c3}^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}$.

Скорость центра масс $v_{C3} = \omega_4 r_4$. Так как по условию задачи цилиндр 3 катится без скольжения, точка P_3 будет мгновенным центром скоростей (МЦС)

и $\omega_3 = \frac{v_{C3}}{P_3 C_3} = \frac{v_{C3}}{R_3}$. Для сплошного однородного цилиндра $J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}$.

Введем исходные данные и определим выражение кинетической энергии в системе Mathcad:

$$\begin{aligned} R_2 &:= 0.3 & R_3 &:= 0.2 & r_2 &:= 0.8 \cdot R_2 & R_4 &:= R_2 & r_4 &:= 0.2 \cdot R_4 & \alpha &:= 30 \cdot \pi \cdot 180^{-1} \\ \underline{m} &:= 2 & k_3 &:= 1 & k_4 &:= 0.8 & i_{2x} &:= 0.2 \cdot k_3 & i_{4x} &:= 0.5 \cdot i_{2x} & \underline{\delta} &:= 0.2 \cdot 10^{-2} \cdot k_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m \cdot v_1^2}{2} \dots \\ &+ \frac{J_2 \cdot \omega_2^2}{2} \dots \\ &+ \frac{J_4 \cdot \omega_4^2}{2} \dots \\ &+ \frac{m_3 \cdot v_{C3}^2}{2} \dots \\ &+ \frac{J_3 \cdot \omega_3^2}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } J_2 = m_2 \cdot i_{2x}^2 \\ \text{substitute, } m_2 = 2 \cdot m \\ \text{substitute, } J_4 = m_4 \cdot i_{4x}^2 \\ \text{substitute, } m_4 = 2 \cdot m \\ \text{substitute, } J_3 = \frac{m_3 \cdot R_3^2}{2} \rightarrow T = 1.602430555555555555555555 \cdot m \cdot v_1^2 \\ \text{substitute, } m_3 = 5 \cdot m \\ \text{substitute, } \omega_3 = \frac{v_{C3}}{R_3} \\ \text{substitute, } v_{C3} = \omega_4 \cdot r_4 \\ \text{substitute, } \omega_4 = \omega_2 \cdot \frac{R_2}{R_4} \\ \text{substitute, } \omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \end{array} \right.$$

Здесь каждое слагаемое в формуле было записано с новой строки при помощи одновременного нажатия «Ctrl»+«Enter». При выполнении замен с помощью оператора «substitute» необходимо, чтобы каждая последующая замена не включала уже замененных переменных.

3 Изобразим систему в конечном положении (рисунок 7) и определим сумму работ на перемещении s всех приложенных внешних сил: $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{N}_2, \overline{N}_3, \overline{N}_4, \overline{F}_{\text{н}0}, M_c$.

Работа сил тяжести:

$$A_{G1} = G_1 h_{C1} = mgs;$$

$$A_{G2} = A_{G4} = 0 \text{ (так как } h_{C2} = h_{C4} = 0 \text{);}$$

$$A_{G3} = G_3 h_{C3}.$$

Так как центр тяжести тела 3 перемещается вверх (противоположно направлению силы тяжести \bar{G}_3), то $h_{C3} = -s_3 \sin(\alpha)$. Для определения перемещения s_3 проинтегрируем полученные ранее кинематические соотношения при нулевых начальных условиях:

$$v_{C3} = \frac{ds_3}{dt} = \omega_4 r_4 = \frac{d\varphi_4}{dt} r_4 \Rightarrow \int_0^{s_3} ds_3 = r_4 \int_0^{\varphi_4} d\varphi_4. \text{ Отсюда: } s_3 = \varphi_4 r_4. \text{ Аналогично}$$

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{R_2}{R_4} \Rightarrow \varphi_4 = \varphi_2 \frac{R_2}{R_4} \text{ и } \omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{s}{r_2}.$$

Работа нормальных реакций и силы сцепления:

$$A_{N2} = A_{N3} = A_{N4} = A_{F_{\text{нб}}} = 0$$

(так как нет перемещений точек приложения сил).

