МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

МНОГОЧЛЕНЫ

Методические указания и материалы для практических занятий по алгебре со студентами специальности 010100 - Математика

Курган 2012

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

Дисциплина: «Алгебра» (специальность 010100 - Математика)

Составитель: ст. преподаватель Л.М. Логиновских

Утверждены на заседании кафедры «06» декабря 2011г.

Рекомендованы методическим

советом университета «12» декабря 2011г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение …….... 4
Глава 1. Многочлены от одной переменной ……... 5
1. 1. Основные понятия. Алгоритм Евклида …….....5
1. 2. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера …… 11
1. 3. Приводимые и неприводимые многочлены над полем P ….. 16
Глава 2. Многочлены от n переменных ……. 29
Глава 3. Материалы для практических занятий ……... 40
Список литературы……..…. 54

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой дисциплины «Алгебра» и предназначено для студентов направления «Математика». Кроме того, пособие будет полезно студентам направления «Педагогическое образование» профиля «Математическое образование», которые также изучают данный раздел алгебры, но в несколько меньшем объеме.

Пособие состоит из трех разделов. В двух первых разделах содержатся основные положения теоретического курса и приведены решения типовых задач по теме «Многочлены». В последнем разделе приведено двести пятьдесят примеров и задач, которые можно использовать как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы студентов.

Глава 1. Многочлены от одной переменной

1.1. Основные понятия. Алгоритм Евклида

Многочленом степени n от переменной x над полем P называют алгебраическое выражение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, где n – целое неотрицательное число, $a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$ – любые числа из поля P, причем $a_n \neq 0$.

Многочлены обозначают символами $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(x)$ и т.д.

Числа $a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$ называют коэффициентами многочлена, a_n – старший коэффициент, a_0 – свободный член.

Одночлены $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1},..., a_1 x, a_0$ называют членами многочлена.

Многочлен, все коэффициенты которого равны 0, называют нулевым или нуль-многочленом.

При n = 0 многочлен имеет вид $a_0 x^0 = a_0$, т.к. $x^0 = 1$, $a_0 \neq 0$, т.е. многочленами нулевой степени являются числа из поля P, отличные от 0.

Два многочлена над полем P называют равными в алгебраическом смысле, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x.

Сумма, разность и произведение двух многочленов над полем P также являются многочленами над полем P. Действительно, пусть

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + ... + b_m x^m .$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_k + b_k)x^k ,$$

$$f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + ... + (a_k - b_k)x^k ,$$

где k ≤ max(n, m), причем считают $a_i = 0$ при i > n и $b_i = 0$ при i > m.

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n+m} x^{n+m} ,$$

где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$, причем $a_i = 0$ при i > n и $b_i = 0$ при i > m.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x) \neq 0$ многочлены над полем P. Говорят, многочлен $f(x)$ делится на многочлен $\varphi(x)$, если существует такой многочлен $g(x)$ над тем же полем, что выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)g(x)$.

Задача №1

$f(x) = x^2 - 4$, $\varphi(x) = x - 2$, то $g(x) = x + 2$, т.к. $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Операция деления во множестве многочленов не выполнима. Выполнимо деление с остатком. Для любых двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x) \neq 0$ над полем P существует единственная пара многочленов $g(x)$ и $r(x)$ над этим полем, которые удовлетворяют двум условиям (соотношениям):

1. $f(x) = \varphi(x)g(x) + r(x)$,
2. степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или $r(x) = 0$.

Задача №2

Разделить с остатком $f(x)$ на $\varphi(x)$:

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6$, $\varphi(x) = x^2 - 3x - 1$.

Вычисления выполняются по следующей схеме:

$$
\begin{array}{l|l}
-\ 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6 & x^2 - 3x - 1 \\
\underline{2x^4 - 3x^3 - 2x^2} & 2x^2 + 2x + 12 \\
\quad -\ 2x^3 + 6x^2 - 6 & \\
\quad \underline{2x^3 - 6x^2 - 2x} & \\
\qquad 12x^2 + 2x - 6 & \\
\qquad -\ \underline{12x^2 - 36x - 12} & \\
\qquad\qquad 38x + 6 &
\end{array}
$$

$g(x) = 2x^2 + 2x + 12$, $r(x) = 38x + 6$.

Многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$ в том и только том случае, если остаток при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$ равен нулю.

Задача №3

Найти a и b, при которых многочлен $f(x)$ делится на $\varphi(x)$:

$f(x) = x^3 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.

Решение:

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^3 + ax + b & x^2 + 1 \\
\underline{x^3 + x} & x \\
(a-1)x + b = r(x) &
\end{array}
$$

$$f(x); \varphi(x) \Leftrightarrow r(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 0, \\ b = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$$

Итак, a=1, b=0.

Многочлен $\delta(x) \neq 0$ называют общим делителем двух или нескольких многочленов, если каждый из них делится на $\delta(x)$.

Многочлен $d(x)$ называют наибольшим общим делителем двух или нескольких многочленов, если $d(x)$ является общим делителем этих многочленов и сам делится на любой другой их общий делитель.

Наибольший общий делитель двух многочленов находится однозначно с точностью до постоянного множителя, поэтому условились в качестве наибольшего общего делителя многочленов брать тот, у которого старший коэффициент равен 1.

Наибольший общий делитель двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ может быть найден при помощи алгоритма Евклида, который состоит в следующем: сначала делят с остатком многочлен $f(x)$ на $\varphi(x)$, затем $\varphi(x)$ на остаток от первого деления, затем остаток от первого деления на остаток от второго деления и так далее до тех пор, пока не получится нулевой остаток. Последний ненулевой остаток и есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и

$\varphi(x)$. Так как постоянные множители не влияют на делимость многочленов, то в процессе применения алгоритма Евклида, чтобы исключить дробные коэффициенты, можно делимые и делители умножить на любое, отличное от нуля, число.

Задача №4

С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель многочленов:

$f(x) = x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12$,

$\varphi(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12$.

Решение:

Разделим с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $\varphi(x)$. Процесс деления будем осуществлять «углом».

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 52x^2 - 52x - 12 & x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 22x - 12 \\
\underline{x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 22x^2 - 12x} & x \\
-6x^3 - 30x^2 - 40x - 12 &
\end{array}
$$

Итак, $r_1(x) = -6x^3 - 30x^2 - 40x - 12$.

Делим $\varphi(x)$ на $r(x)$. Чтобы избежать дробных коэффициентов, умножим $\varphi(x)$ на 3, а $r(x)$ на $-\frac{1}{2}$.

$3\varphi(x) = 3x^4 + 9x^3 - 18x^2 - 66x - 36$; $\qquad -\frac{1}{2}r_1(x) = 3x^3 + 15x^2 + 20x + 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 + 9x^3 - 18x^2 - 66x - 36 & 3x^3 + 15x^2 + 20x + 6 \\
\underline{3x^4 + 15x^3 + 20x^2 + 6x} & x - 2 \\
-6x^3 - 38x^2 - 72x - 36 & \\
\underline{-6x^3 - 30x^2 - 40x - 12} & \\
-8x^2 - 32x - 24 &
\end{array}
$$

Имеем: $r_2(x) = -8x^2 - 32x - 24$.

Делим $-\frac{1}{2}r_1(x)$ на $r_2(x)$, умножив предварительно на $-\frac{1}{8}$.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 15x^2 + 20x + 6 & x^2 + 4x + 3 \\
\underline{3x^3 + 12x^2 + 9x} & 3x + 3 \\
3x^2 + 11x + 6 & \\
\underline{3x^2 + 12x + 9} & \\
-x - 3 &
\end{array}
$$

Получили, что $r_3(x) = -x - 3$. Умножив $r_3(x)$ на -1, делим $x^2 + 4x + 3$ на $x + 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 4x + 3 & x + 3 \\
\underline{x^2 + 3x} & x + 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
x+3 \\
-\ \underline{x+3} \\
0
\end{array}
$$

Таким образом, четвертый остаток $r_4(x)$ равен нулю. Значит, наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ равен $x+3$.

Ответ: $D(f(x),\varphi(x)) = x+3$.

Процесс решения можно оформить следующим образом:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12 & \underline{x^4+3x^3-6x^2-22x-12} \\
-\ \underline{x^5+3x^4-6x^3-22x^2-12x} & \quad x \\
\qquad\qquad -6x^3-30x^2-40x-12 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\ 3x^4+9x^3-18x^2-66x-36 & \underline{3x^3+15x^2+20x+6} \\
\ \ \underline{3x^4+15x^3+20x^2+6x} & \quad x-2 \\
\qquad -6x^3-38x^2-72x-36 & \\
\qquad -\ \underline{-6x^3-30x^2-40x-12} & \\
\qquad\qquad -8x^2-32x-24 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\ 3x^3+15x^2+20x+6 & \underline{x^2+4x+3} \\
\ \ \underline{3x^3+12x^2+9x} & \quad 3x+3 \\
\qquad 3x^2+11x+6 & \\
\qquad -\ \underline{3x^2+12x+9} & \\
\qquad\qquad -x-3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\ x^2+4x+3 & \underline{x+3} \\
\ \ \underline{x^2+3x} & \quad x+1 \\
\qquad x+3 & \\
\qquad -\ \underline{x+3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Ответ: $D(f(x),\varphi(x)) = x+3$.