Работа момента сопротивления качению $M_c = N_3 \delta$:

$$A_{Mc} = -M_c \varphi_3.$$

Для определения N_3 составим уравнение равновесия тела 3 вдоль нормали к поверхности, по которой оно катится:

$$N_3 - G_3 \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N_3 = m_3 g \cos(\alpha).$$

Так как качение происходит без скольжения, то $\varphi_3 = \frac{s_3}{R_3}$.

Запишем выражение для $\sum A_k^e$ в Mathcad и выполним необходимые подстановки:

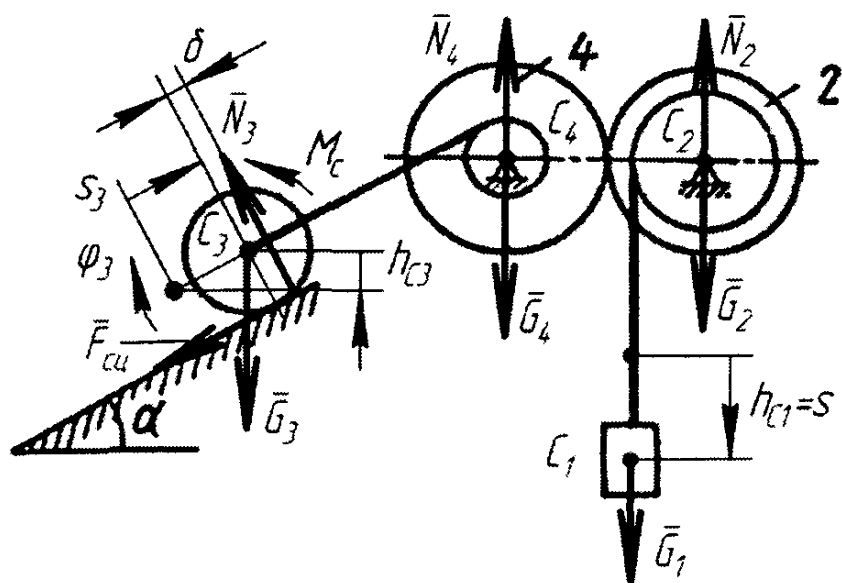


Рисунок 7 – Система в конечном положении

$$\Sigma A_{e_k} = m \cdot g \cdot s \dots$$

$$+ m_3 \cdot g \cdot (-s_3 \cdot \sin(\alpha)) \dots$$

$$+ -m_3 \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \delta \cdot \varphi_3$$

$$\rightarrow \Sigma A_{e_k} = \frac{575006865262199451}{80000000000000000} \cdot m$$

substitute, $m_3 = 5 \cdot m$

substitute, $\varphi_3 = \frac{s_3}{R_3}$

substitute, $s_3 = \varphi_4 \cdot r_4 \rightarrow \Sigma A_{e_k} = \frac{575006865262199451}{80000000000000000} \cdot m$

substitute, $\varphi_4 = \varphi_2 \cdot \frac{R_2}{R_4}$

substitute, $\varphi_2 = \frac{s}{r_2}$

substitute, $g = 9.81$

simplify

Здесь для упрощения полученного после подстановок выражения применен оператор «simplify».

4 Итак, выражение (4.1) запишется в виде уравнения относительно v_1 :

$$1.602430555555555555555555 \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{575006865262199451}{80000000000000000} \cdot m \text{ solve, } v_1 \rightarrow \begin{pmatrix} -2.1178827480897900557 \\ 2.1178827480897900557 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := 2.1178827480897900557$$

Ответ (в системе СИ): $v_1 = 2.118$

Благодаря символьному процессору Mathcad при решении задачи удалось избежать громоздких преобразований при вычислении кинетической энергии системы и суммы работ всех приложенных к ней внешних сил.

5 ИЗУЧЕНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Условия задачи 4.

Определить значение постоянной силы P , под действием которой качение без скольжения колеса массой m носит граничный характер, т. е. сцепление колеса с основанием находится на грани срыва. Решить задачу аналитически и графически.

Найти также для этого случая уравнение движения центра масс колеса C , если в начальный момент времени его координата $x_{C0} = 0$ и его скорость $V_{C0} = 0$.

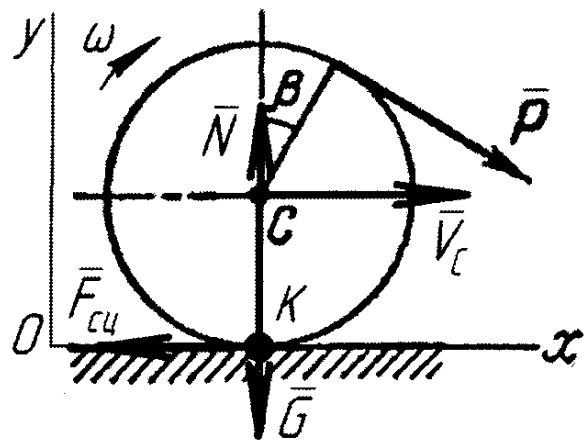
Колеса, для которых радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками.

Исходные данные: $\beta = 30^\circ$; $\delta = 0$; $m = 260 \text{ кг}$; $f_{\text{н\ddot{o}}} = 0,3$.

Найти: P , $x_C(t)$, $y_C(t)$.

Решение:

1 Изобразим систему в произвольный момент времени и направим координатные оси Oxy (рисунок 8). На колесо действуют силы: \bar{P} , \bar{G} , \bar{N} , $\bar{F}_{\bar{n}\bar{o}}$, причем направление $\bar{F}_{\bar{n}\bar{o}}$ заранее неизвестно – зададим влево.



2 Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

Рисунок 8 – Плоское движение тела

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}; \quad J_C\ddot{\phi} = \sum m_C(\bar{F}_k).$$

Принимая радиус колеса равным R , с учетом расчетной схемы получим:

$$m\ddot{x}_C = P\cos(\beta) - F_{\bar{n}\bar{o}}; \quad (5.1)$$

$$m\ddot{y}_C = -P\sin(\beta) - G + N; \quad (5.2)$$

$$J_C\ddot{\phi} = PR + F_{\bar{n}\bar{o}}R. \quad (5.3)$$

Знаки моментов сил в уравнении (5.3) определяем в соответствии с положительным направлением отчета углов, заданным на чертеже (на рисунке 8 задано направление угловой скорости). Так как по условию $\delta = 0$, момент сопротивления качению $M_c = \delta N$ не учитываем.

При движении колеса $y_{\bar{N}} = const$, следовательно, $\dot{y}_{\bar{N}} = \ddot{y}_{\bar{N}} = 0$ и из уравнения (5.2) можем выразить N :

$$N = P\sin(\beta) + mg. \quad (5.4)$$

При качении без проскальзывания сила сцепления $F_{\bar{n}\bar{o}}$ может принимать любое значение от нуля до максимального $F_{\bar{n}\bar{o}_{max}}$, поэтому в уравнениях (5.1) и (5.3) – три неизвестные величины: \ddot{x}_C , $F_{\bar{n}\bar{o}}$ и $\ddot{\phi}$. Однако если нет проскальзывания, то точка K будет мгновенным центром скоростей, и будет выполняться уравнение кинематической связи $V_C = R\omega$. Продифференцируем это уравнение по времени с учетом того, что $\ddot{y}_{\bar{N}} = a_{\bar{N}y} = 0$ и $a_{\bar{N}} = a_{\bar{N}x}$:

$$\frac{dV_C}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_C = R\varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{a_{Cx}}{R}. \quad (5.5)$$