Задача №5

Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x)+\varphi(x)v(x) = d(x)$, где $d(x) = D(f(x),\varphi(x))$.

$f(x) = x^4+x^3-3x^2-4x-1$,

$\varphi(x) = x^3+x^2-x-1$.

При решении данной задачи используют алгоритм Евклида, но произвол, состоящий в умножении многочленов на постоянные множители, допускать нельзя, так как здесь используются и частные, которые при указанном произволе искажаются.

Найдем сначала наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3-3x^2-4x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \underline{x^4+x^3-x^2-x} & x \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-x-1 & -2x^2-3x-1 \\ \underline{x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x} & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & \\ \underline{-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}} & \\ -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} -2x^2-3x-1 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \underline{-2x^2-2x} & \frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\ -x-1 & \\ \underline{-x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Итак, $d(x)=x+1=-\frac{4}{3}r_2(x)$.

Чтобы выразить $d(x)$ через многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$, выразим сначала через них $r_2(x)$. Для этого найдем $r_2(x)$ из второго деления в алгоритме Евклида: $r_2(x)=\varphi(x)-r_1(x)(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$. Подставив в это равенство вместо $r_1(x)$ его выражение, найденное из первого деления в алгоритме Евклида, получим:

$$r_2(x)=\varphi(x)-(f(x)-\varphi(x)x)(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})=-f(x)(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})+\varphi(x)(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+1)=$$
$$=f(x)(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})+\varphi(x)(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+1)$$

Учитывая, что $d(x)=-\frac{4}{3}r_2(x)$ имеем:

$$d(x)=f(x)(-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3})+\varphi(x)(\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}).$$

Получим, что $u(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, $v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$.

1.2. Корни многочлена. Теорема Безу. Схема Горнера

Число c называют корнем многочлена $f(x)$, если $f(c)=0$.

Справедлива теорема Безу.

Остаток от деления многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $(x-c)$ равен значению многочлена при $x=c$.

Число c тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится нацело на $(x-c)$.

Число c называют k-кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$.

Если $f(x)=(x-c)d(x)+r$, то коэффициенты многочлена $g(x)$ и остаток r могут быть найдены по схеме Горнера:

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
c	$b_0=a_0$	$b_1=a_1+b_0c$	$b_2=a_2+b_1c$	…	$b_{n-1}=a_{n-1}+b_{n-2}c$	$r=a_n+b_{n-1}c$

где a_0, a_1, …, a_n – коэффициенты многочлена $f(x)$, записанного по убывающим степеням x:

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$, а

$g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$.

Задача №6

Найти кратность корня x = 5 многочлена:

$f(x)=x^5-15x^4+76x^3-140x^2+75x-125$.

Решение.

Используя схему Горнера, имеем:

	1	– 15	76	– 140	75	– 125
5	1	– 10	26	– 10	25	0

Получим, что $f(x)=(x-5)(x^4-10x^3+26x^2-10x+25)$.

Число 5 является корнем $f(x)$. Если 5 будет корнем и $\varphi(x)=x^4-10x^3+26x^2-10x+25$, то 5 будет корнем многочлена $f(x)$ второй кратности или выше.

Проверим, будет ли 5 корнем многочлена $\varphi(x)$ по схеме Горнера:

	1	– 10	26	– 10	25
5	1	– 5	1	– 5	0

$\varphi(5)=0$, следовательно, 5 – корень $\varphi(x)$.

$f(x)=(x-5)^2(x^3-5x^2+x-5)$.

Проверим, будет ли число 5 корнем многочлена $\varphi_1(x)=x^3-5x^2+x-5$.

	1	– 5	1	– 5
5	1	0	1	0

Число 5 является корнем $\varphi_1(x)$, отсюда имеем:

$\varphi_1(x)=(x-5)(x^2+1)$, а $f(x)=(x-5)^3(x^2+1)$.

Число 5 корнем многочлена x^2+1 уже не является. Следовательно, $f(x)$ делится на $(x-5)^3$, но не делится на $(x-5)^4$. Значит, кратность корня 5 многочлена $f(x)$ равна 3.

Процесс решения можно оформить следующим образом:

	1	– 15	76	– 140	75	– 125

5	1	– 10	26	– 10	25	0
5	1	– 5	1	– 5	0	
5	1	0	1	0		
5	1	5	26≠0			

Число 5 является трехкратным корнем многочлена $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$, т.е. $f(x) = (x-5)^3(x^2+1)$.

Задача №7

Остатки от деления многочлена $f(x)$ на x – 2 и x – 3 равны соответственно 5 и 7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-2)(x-3)$.

Решение.

$f(x) = (x-2)(x-3)g(x) + r(x)$ $(*)$, т.к. степень делителя $(x-2)(x-3)$ равна двум, то степень остатка $r(x)$ меньше или равна единице, т.е. $r(x) = ax + b$.

По теореме Безу имеем $f(2) = 5$, $f(3) = 7$.

При x = 2 равенство $(*)$ принимает вид $5 = a \cdot 2 + b$,

При x = 3 $7 = 3 \cdot a + b$.

Решая систему $\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7, \end{cases}$ получаем a = 2, b = 1.

Итак, $r(x) = 2x + 1$.

Задача №8

Найти, при каких a и b многочлен $f(x) = x^{10} + ax^2 + bx + 1$ делится на $x^2 - 1$.

Решение.

$f(x) = (x^2 - 1)g(x)$.

При x = 1 имеем $f(1) = 0$,

При x = – 1 $f(-1) = 0$, получаем систему

$\begin{cases} 1 + a + b + 1 = 0, \\ 1 + a - b + 1 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a + b = -2, \\ a - b = -2; \end{cases}$ отсюда a = – 2, b = 0.

Задача №9

Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x - 4$ по степеням x – 1, найти значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при x = 1.

Решение.

По формуле Тейлора имеем:

$f(x) = f(1) + \frac{f^{I}(1)}{1!}(x-1) + \frac{f^{II}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{III}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{V}(1)}{5!}(x-1)^5$ - разложение многочлена $f(x)$ по степеням x – 1.

Как видно из формулы, для решения задачи нужно найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при x = 1. Это можно сделать непосредственно, находя производные многочлена $f(x)$, а затем их значения при x = 1.

Но для решения этой задачи можно использовать также и схему Горнера. Запишем разложение многочлена $f(x)$ по степеням (x – 1) с неопределенными коэффициентами:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + c_4(x-1)^4 + c_5(x-1)^5 .$$

Числа $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ равны соответственно остаткам от деления многочленов $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$, $g_5(x)$ на x – 1, где $g_1(x)$ есть частное от деления $f(x)$ на x – 1, $g_2(x)$ есть частное от деления $g_1(x)$ на $x-1$ и т.д. Наконец, $g_5(x)$ есть частное от деления $g_4(x)$ на x – 1.

Все решения можно записать в схему:

	1	3	0	0	2	-4
1	1	4	4	4	6	2
1	1	5	9	13	19	
1	1	6	15	28		
1	1	7	22			
1	1	8				
1	1					

Отсюда $f(1) = 2$, $\frac{f^I(1)}{1!} = 19$, $\frac{f^{II}(1)}{2!} = 28$, $\frac{f^{III}(1)}{3!} = 22$, $\frac{f^{IV}(1)}{4!} = 8$, $\frac{f^V(1)}{5!} = 1$, тогда $f(1) = 2$, $f^I(1) = 19$, $f^{II}(1) = 56$, $f^{III}(1) = 132$, $f^{IV}(1) = 192$, $f^V(1) = 120$.

Подставляем найденные значения в формулу Тейлора, имеем: $f(x) = 2 + 19(x-1) + 28(x-1)^2 + 22(x-1)^3 + 8(x-1)^4 + (x-1)^5$.

Задача №10

Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 25x + 1}{(x+5)^6}$.

Решение.

Разложим числитель $f(x) = x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 25x + 1$ по степеням x + 5 по формуле Тейлора, используя схему Горнера.