Для сплошного однородного диска $J_C = \frac{mR^2}{2}$. Преобразуем уравнения (5.1), (5.3) и (5.5) в Mathcad:

$$J_C \cdot \varepsilon = P \cdot R + F_{\text{сц}} \cdot R \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } J_C = \frac{m \cdot R^2}{2} \\ \text{substitute, } \varepsilon = \frac{a_{C_x}}{R} \rightarrow 2 \cdot \frac{P + F_{\text{сц}}}{m} \\ \text{solve, } a_{C_x} \end{array} \right.$$

$$m \cdot a_{C_x} = P \cdot \cos(\beta) - F_{\text{сц}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } a_{C_x} = 2 \cdot \frac{P + F_{\text{сц}}}{m} \\ \text{solve, } F_{\text{сц}} \\ \text{collect, } P \end{array} \right. \rightarrow \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \cos(\beta) \right) \cdot P$$

$$a_{C_x} = 2 \cdot \frac{P + F_{\text{сц}}}{m} \quad \left| \begin{array}{l} \text{substitute, } F_{\text{сц}} = \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \cos(\beta) \right) \cdot P \\ \text{collect, } P \end{array} \right. \rightarrow a_{C_x} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \cos(\beta)}{m} \cdot P$$

Здесь сначала в уравнение (5.3) были подставлены выражение для момента инерции J_C и формула (5.5). Затем из этого уравнения была выражена переменная a_{C_x} , полученная зависимость подставлена в (5.1) и найдено решение относительно $F_{\text{сц}}$. После подстановки этого решения в выражение для a_{C_x} – получена зависимость ускорения центра масс колеса от приложенной силы P при условии качения без проскальзывания.

Зададим в Mathcad исходные данные и найденные функции:

$$\beta := 30 \cdot \frac{\pi}{180} \quad m := 260 \quad f_{\text{сц}} := 0.3 \quad g := 9.81$$

$$F_{\text{сц}}(P) := \left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \cos(\beta) \right) \cdot P$$

$$a_{C_x}(P) := 2 \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \cos(\beta)}{m} \cdot P$$

Следует отметить, что при вводе исходных данных значение угла β переведено в радианы при помощи множителя $\frac{\pi}{180}$.

При качении без проскальзывания сила сцепления не должна превышать максимального значения $F_{\text{сц_max}} = N f_{\text{сц}}$:

$$|F_{\text{сц}}| \leq F_{\text{сц_max}} \quad (5.6)$$


С учетом (5.4) запишем функцию для $F_{\ddot{\sigma}_{\max}}$

$$F_{\text{сц}_{\max}}(P) := (P \cdot \sin(\beta) + m \cdot g) \cdot f_{\text{сц}}$$

Решим неравенство (5.6) графически. Зададим диапазон значений силы P , на котором будут построены графики $F_{\ddot{\sigma}}(P)$, $|F_{\ddot{\sigma}}(P)|$, $F_{\ddot{\sigma}_{\max}}(P)$:

$$P_{\min} := -5000 \quad P_{\max} := 5000 \quad \Delta P := 10 \quad P := P_{\min}, P_{\min} + \Delta P .. P_{\max}$$

Синтаксис задания последовательностей в Mathcad: «имя переменной», одновременное нажатие «Shift»+ «:», «значение первого элемента», «значение второго элемента», «:» (в английской раскладке клавиатуры, при этом появятся две точки и следующее поле ввода), «значение последнего элемента». Таким образом, разность значений второго и первого элементов (в нашем случае это ΔP) определяет шаг последовательности.

После нажатия иконки «» рабочей панели «Graph» в расчетный лист будет вставлен шаблон построения графиков в системе координат «X-Y» (рисунок 9).

В нижнем среднем поле шаблона запишем аргумент P , а в левом среднем поле – имена функций. После каждого имени нажимаем «,» – появляется строка для ввода следующей функции. Размер шаблона можно увеличить, потянув указателем мыши за правый нижний угол.

Двойной щелчок на шаблоне выводит меню настройки вида графиков. На вкладке «X-Y Axes» включим опции «Grid lines» (линии разметки) для осей X (X-Axis) и Y (Y-Axis) и опцию «Crossed» (область «Axis Style»). На вкладке «Traces» увеличим толщину линий «Weight», изменим цвет «Color», тип линий «Line» и названия «Legend label» графиков. Также сбросим флажок опции «Hide legend», чтобы отображались имена графиков. По завершении редактирования шаблона нажимаем «OK» и «F9» – система Mathcad выполнит все построения.