	1	7	4	– 25	1
– 5	1	2	– 6	5	– 24
– 5	1	– 3	9	– 40	
– 5	1	– 8	49		
– 5	1	– 13			
– 5	1				

$$f(x) = (x+5)^4 - 13(x+5)^3 + 49(x+5)^2 - 40(x+5) - 24 .$$

Тогда $\dfrac{f(x)}{(x+5)^6} = \dfrac{(x+5)^4 - 13(x+5)^3 + 49(x+5)^2 - 40(x+5) - 24}{(x+5)^6} =$

$$= \frac{1}{(x+5)^2} - \frac{13}{(x+5)^3} + \frac{49}{(x+5)^4} - \frac{40}{(x+5)^5} - \frac{24}{(x+5)^6}.$$

Задача №11

Вычислить значение многочлена $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x + 6$ при $x = 4{,}99$.

Решение.

Ближайшим целым числом к 4,99 является 5, поэтому сначала разложим многочлен $f(x)$ по степеням x – 5 по формуле Тейлора, используя схему Горнера, а затем подставим значение x = 4,99.

	3	– 5	7	– 1	6
5	3	10	57	284	1426
5	3	25	182	1194	
5	3	40	382		
5	3	55			
5	3				

$f(x) = 3(x-5)^4 + 55(x-5)^3 + 382(x-5)^2 + 1194(x-5) + 1426$;

$f(4{,}99) = 3(4{,}99-5)^4 + 55(4{,}99-5)^3 + 382(4{,}99-5)^2 + 1194(4{,}99-5) + 1426{,}14$

$f(4{,}99) = 3(-0{,}01)^4 + 55(-0{,}01)^3 + 382(-0{,}01)^2 + 1194(-0{,}01) + 1426$;

$f(4{,}99) = 0{,}00000003 - 0{,}000055 + 0{,}0382 - 11{,}94 + 1426 = 1426{,}03820003 -$

$- 11{,}940055 = 1414{,}09814503$

Итак, $f(4{,}99) = 1414{,}09814503$.

1.3. Приводимые и неприводимые многочлены над полем P

Многочлен $f(x)$ степени n ≥ 1 называют приводимым над полем P, если он разлагается над этим полем на произведение двух многочленов меньшей степени и неприводимым над полем P в противном случае.

Один и тот же многочлен может быть приводим над одним полем и неприводимым над другим, например, $x^2 - 3$ над полем действительных чисел приводим, т.к. $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, а над полем рациональных чисел он неприводим.

Многочлены первой степени неприводимы над любым полем.

Всякий многочлен $f(x)$ над полем P степени n ≥ 1 разлагается на произведение неприводимых над этим полем многочленов, причем единственным образом с точностью до порядка следования сомножителей и множителей нулевой степени.

Всякий многочлен степени n ≥ 1 над полем комплексных чисел имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

По теореме Безу многочлен, имеющий корень c, делится на x – c, поэтому всякий многочлен степени n ≥ 2 приводим над полем комплексных чисел.

Над полем C неприводимы лишь многочлены первой степени, поэтому всякий многочлен n-ой степени разлагается над полем C на n линейных множителей.

Если многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень a + bi, то он имеет также корень a – bi, т.е. комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.

Над полем R неприводимыми многочленами являются все многочлены первой степени и часть многочленов второй степени, а именно те, у которых дискриминант меньше нуля.

Над полем рациональных чисел Q существует неприводимые многочлены любой натуральной степени, что следует из критерия Эйзенштейна.

Пусть дан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ с целыми коэффициентами. Если хотя бы одним способом можно подобрать простое число p, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) старший коэффициент a_0 не делится на p;
2) все остальные коэффициенты делятся на p;
3) свободный член a_n, делясь на p, не делится на p^2,

то многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

Например, $f(x) = x^{35} + 2x^{10} - 4x^2 + 22$ неприводим над полем рациональных чисел, т.к. существует p = 2, удовлетворяющее условиям критерия.

Задача №12

Разложить многочлен $f(x) = x^6 - 1$ на неприводимые множители над полем рациональных, действительных и комплексных чисел.

Решение.

1-й способ: Найдем сначала разложение над полем C.

$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1^3 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1)$.

Чтобы разложить многочлен $x^4 + x^2 + 1$ на неприводимые множители над C, найдем его корни. Обозначим $x^2 = y$, тогда $y^2 + y + 1 = 0$.

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

$$y_1 = \frac{-1 + i\sqrt{-3}}{2}, \quad y_2 = \frac{-1 - i\sqrt{-3}}{2},$$

$$x^2 = \frac{-1 + i\sqrt{-3}}{2}, \quad x^2 = \frac{-1 - i\sqrt{-3}}{2}.$$

Чтобы извлечь квадратный корень из числа $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, представим его в тригонометрической форме: $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$.

Тогда $\sqrt{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}$.

При k = 0 получим $x_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При k = 1 получим $x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$;

$\sqrt{\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}$.

При k = 0 получим $x_3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При k = 1 получим $x_4=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Получим, что $x^4+x^2+1=(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Тогда разложение многочлена x^6-1 над полем C имеет вид:

$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Найдем разложение данного многочлена над полем действительных чисел R. Для этого в полученном разложении перемножим множители, соответствующие сопряженным корням. Перемножим третий и шестой множители: $(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})=(x-\frac{1}{2})^2-(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=(x^2-x+1)$.

Аналогично перемножим четвертый и пятый множители:

$$(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(x+\frac{1}{2})^2-(i\frac{\sqrt{3}}{2})^2=x^2+x+1.$$

Отсюда имеем разложение многочлена x^6-1 на неприводимые множители над полем R: $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

Это же разложение имеет многочлен $f(x)=x^6-1$ и над полем рациональных чисел.

2-й способ:

$$x^6-1=(x^3)^2-1^2=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=$$
$$=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$$

$x^2 - x + 1$ над полем R неприводим, т.к. D = 1 – 4 = – 3, D < 0. Значит, $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ – разложение многочлена $x^6 - 1$ на неприводимые множители над полями R и Q. Найдем разложение над полем комплексных чисел.

$x^2 + x + 1 = 0$,

$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$,

$x_1 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $x^2 + x + 1 = (x + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(x + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Аналогично, $x^2 - x + 1 = (x - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(x - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Итак, $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x + \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(x + \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(x - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})(x - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Задача №13

Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 10$ на неприводимые множители над полями C, R, Q.

Решение.

1-й способ: Чтобы найти разложение многочлена над полем C, найдем его корни. Для этого извлечем корень четвертой степени из – 10.

$$\sqrt[4]{-10} = \sqrt[4]{10(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{10}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, 3, получим четыре корня:

$x_1 = \sqrt[4]{10}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $x_2 = \sqrt[4]{10}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2})$,

$x_3 = \sqrt[4]{10}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $x_4 = \sqrt[4]{10}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

Теперь можно записать разложение многочлена $f(x) = x^4 + 10$ над полем C:

$$x^4 + 10 = (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}).$$

Перемножая первый и четвертый множители, а затем второй и третий, получим разложение многочлена $f(x)$ над полем R:

$$(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) = (x - \frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 = x^2 - \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10}$$

$$(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}) = (x + \frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 - (i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})^2 = x^2 + \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10}$$

$$x^4 + 10 = (x^2 - \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10})(x^2 + \sqrt[4]{40}x + \sqrt{10}).$$

Над полем рациональных чисел Q данный многочлен неприводим, так как существует p = 2 (или 5), на которое первый коэффициент 1 не делится, все

остальные коэффициенты делятся, а свободный член 10, делясь на 2, не делится на 2^2 (критерий Эйзенштейна).

2-й способ:

$$x^4+10=x^4+2\sqrt{10}x^2+10-2\sqrt{10}x^2=(x^2+\sqrt{10})^2-\sqrt{40}x^2=$$

$$=(x^2+\sqrt{10})^2-(\sqrt[4]{40}x)^2=(x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10})(x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}).$$

$x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}=0$, $D=\sqrt{40}-4\sqrt{10}=2\sqrt{10}-4\sqrt{10}=-2\sqrt{10}$, $D<0$,

$x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}=0$, $D<0$, поэтому эти многочлены неприводимы над R.

$x^4+10=(x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10})(x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10})$ – разложение многочлена над R.

x^4+10 над Q неприводим по критерию Эйзенштейна.

Найдем разложение над полем C:

$$x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}=0,\quad x_{1,2}=\frac{-\sqrt[4]{40}\pm\sqrt{-\sqrt{40}}}{2}=\frac{-\sqrt[4]{40}\pm\sqrt[4]{40}i}{2}.$$

$$x^2+\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}=(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}).$$

Аналогично, найдем разложение:

$$x^2-\sqrt[4]{40}x+\sqrt{10}=(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2}).$$

Итак,

$$x^4+10=(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x+\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}+i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})(x-\frac{\sqrt[4]{40}}{2}-i\frac{\sqrt[4]{40}}{2})$$ - разложение над полем C.

Задача №14

Выяснить, какие из многочленов неприводимы над полем Q.

$2x^5+6x^4-12x+66$;

x^3+15;

x^3+1;

x^2+x+3;

$3x^3-10x-4$.

Решение.