Решением неравенства (5.6) будет пересечение графиков $|F_{\ddot{\sigma}}(P)|$ и $F_{\ddot{\sigma}_{\max}}(P)$. Для определения абсцисс точек пересечения щелкнем правой клавишей мыши в центре шаблона и в контекстном меню выберем «Trace» (трассировка графиков). Теперь, если перемещать курсор мыши вдоль графика, в окне «X-Y Trace» будут отображаться координаты его ближайшей к курсору точки (рисунок 9). Определяем, что при $-1420 \leq P \leq 3340 \text{ Н}$ график $|F_{\ddot{\sigma}}(P)|$ проходит ниже графика $F_{\ddot{\sigma}_{\max}}(P)$ – выполняется неравенство (5.6).

Решим (5.6) численно:

$$|F_{сц}(P_1)| \leq F_{сц_max}(P_1) \text{ solve, } P_1 \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \leq 3356.1772801230440491 \\ -1449.2277877969215214 \leq P_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\min} := \begin{pmatrix} 3356.1772801230440491 \\ -1449.2277877969215214 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = 3.356 \times 10^3$$

$$P_2 = -1.449 \times 10^3$$

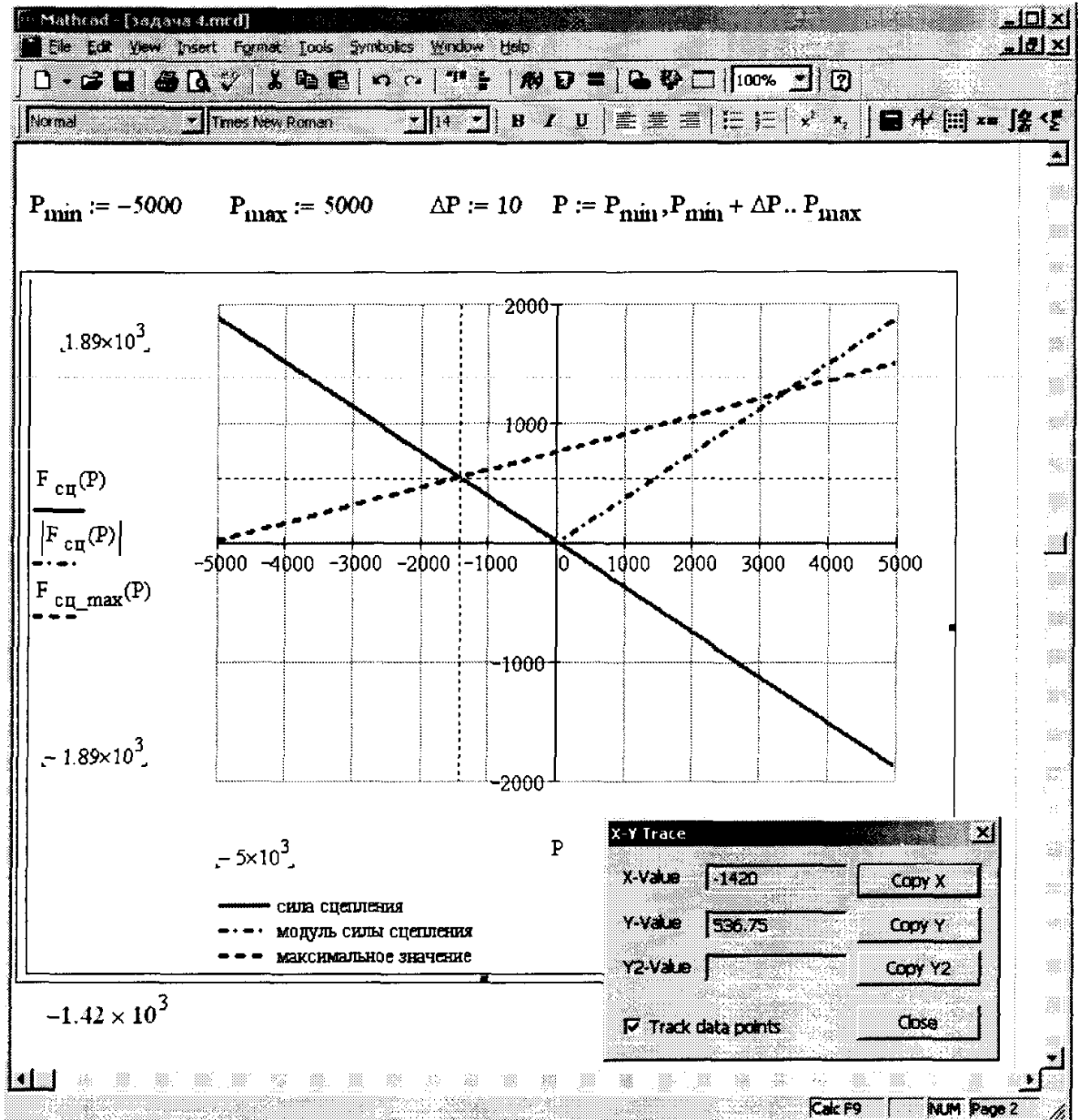


Рисунок 9 – Графическое решение задачи

Следует отметить, что при решении уравнений с помощью символического процессора Mathcad искомая переменная не должна быть определена ранее (в нашем случае это P_1 , а не заданная ранее P). Для доступа к элементам вектора решения P пишем «имя переменной», нажимаем «[» (английская раскладка). В

появившемся поле вводим порядковый номер элемента вектора, ставим знак «=» и нажимаем «F9».

Очевидно, что графический метод менее точный, но зато обладает большей наглядностью и позволяет определить ориентировочные значения искомых решений.

Подставим найденные значения силы P_1 и P_2 , при которых качение будет носить граничный характер, в функцию $a_{Cx}(P)$ и определим, какое при этом будет ускорение центра масс колеса:

$$a_{1Cx} := a_{Cx}(P_1) \quad a_{1Cx} = 16.058$$

$$a_{2Cx} := a_{Cx}(P_2) \quad a_{2Cx} = -6.934$$