Многочлены $2x^5+6x^4-12x+66$, x^3+15 неприводимы над полем Q, т.к. существует простое число p = 3, удовлетворяющее условиям критерия Эйзенштейна.

Многочлены x^3+1, x^2+x+3, $3x^3-10x-4$ не удовлетворяют условиям критерия Эйзенштейна.

Вопрос о приводимости и неприводимости над Q решается в каждом случае индивидуально.

Многочлен x^3+1 приводим над Q, т.к. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

Многочлен x^2+x+3 неприводим на R, т.к. $D<0$, а, значит, x^2+x+3 неприводим и над Q.

Многочлен $3x^3 - 10x - 4$ приводим над полем Q, т.к. имеет рациональный корень $c = 2$, а, значит, делится на $x - 2$.

$3x^3 - 10x - 4 = (x - 2)(3x^2 + 6x + 2)$.

Задача №15

Привести примеры многочленов степени n, неприводимых над Q.

1) n = 4; 2) n = 10; 3) n = 135; 4) n = 1000.

Решение.

Воспользуемся критерием Эйзенштейна. Возьмем любое просто число p. Пусть p = 3, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 6$, тогда многочлен $x^4 + 3x^2 + 6$ искомый для n = 4.

Пусть p = 2, $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a_9 = 0$, $a_{10} = -14$, тогда многочлен $5x^{10} + 4x^9 - 14$ – искомый для n = 10.

Аналогично находим многочлены для n = 135 и n = 1000.

Например, $x^{135} + 2$, $2x^{1000} - 15x^{500} + 10$.

Задача №16

Зная, что $1 - 2i$ является корнем многочлена $f(x) = 2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 5$, найти остальные его корни.

Решение.

Т.к. $f(x)$ есть многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем $1 - 2i$ он имеет корень $1 + 2i$. Следовательно, многочлен $f(x)$ делится на $(x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i) = x^2 - 2x + 5$. Разделив $f(x)$ на $x^2 - 2x + 5$, получим $2x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 5 = (x^2 - 2x + 5)(2x^2 - 3x + 1)$. Отсюда видно, что два других корня многочлена $f(x)$ есть корни уравнения $2x^2 - 3x + 1 = 0$, т.е. равны числам 1 и $\frac{1}{2}$.

Задача №17

Построить многочлены наименьшей степени над полями C и R со старшим коэффициентом $a_0 = 2$, имеющие следующие корни: – 1 двукратный, 3 – i простой корень.

Решение.

1-й способ: Если c – корень $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x - c$. Следовательно, искомый многочлен должен делиться на $(x + 1)^2$ и на $(x - 3 + i)$, а так как он должен иметь наименьшую степень и $a_0 = 2$, то $f(x) = 2(x + 1)^2(x - 3 + i) = 2x^3 - (2 - 2i)x^2 - (10 - 4i)x - (6 - 2i)$.

2-й способ: Для решения задачи можно воспользоваться формулами Виета, которые выражают связь между корнями и коэффициентами многочлена.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, причем $a_0 \neq 0$ и a_1, a_2, …, a_n – корни многочлена, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность.

Тогда $a_1 + a_2 + ... + a_n = -\frac{a_1}{a_0}$,

$a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_1a_n + a_2a_3 + .. + a_{n-1}a_n = \frac{a_2}{a_0}$,

$a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n = -\frac{a_3}{a_0}$,

……

$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$.

Подставив вместо a_1, a_2, a_3 соответственно числа – 1, – 1, 3 – i, и учитывая, что $a_0 = 2$, получим:

$-1 - 1 + 3 - i = -\frac{a_1}{2}$,

$1 + (-3 + i) = (-3 + i) = \frac{a_2}{2}$,

$3 - i = -\frac{a_3}{2}$.

Отсюда $a_1 = -2 + 2i$, $a_2 = -10 + 4i$, $a_3 = -6 + 2i$

$f(x) = 2x^3 - (2 - 2i)x^2 - (10 - 4i)x - (6 - 2i)$.

Найдем многочлен над полем R.

Решение.

Так как комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены, то наряду с корнем $3 - i$ искомый многочлен $f(x)$ должен иметь корень $3 + i$. Так как нужно построить многочлен наименьшей степени с корнями – 1, – 1, $3 + i$, $3 - i$, то можно сделать вывод, что $f(x)$ имеет четвертую степень. Найдем этот многочлен двумя способами.

1-й способ:

$f(x) = 2(x-1)^2(x-3+i)(x-3-i) = 2(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 6x + 10) =$

$= 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 28x + 20.$

2-й способ: Воспользуемся формулой Виета:

$(-1) + (-1) + 3 + i + 3 - i = -\frac{a_1}{2}$, отсюда $a_1 = -8$;

$1 - 3 - i - 3 + i - 3 + i - 3 - i + 10 = \frac{a_2}{2}$, $a_2 = -2$;

$(3 + i) + (3 - i) - 10 - 10 = -\frac{a_3}{2}$, $a_3 = 28$;

$(-1)(-1)(3+i)(3-i)=\frac{a_4}{2}$, $a_4=20$

$f(x)=2x^4-8x^3-2x^2+28x+20.$

Задача №18

Найти рациональные корни многочлена

$f(x)=8x^5-14x_4-77x^3+128x^2+45x-18$.

Решение.

Для того чтобы найти рациональные корни многочлена, пользуются следующими теоремами.

Теорема 1. Если несократимая дробь $\frac{p}{g}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то p есть делитель свободного члена, а g – делитель старшего коэффициента многочлена $f(x)$.

Замечание: Теорема 1 дает необходимое условие для того, чтобы рациональное число $\frac{p}{g}$ было корнем многочлена. Если $\frac{p}{g}$ такова, что p – делитель свободного члена, а g – положительный делитель старшего коэффициента, то не обязательно, что $\frac{p}{g}$ – корень $f(x)$.

Теорема 2. Если несократимая дробь $\frac{p}{g}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то при любом целом m, отличном от $\frac{p}{g}$, число $f(m)$ делится на число p – gm, т.е. $\frac{f(m)}{p-gm}$ – целое число.

В частности, полагая, что m = 1, а затем m = – 1, получим: если $\frac{p}{g}$ корень многочлена, не равный ± 1, то $f(1)\vdots(p-g)$ и $f(-1)\vdots(p+g)$, т.е. $\frac{f(1)}{p-g}$, $\frac{f(-1)}{p+g}$ – целые числа.

Замечание: Теорема 2 дает еще одно необходимое условие для рациональных корней многочлена. Это условие удобно тем, что оно легко проверяется практически. Находим сначала $f(1)$ и $f(-1)$, а затем для каждой испытываемой дроби проверяем указанное условие. Если хотя бы одно из чисел $\frac{f(1)}{p-g}$, $\frac{f(-1)}{p+g}$ дробное, то $\frac{p}{g}$ корнем многочлена $f(x)$ не является.

Решение.

То теореме 1 корни данного многочлена следует искать среди несократимых дробей, числители которых являются делителями 18, а

знаменатели – делителями 8. Следовательно, если несократимая дробь $\frac{p}{g}$ есть корень $f(x)$, то p равно одному из чисел: ± 1, ± 2, ± 3, ±6, ±9, ±18; g равно одному из чисел: ± 1, ± 2, ±4, ± 8.

Учитывая, что $\frac{-p}{-g}=\frac{p}{g}$, $\frac{p}{-g}=\frac{-p}{g}$, знаменатели дробей будем брать лишь положительными.

Итак, рациональными корнями данного многочлена могут быть следующие числа: ± 1, ± 2, ± 3, ±6, ±9, ±18, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm\frac{9}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$, $\pm\frac{3}{8}$, $\pm\frac{9}{8}$.

Воспользуемся вторым необходимым условием.

Так как $f(1)=72$, $f(-1)=120$, отсюда, в частности, следует, что – 1 и 1 не являются корнями $f(x)$. Теперь для каждой возможной дроби $\frac{p}{g}$ будем проверять условием теоремы 2 при m = 1 и m = – 1, т.е. будем устанавливать, целыми или дробными являются числа: $\frac{f(1)}{p-g}=\frac{72}{p-g}$ и $\frac{f(-1)}{p+g}=\frac{120}{p+g}$.

Результаты сведем в таблицу, где буквы «ц» и «д» означают соответственно, целым или дробным является число $\frac{f(1)}{p-g}$ или $\frac{f(-1)}{p+g}$ (см. таблицу 1)

Таблица 1.

p	g	$\frac{72}{p-g}$	$\frac{120}{p+g}$
2	1	ц	ц
-2	1	ц	ц
3	1	ц	ц
-3	1	ц	ц
6	1	д	
-6	1	д	
9	1	ц	ц
-9	1	д	
18	1	д	
-18	1	д	
1	2	ц	ц
-1	2	ц	ц
3	2	ц	ц
-3	2	д	

p	g	$\frac{72}{p-g}$	$\frac{120}{p+g}$
9	2	д	
-9	2	д	
1	4	ц	ц
-1	4	д	
3	4	ц	д
-3	4	д	
9	4	д	
-9	4	д	
1	8	д	
-1	8	ц	д
3	8	д	
-3	8	д	
9	8	ц	д
-9	8	д	

Из полученной таблицы видно, что $\frac{72}{p-g}$ и $\frac{120}{p+g}$ являются целыми лишь в тех случаях, когда $\frac{p}{g}$ равно одному из чисел: 2, – 2, 3, – 3, 9, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$.

По следствию из теоремы Безу число α – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)\vdots(x-\alpha)$. Следовательно, для проверки оставшихся девяти чисел можно применить схему Горнера деления многочлена на двучлен.

	8	– 14	– 77	128	45	– 18
2	8	2	– 73	– 18	9	0
2	8	18	– 37	– 92	– 172≠0	

2 – корень.

Отсюда имеем: x = 2 – простой корень $f(x)$. Остальные корни данного многочлена совпадают с корнями многочлена $f_1(x) = 8x^4 + 2x^3 - 73x^2 - 18x + 9$.

Аналогично проверим остальные числа.

	8	2	– 73	– 18	9
– 2	8	– 14	– 45	72	– 139≠0
3	8	26	5	– 3	0
3	8	50	155	426≠0	
– 3	8	2	– 1	0	
– 3	8	– 22	65≠0		
9	8	74	665≠0		
$\frac{1}{2}$	8	6	2≠0		
$-\frac{1}{2}$	8	– 2	0		
$-\frac{1}{2}$	8	– 6≠0			
$\frac{3}{2}$	8	10≠0			
$\frac{1}{4}$	8	0			

– 2, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ – не корни; 3, –3, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ - корни.

Итак, многочлен $f(x) = 8x^5 - 14x_4 - 77x^3 + 128x^2 + 45x - 18$ имеет пять рациональных корней: $\left\{2,3,-3,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$.

Глава 2. Многочлены от n переменных

Выражение $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, где a любое число из поля P, $x_1, x_2,..., x_n$ – переменные, $k_1, k_2,..., k_n$ – целые неотрицательные числа, называют одночленом от n переменных над полем P.

Суммы конечного числа одночленов указанного вида называют многочленом от n переменных над полем P.

Для обозначения многочленов от $x_1, x_2,..., x_n$ пользуются символами $f(x_1, x_2,..., x_n)$, $\varphi(x_1, x_2,..., x_n)$ и т.п.

Многочлены $f(x_1, x_2,..., x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2,..., x_n)$ называют равными, если для любых $k_1, k_2,..., k_n$ коэффициент при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ многочлена $f(x_1, x_2,..., x_n)$ равен коэффициенту при $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ многочлена $\varphi(x_1, x_2,..., x_n)$.

Суммой двух многочленов от n переменных $f(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} a_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ и $\varphi(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{j=0}^{l} b_j x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ называют многочлен, получающийся в результате приписывания к членам первого многочлена членов второго многочлена с теми же знаками и приведения подобных членов (членов, имеющих одинаковые наборы показателей при переменных).

Чтобы найти произведение двух многочленов, нужно все члены первого многочлена умножить на все члены второго многочлена и привести подобные члены.

Произведением одночленов $a_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ и $b_j x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$ называют одночлен вида $a_i b_j x_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2}...x_n^{k_n+l_n}$.

Число $k_1 + k_2 + ... + k_n$ называют степенью ненулевого одночлена $a_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$. Очевидно степень произведения двух одночленов равна сумме их степеней.

Степенью (по совокупности переменных) ненулевого многочлена называют максимальную из степеней его членов.

Многочлен называют однородным степени *m*, если все его члены имеют степень *m*.

Например, многочлен $f(x_1, x_2,..., x_n) = x_1^3x_2^2 + x_2^5 - x_3x_4^4 + 5x_3^5 - 10x_1x_2x_3x_4^3$ – однородный многочлен пятой степени.

Если $a_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ и $a_j x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$ два одночлена многочлена $f(x_1, x_2,..., x_n)$, то одночлен $a_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ считают выше одночлена $a_j x_1^{l_1}x_2^{l_2}...x_n^{l_n}$, если существует натуральное число s такое, что $k_1 = l_1, k_2 = l_2,..., k_{s-1} = l_{s-1}, k_s > l_s$.

Любые два одночлена сравнимы по высоте.

При записи многочлена от *n* переменных принято располагать его одночлены по высоте. Такое расположение членов многочлена называют лексикографическим.

Задача №19

Расположить лексикографически члены многочлена:

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 - 5x_1 x_2 x_3^3 + 6x_1^2 x_3 - 30x_1 x_2^5 x_3 - 7x_1^4 x_2^2 x_3 + 2x_1 - 5$.

Решение.

$f(x_1, x_2, x_3) = -7x_1^4 x_2^2 x_3 + 3x_1^2 x_2 + 6x_1^2 x_3 - 30x_1 x_2^5 x_3 - 5x_1 x_2 x_3^3 + 2x_1 - 5$.

Многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют симметричным, если он не изменится при любой перестановке входящих в него переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

При этом многочлены:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n$,

$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n$,

$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n$,

……..

$\sigma_n = x_1 x_2 ... x_n$.

называются основными симметрическими многочленами от *n* переменных.

Основная теорема теории симметрических многочленов заключается в том, что всякий симметрический многочлен от *n* переменных над полем P может быть единственным образом представлен в виде многочлена от основных симметрических многочленов с коэффициентами из поля P, т.е. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$.

Уравнение от одной переменной $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n = 0$ (1) и система *n* уравнений от *n* переменных

$x_1 + x_2 + ... + x_n = -a_1$,

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n = a_2$,

$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_3$,

……..

$x_1 x_2 x_3 ... x_n = (-1)^n a_n$. (2)

связаны между собой следующим образом. Если числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ – корни уравнения (1), то любая перестановка этих чисел является решением системы (2), т.е. система (2) имеет *n* решений, одним из которых будет $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ и обратно, если $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ одно из решений системы (2), то числа $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n$ являются корнями уравнения (1).

Задача №20

Выразить многочлен

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3$

через основные симметрические многочлены.

Решение.

Данный симметрический многочлен является однородным многочленом третьей степени. Его высший член равен x_1^3. Ему соответствует система показателей 3 0 0 $x_1^3 x_2^0 x_3^0$.

Составим многочлен $\varphi_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$, высший член которого совпадает с высшим членом $f(x_1, x_2, x_3)$.

$$\varphi_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 =$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3$$

Найдем разность

$$f(x_1, x_2, x_n) - \varphi_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n) = -2x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 - 2x_1^2x_3 - 2x_1x_3^2 - 2x_2^2x_3 - 2x_2x_3^2 - 5x_1x_2x_3$$

Обозначим полученный многочлен через $f_1(x_1, x_2, x_3)$. Высший член полученного многочлена равен $-2x_1^2x_2$. Ему соответствует система показателей 2 1 0 $x_1^2 x_2^1 x_3^0$.

Составим многочлен $\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -2\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = -2\sigma_1\sigma_2$, высший член которого совпадает с высшим членом многочлена $f_1(x_1, x_2, x_3)$.

$$\varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -2\sigma_1\sigma_2 = -2(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$
$$= -2(x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + 3x_1x_2x_3).$$

Найдем разность $f_1(x_1, x_2, x_3) - \varphi_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = x_1x_2x_3 = \sigma_3$. Отсюда следует, что $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$.

В случае, когда данный многочлен является однородным, эту задачу можно решить проще.

Учитывая все возможные члены симметрических многочленов f_k, получающихся согласно доказательству теоремы, составим таблицу (см. таблицу 2)

Таблица 2.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$x_1^3 x_2^0 x_3^0$	$\varphi_1 = \sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$
2 1 0	$ax_1^2 x_2^1 x_3^0$	$\varphi_2 = a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bx_1x_2x_3$	$\varphi_3 = b\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = b\sigma_3$

Обращаем внимание на то обстоятельство, что система показателей k_1, k_2, k_3 каждого высшего члена должна удовлетворять условию $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, и в то же время сумма $k_1 + k_2 + k_3$ должна равняться трем. Кроме того, каждая следующая система показателей должна соответствовать члену меньшей высоты.

Из приведенной таблицы получаем, что $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$, где a и b пока неопределенные коэффициенты. Определим их, подставляя в

последнее тождество вместо x_1, x_2, x_3 некоторые числовые значения (см. таблицу 3)

Таблица 3.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	0	2	1	0	4
1	1	1	3	3	1	10

Получаем систему уравнений относительно неизвестных a и b:

$$\begin{cases} 8 + 2a = 4, \\ 27 + 9a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -4, \\ 9a + b = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Итак, $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3$.