Для интегрирования дифференциальных уравнений движения при нулевых начальных условиях можно воспользоваться операцией вычисления первообразной

$$x_{1C} = \int \int a_{1Cx} dt dt \rightarrow x_{1C} = 8.0291180311714804740 \cdot t^2$$

$$x_{2C} = \int \int a_{2Cx} dt dt \rightarrow x_{2C} = -3.4670459844863800127 \cdot t^2$$

Ответ: - при $-1449 \leq P \leq 3356 \text{ Ё}$ колесо будет катиться без скольжения;

- при $P = P_1 = 3356 \text{ Ё}$ закон движения центра масс $x_{1C} = 8,029t^2$ - колесо катится вправо, $y_C = \text{const} = R$;

- при $P = P_2 = -1449 \text{ Ё}$ закон движения центра масс $x_{2C} = -3,467t^2$ - колесо катится влево, $y_C = \text{const} = R$.

Таким образом, в системе Mathcad можно достаточно эффективно решать системы уравнений в общем виде, строить графики функций и получать численное решение неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ревняков Е.Н. Решение задач классической механики: Задания для расчетно-графической работы №3 по теоретической механике для студентов специальностей 260601, 190201, 190202, 050501. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2007. – 40 с.

2 Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высш. шк., 2003. – 416 с.

3 Яблонский А.А. и др. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1985. – 367 с.

4 Бертяев В.Д. Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.

5 Будин Е.М., Будина И.Ф. Сборник задач по теоретической механике, решаемых с применением ЭВМ. – СПб.: Политехника, 2003. – 226 с.

Ревняков Евгений Николаевич

**ПРИМЕНЕНИЕ ЭВМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ**

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы №3
по теоретической механике
для студентов специальностей 260601, 190201, 190202, 050501

Редактор Н.А. Леготина

Подписано к печати
Печать трафаретная
Заказ *64*

Формат 60×84 1/16
Усл.печ.л. 2,25
Тираж *120*

Бумага тип. №1
Уч.изд.л. 2,25
Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г.Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.