Задача №21

Вычислить значение симметрического многочлена

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_3^3 + x_2^3 x_3^3$, если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0$.

Решение.

Воспользуемся следующим утверждением: если $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни уравнения *n*-ой степени $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$, то имеют место соотношения:

$x_1 + x_2 + \ldots x_n = -a_1$,

$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}xn = a_2$,

……

$x_1x_2x_3 \ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n a_n$.

(формулы Виета для алгебраического уравнения n-ой степени).

Следовательно, для решения данной задачи достаточно выразить многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ через основные симметрические многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Для этого составим таблицу (таблица 4):

Таблица 4.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 3 0	$x_1^3 x_2^3 x_3^0$	$\varphi_1 = \sigma_2^3$
3 2 1	$a x_1^3 x_2^2 x_3^1$	$\varphi_2 = a\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2 2 2	$b x_1^2 x_2^2 x_3^2$	$\varphi_3 = b\sigma_3^2$

Из приведенной таблицы получается, что $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_2^3 + a\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + b\sigma_3^2$.

Определим коэффициенты a и b (вычисления оформим в таблицу 5):

Таблица 5.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	3
1	1	– 2	0	– 3	– 2	– 15

$$\begin{cases} 27+9a+b=3, \\ -27-4=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+b=-24, \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$$

Итак, $x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_2^3x_3^3=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2$.

Применяя формулы Виета для нашего случая, имеем:

$\sigma_1=x_1+x_2+x_3=2$,

$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$,

$\sigma_3=x_1x_2x_3=2$.

Подставляя найденные значения для $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ в $f(x_1,x_2,x_3)=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2$ получим: $(-2)^3-3\cdot2\cdot(-2)\cdot2+3\cdot2^2=28$.

Задача №22

Найти сумму кубов корней уравнения $2x^4-6x^3+3x^2-2x+1=0$.

Обозначим корни уравнения через x_1,x_2,x_3,x_4. Нам требуется найти $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$, не находя самих корней x_1,x_2,x_3,x_4. По формулам Виета найдем значения основных симметрических многочленов от корней данного уравнения. При $a_0\neq1$ формулы Виета принимают вид:

$x_1+x_2+\ldots x_n=-a_1$,

$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_2$,

……

$x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n=(-1)^na_n$.

В нашем случае $\sigma_1=3$, $\sigma_2=\frac{3}{2}$, $\sigma_3=1$, $\sigma_4=-\frac{1}{2}$.

Для решения задачи достаточно симметрический многочлен $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$ выразить через $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$. Процесс вычисления оформим в таблицу 6.

Таблица 6.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0 0	$x_1^3x_2^0x_3^0x_4^0$	σ_1^3
2 1 0 0	$ax_1^2x_2^1x_3^0x_4^0$	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1 0	$bx_1^1x_2^1x_3^1x_4^0$	$b\sigma_3$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$.

Определим коэффициенты a и b (см. таблицу 7):

Таблица 7.

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	3	3	1	0	3
1	1	1	1	4	6	4	1	4

$$\begin{cases} 27+9a+b=3, \\ 64+24a+4b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+b=-24, \\ 6a+b=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$$

Итак, $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

Подставляя значения $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ получим: сумма кубов корней данного уравнения равна:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=3^3-3\cdot 3\cdot\frac{3}{2}+3\cdot 1=\frac{33}{2}.$$

Задача №23

Разложить многочлен $f(x,y,z)=2(x^3+y^3+z^3)+x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+yz^2-3xyz$ на множители.

Решение.

Этот многочлен является однородным третьей степени с высшим членом $2x^3$. Представим этот многочлен через основные симметрические многочлены (см. таблицу 8):

Таблица 8.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$2x^3y^0z^0$	$2\sigma_1^3$
2 1 0	ax^2y	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bxyz$	$b\sigma_3$

$$f(x,y,z)=2\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$$

Найдем коэффициенты a и b (вычисления занесем в таблицу 9):

Таблица 9.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	9
1	1	0	2	1	0	6

$$\begin{cases} 54+9a+b=9, \\ 16+2a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5, \\ b=0. \end{cases}$$

Итак,

$$f(x,y,z) = 2\sigma_1^3 - 5\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1(2\sigma_1^2 - 5\sigma_2) = (x+y+z)(2(x+y+z)^2 - 5(xxy + xz + yz)) =$$
$$= (x+y+z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy - xz - yz).$$

Задача №24

Доказать, что при $x + y + z = 0$ справедливо тождество:

$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)^2$.

Решение.

Левая и правая части равенства являются однородными симметрическими многочленами. Представим их в виде многочлена от основных симметрических многочленов (см. таблицу 10).

$f_1(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$

Таблица 10.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
4 0 0	$x^4y^0z^0$	σ_1^4
3 1 0	$ax^3y^1z^0$	$a\sigma_1^2\sigma_2$
2 2 0	$bx^2y^2z^0$	$b\sigma_2^2$
2 1 1	$cx^2y^1z^1$	$c\sigma_1\sigma_3$

$f_1(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 + a\sigma_1^2\sigma_2 + b\sigma_2^2 + c\sigma_1\sigma_3$.

Найдем a, b, c (см. таблицу 11).

Таблица 11.

x	y	z	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	-2	0	-3	-2	18
1	1	0	2	1	0	2
1	1	1	3	3	1	3

$$\begin{cases} 9b = 18, \\ 16 + 4a + b = 2, \\ 81 + 27a + 9b + 3c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2, \\ a = -4, \\ c = 4. \end{cases}$$

$x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$.

$f_2(x,y,z) = (xy + xz + yz)^2 = \sigma_2^2$.

Учитывая условие $x + y + z = 0$, т.е. $\sigma_1 = 0$, получим $2\sigma_2^2 = 2\sigma_2^2$.

Таким образом, доказываемое равенство является тождеством.

Задача №25

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение.

Левые части уравнений в системе являются симметрическими многочленами от трех переменных. Выразим их через основные симметрические многочлены (таблица 12, 13).

$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

$f_2 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3$.

Таблица 12.

Система показателей	Высшие члены	Соответствующая комбинация основных симметрических многочленов
3 0 0	$x_1^3x_2^0x_3^0$	σ_1^3
2 1 0	$ax_1^2x_2^1x_3^0$	$a\sigma_1\sigma_2$
1 1 1	$bx_1^1x_2^1x_3^1$	$b\sigma_3$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$.

Таблица 13.

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	2
1	1	0	2	1	0	2

$$\begin{cases} 27 + 9a + b = 2, \\ 8 + 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ b = 2. \end{cases}$$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3$.

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \sigma_2$.

Получаем систему вида $\begin{cases} \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_3 = -4, \\ \sigma_2 = -3. \end{cases}$

$\sigma_2 = -3$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -2$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3, \\ x_1x_2x_3 = -2. \end{cases}$$

Составим уравнение третьей степени: $x^3 - 3x + 2 = 0$. Найдем его корни: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$. Тогда одним из решений является (1, 1, – 2), другие представляют из себя перестановки этих чисел, но так как уравнение имеет два

равных корня, то система имеет только три различных решения: (1, 1, – 2), (– 2, 1, 1), (1, – 2, 1).

Глава 3. Материалы для практических занятий

В задачах 1 – 10 разделить с остатком многочлен $f(x)$ на $\varphi(x)$:

1. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$, $\varphi(x) = x^2 + 3x + 1$.
2. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.
3. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1$, $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 24$.
4. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6$, $\varphi(x) = x^2 - 3x - 1$.
5. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 6$, $\varphi(x) = x^2 - 3x + 1$.
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $\varphi(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
7. $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - x^2 + 7x + 3$, $\varphi(x) = x^2 + x - 1$.
8. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1$, $\varphi(x) = x^2 + (3 - i)x - (4 + 3i)$.
9. $f(x) = (10+5i)x^4 - (15+5i)x^2 + (10+30i)x + (10-5i)$, $\varphi(x) = (2 + i)x^2 - 3x + i$.
10. $f(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + x^3 - ix^2 - 1$, $\varphi(x) = x^4 - ix^3 - (1 - i)x^2 - x + 1$.

В задачах 11 – 20 найти необходимые и достаточные условия делимости многочлена $f(x)$ на $\varphi(x)$:

11. $f(x) = x^3 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.
12. $f(x) = x^3 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 - 1$.
13. $f(x) = x^3 - ax + b$, $\varphi(x) = x^2 - 3x + 2$.
14. $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 3$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.
15. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 1$, $\varphi(x) = x^2 - 1$.
16. $f(x) = x^3 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 + mx + 1$.
17. $f(x) = x^4 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 + mx + 1$.
18. $f(x) = x^5 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 + mx + 1$.
19. $f(x) = x^3 + ax + b$, $\varphi(x) = x^2 - m$.
20. $f(x) = x^4 + ax^2 + bx + 3$, $\varphi(x) = x^2 + m$.

В задачах 21 – 30 найти наибольший делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ с помощью алгоритма Евклида:

21. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $\varphi(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
22. $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $\varphi(x) = x^5 + x^2 - x + 1$.
23. $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 2$, $\varphi(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$.
24. $f(x) = x^4 + x^3 - 4x + 5$, $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 2$.

25. $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $\varphi(x) = 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.

26. $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

27. $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $\varphi(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$.

28. $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, $\varphi(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

29. $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 3$, $\varphi(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 2$.

30. $f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$, $\varphi(x) = x^5 + x^2 - x + 1$.

В задачах 31 – 40, пользуясь алгоритмом Евклида, найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = d(x)$, где $d(x)$ – наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$:

31. $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $\varphi(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$.

32. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x = -3$, $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

33. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, $\varphi(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$.

34. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

35. $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $\varphi(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$.

36. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $\varphi(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

37. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $\varphi(x) = x^2 - x + 1$.

38. $f(x) = x^5 + .3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $\varphi(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

39. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

40. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $\varphi(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.

В заданиях 41–50, пользуясь схемой Горнера, разделить многочлен $f(x)$ на линейный двучлен $x - c$ и найти значение многочлена $f(x)$ при $x = c$:

41. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $c = 1$.

42. $f(x) = 2x^5 - 5x^3 + 8x$, $c = -3$.

43. $f(x) = 3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$, $c = 2$.

44. $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x + 5$, $c = -2$.

45. $f(x) = x^5$, $c = 1$.

46. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$.

47. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $c = 2$.

48. $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$, $c = -i$.

49. $f(x) = x^4 + (3-8i)x^3 - (21+18i)x^2 - (33-20i)x + 7 + 18i$, $c = -1 + 2i$.

50. $f(x) = x^5 + (1-2i)x^4 - (3+i)x^2 + 7i$, $c = -1 + 2i$.

В задачах 51 – 55 найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $\varphi(x)$, не применяя теорему о делении с остатком:

51. $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$, $\varphi(x) = x^2 - 1$.

52. $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$, $\varphi(x) = x^2 + 1$.

53. $f(x) = x^{105} + x + 1$, $\varphi(x) = x^2 - 1$.

54. $f(x) = x^{99} - 3x^{89} + x^2 + 1$, $\varphi(x) = x^2 - 4x + 3$.

55. $f(x) = x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$, $\varphi(x) = x^2 + x - 2$.

56. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-2$ и $x-3$ дает соответственно остатки 5 и 7. Найти остаток от деления этого многочлена на $(x-2)(x-3)$.

57. При делении $f(x)$ на $x-1$, $x-2$ и $x+1$ остатки соответственно равны 3, 15 и 0. Найти остаток от деления $f(x)$ на x^3+2x^2-x+2.

58. Многочлен $f(x)$ при делении на $x-1$, $x-2$, $x-3$ и на $x-4$ дает соответственно остатки 1, 3, 5 и 6. Найти остаток при делении этого многочлена на произведение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

59. Найти при каких значения a многочлен $f(x)=x^5-ax^2-ax+1$ делится на $(x+1)^2$.

60. При каких значения a и b многочлен $f(x)=x^3+ax^2+bx+ab$ при делении на $x-2$ дает остаток 15, а при делении на $x+1$ – остаток 0?

В задачах 61 – 70 найти кратность корня x_0 для многочлена $f(x)$.

61. $f(x)=x^5-8x^4+25x^3-38x^2+28x-8$, $x_0=2$.

62. $f(x)=2x^4+17x^3+45x^2+27x-27$, $x_0=-3$.

63. $f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$, $x_0=-\frac{1}{2}$.

64. $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$, $x_0=-2$.

65. $f(x)=x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12$, $x_0=1$.

66. $f(x)=x^6+9x^5+30x^4+40x^3-48x-32$, $x_0=-2$.

67. $f(x)=2x^5-13x^4+26x^3-24x^2+24x-9$, $x_0=3$.

68. $f(x)=x^6+7x^5+17x^4+13x^3-10x^2-20x-8$, $x_0=-2$.

69. $f(x)=x^5-5x^4+4x^3+4x^2+23+9$, $x_0=3$.

70. $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$, $x_0=-1$.

В задачах 71 – 80, пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-c$. Найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x=c$.

71. $f(x)=x^4+3x^3-4x^2+6x-5$, $c=-2$.

72. $f(x)=3x^4+8x^3-2x^2+6x-5$, $c=-3$.

73. $f(x)=x^4-4x^3+6x^2+2x+8$, $c=2$.

74. $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$, $c=2$.

75. $f(x)=x^4+9x^3+27x^2+32x+13$, $c=-3$.

76. $f(x)=2x^4+3x^3+3x-4$, $c=-2$.

77. $f(x)=x^3+5x^2-7x-3$, $c=4$.

78. $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10$, $c=-1$.

79. $f(x)=x^4+2x^3-9x^2-7$, $c=3$.

80. $f(x)=2x^4+13x^3+35x^2+54x+39$, $c=-2$.

В задачах 81 – 90 разложить на простейшие дроби данные рациональные дроби:

81. $\dfrac{2x^4-5x+1}{(x-2)^5}$.

82. $\dfrac{3x^4+8x^3-2x^2+6x-5}{(x+3)^5}$.

83. $\dfrac{5x^4-x^2+x+5}{(x+1)^4}$.

84. $\dfrac{3x^6-2x^2+5x-1}{(x-1)^{10}}$.

85. $\dfrac{2x^5-x^3+2x+10}{(x-3)^7}$.

86. $\dfrac{x^4+7x^3+4x^2-25x+1}{(x+5)^6}$.

87. $\dfrac{4x^3-2x^2+x-1}{(x-2)^4}$.

88. $\dfrac{x^5+2x^2-x-7}{(x+2)^5}$.

89. $\dfrac{x^5+2x^4-x^3+x-5}{(x+4)^6}$.

90. $\dfrac{x^3-21x^2+10x-8}{(x+5)^5}$.

В задачах 91 – 100 разложить многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ на неприводимые множители над полем действительных чисел:

91. $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, $\varphi(x)=x^6-1$.
92. $f(x)=x^4+4x^3+4x^2-1$, $\varphi(x)=x^4+4$.
93. $f(x)=x^4-10x^2+1$, $\varphi(x)=x^4-1$.
94. $f(x)=x^4-18x^2+81$, $\varphi(x)=x^3+8$.
95. $f(x)=x^4+2x^3-2x-1$, $\varphi(x)=x^6+1$.
96. $f(x)=x^4+4x^2-5$, $\varphi(x)=x^4+64$.
97. $f(x)=x^4+x^2+1$, $\varphi(x)=x^3+x+2$.
98. $f(x)=2x^4+x^3+4x^2+x+2$, $\varphi(x)=x^{12}-1$.
99. $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+6x-12$, $\varphi(x)=x^3+27$.
100. $f(x)=x^4+2x^3+3x^2+2x-3$, $\varphi(x)=x^3-27$.

В задачах 101 – 110 разложить многочлены на неприводимые множители над полями комплексных, действительных и рациональных чисел:

101. $f(x)=x^4+2$.
102. $f(x)=x^4+6$.
103. $f(x)=x^4+5$.
104. $f(x)=x^4+16$.
105. $f(x)=x^6-64$.
106. $f(x)=x^4+3$.
107. $f(x)=x^6+64$.
108. $f(x)=x^8-256$.
109. $f(x)=x^4+7$.
110. $f(x)=x^6-729$.

В задачах 111 – 120 доказать неприводимость многочленов над полем рациональных чисел:

111. $f(x)=x^5+3x^3-12x^2+30x+21$, $\varphi(x)=x^3+3x+1$.
112. $f(x)=3x^4-7x^3+21x^2+35$, $\varphi(x)=2x^2-x+4$.
113. $f(x)=5x^6-2x^2+16x+2$, $\varphi(x)=x^3-x+22$.
114. $f(x)=2x^3+5x^2-10x+55$, $\varphi(x)=x^2+3x+2$.
115. $f(x)=x^6+8x^4+2x^3-10x-34$, $\varphi(x)=x^2+5x+3$.
116. $f(x)=8x^8+11x^5-11x^4+33x-55$, $\varphi(x)=x^3+2x+4$.

117. $f(x) = x^5 + 3x^4 - 15x^2 + 33x + 12$, $\varphi(x) = x^2 - 2x + 5$.

118. $f(x) = 3x^8 + 2x^5 - 14x^2 - 20x - 30$, $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

119. $f(x) = x^7 + 5x^3 - 10x^2 - 30x + 5$, $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

120. $f(x) = 25x^6 + 2x^5 + 20x - 6$, $\varphi(x) = x^2 - 4x + 5$.

В задачах 121 – 130 привести примеры неприводимых многочленов степени *n* и *m* над полем рациональных чисел:

121. n = 15, m = 201.
122. n = 4, m = 103.
123. n = 7, m = 1025.
124. n = 10, m = 3000.
125. n = 8, m = 287.
126. n = 5, m = 1386.
127. n = 15, m = 852.
128. n = 11, m = 3000.
129. n = 20, m = 350.
130. n = 17, m = 1200.

В задачах 131 – 140 построить многочлены наименьшей степени над полями C и R, имеющие старший коэффициент a_0 и корни:

131. 3 и 2 – i – простые, a_0 = 2.
132. 2 – 3i – простой, 1 – двойной, a_0 = 1.
133. 3, 1, –2i – простые, a_0 = 4.
134. – 1 – i – простой, 2 – двойной, a_0 = 2.
135. 1 + i – простой, – 1 – двойной, a_0 = 4.
136. 2, 3, 1 + i – простые, a_0 = 2.
137. 2i, 1, 5 – простые, a_0 = 1.
138. – i, – 1, 4 – простые, a_0 = 1.
139. 2 – i – простой, – 1 – простой, a_0 = 3.
140. 2, – 3, – 1+i – простые, a_0 = 1.

В задачах 141 – 150 найти корни многочлена $f(x)$, зная, что α один из его корней:

141. $f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 7x + 30$, $\alpha = 1 - 2i$.

142. $f(x) = x^5 - 10x^4 + 43x^3 - 112x^2 + 222x - 312$, $\alpha = 3 - 2i$.

143. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x$, $\alpha = 1 - i$.

144. $f(x) = x^5 - 6x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 99x - 54$, $\alpha = -3i$.

145. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 38x^2 - 39x$, $\alpha = 2 - 3i$.

146. $f(x) = x^5 - 13x^4 + 67x^3 - 71x^2 - 284x + 492$, $\alpha = 5 - 4i$.

147. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 19x^2 - 60x$, $\alpha = 1 - 2i$.

148. $f(x) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 46x^2 - 90x + 72$, $\alpha = 1 - i$.

149. $f(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 86x^2 + 73x + 150$, $\alpha = -4 + 3i$.

150. $f(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - 49x^2 + 58x + 104$, $\alpha = -2 - 3i$.

В задачах 151 – 160 найти рациональные корни многочленов:

151. $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

152. $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.

153. $f(x) = 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6$.

154. $f(x) = 2x^4 - 13x^3 + 36x^2 - 43x + 14$.

155. $f(x) = 6x^4 + 11x^3 21x^2 - 6x - 4$.

156. $f(x) = x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

157. $f(x) = 4x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 4x + 5$.

158. $f(x) = 3x^5 + 17x^4 + 36x^3 38x^2 + 19x + 5$.

159. $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

160. $f(x) = 8x^5 + 2x^4 - 13x^3 - x^2 + 5x - 1$.

В задачах 161 – 170 найти сумму и разность многочленов $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$:

161. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 x_2 - x_1^3 + 4x_1 x_2^2 + x_3^3 - 5$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + 4x_3 x_1^2 - 4$.

162. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2^2 + 2x_1^4 x_3 - 5x_1^2 - 7x_1 x_2^3 + x_2 x_3 + 5$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 x_2^2 + 3x_1^4 x_3 + 2x_1^2 - 5x_2 + 3$.

163. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^5 - 2x_1^4 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 - 7x_2^2 x_3^2 + 3$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^5 + 3x_1 x_2^2 - x_1^3 x_2 + x_3^2 - 3x_2^2 x_3^2 + 4$.

164. $f(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 x_3 + 2x_2^2 - 5x_1 x_2^2 + 5$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^3 - 4x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + 4x_1^2 x_2^2 + x_3^2$.

165. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 + x_1^2 x_2^2 + 3x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1^3 x_2^2 - 3x_3^2$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 - 10x_1^3 x_2^2 - x_1^3 + 3x_3^2 - 7$.

166. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 + x_1^2 x_2^2 - x_3^2 + 5x_1 x_2^2 - 7$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 - 3x_1^3 x_2 + 17x_2^2 - 13x_1 + 3$.

167. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2 x_3^4 + 2x_1 x_2^2 x_3 + 7$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2^3 - 3x_1 x_2^2 x_3 + 5x_1 x_2^2$.

168. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 - \frac{1}{2}x_1^2 x_2^3 - 4x_1 x_2^3 + 15x_1^3 x_2$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 x_3^2 - 4x_1 x_2^2 x_3 + 5$.

169. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 - 3x_1 x_2^2 + 5x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3^2$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^3 + 7x_1 x_2 x_3 - 2x_1 x_3^2 + 3$.

170. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3^2 - 2x_1^3 x_2 + 3$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_3 - 4x_1 x_2 x_3^2 + \frac{1}{2}x_1^3 x_2^2 + x_2^3$.

В задачах 171 – 180 найти произведение, степень и высший член произведения многочленов:

171. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_3 - 5x_3^2 + 1$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 7x_1^2 x_2$.

172. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 4x_1^2 x_2 + 15x_3$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_1^3 x_2 + 5x_1 x_3$.

173. $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 + 2x_1^2 x_2^2 - 7$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1 x_3^2 + 5x_2$.

174. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3 - 2x_1 x_2^2 + 2x_1^3$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 x_3 + x_1^3 x_2 + 2$.

175. $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 x_3 + 3x_1 x_2 x_3^2 - 7$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^3 x_2 x_3 + 2x_1 x_2^5 + 4x_1^3$.

176. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_3^5 - 6x_1^5 x_2 x_3 - 5$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 x_2^4 x_3^8 - 3x_1 x_2^3 x_3$.

177. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 4x_1 x_2 x_3^6 - 3x_1^3 x_2$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2^2 x_3^7 - 5x_1^5 x_2 + 2$.

178. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2^3 x_3 + 4x_1^6 x_2 - 7x_1^6$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2 x_3^5 + 3x_1 x_2^3 + 2$.

179. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^3 x_3 - 2x_1 x_2^8 + 2x_1^5 x_2$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1 x_2^3 - x_1^3 x_2^2$.

180. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3 - 2x_1 x_2^2 + 2x_1^3$,

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 x_3 + x_1^3 x_2 + 2$.

В задачах 181 – 190 расположить лексикографически многочлены:

181. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1^3 x_2 - x_1 x_2^2 x_3 + 10x_3^3 + x_1^4 - 2x_1 x_3^2 + 3x_1^3 x_2^2 + x_4^3 - 2x_1^3 x_4$.

182. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 x_2^3 + 5x_1^3 x_2^5 - 11x_1^3 + 2x_1^3 x_3 x_4 - 7x_1 x_3^3 + 3$.

183. $f(x_1, x_2, x_3) = 13x_1 + 5 - 7x_1^3 x_2^2 + 3x_1 x_2^3 + 10x_1 x_2^{10} - 7x_1^3 x_3$.

184. $f(x_1, x_2, x_3) = 21x_1^2 x_2 - 3x_1^{10} + 2x_1^5 x_8^3 - x_1 x_2^3 + 12x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 - x_2^3$.

185. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3^6 - 11x_1 x_2^6 x_3 + 7x_1 x_2^6 x_3^2 + 3x_1^2 x_2^3 x_3^2 - 2x_2^7 x_3$.

186. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_2^3 x_3 - 2x_1 x_2^6 - 11x_2 x_3^5 + 3x_1 x_2^3 x_3^7 + 7x_1 x_2 x_3^5$.

187. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2^5 x_3 - 7x_2 x_3^6 + 2x_1 x_2^5 x_3^2 - 4x_2 x_3^5 + 5 - 6x_1^3 x_2$.

188. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 x_3^2 - 7x_1^3 x_2 x_3^4 + 11x_2 x_3^6 - 13x_1^3 x_2^2 x_3^5 + 3x_1 x_2^3 + 5$.

189. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_4^5 - 2x_2 x_3^4 x_4^2 + 2x_1 x_2^3 x_3 - 11x_1^2 x_2^5 x_3 + 12x_1^3 x_2 x_4^3 + 1$.

190. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^4 x_2 x_4 - 3x_1 x_2^3 x_3 + 12x_2^3 x_3 x_4^2 + 7x_1^4 x_2^2 x_3 - 13x_1^4 x_2^2 x_3 + 3$.

В задачах 191 – 200 выразить симметрические многочлены через основные симметрические:

191. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_2^2 x_3$.

192. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3$.

193. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 2x_1^2 x_2^2 - 2x_1^2 x_3^2 - 2x_2^2 x_3^2$.

194. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2$.

195. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + x_3)(x_1 x_3 + x_2)(x_2 x_3 + x_1)$.

196. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)$.

197. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)(x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2)(x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2)$.

198. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$.

199. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$.

200. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2^2+x_1^3x_3^2+x_2^3x_1^2+x_3^3x_1^2+x_2^3x_3^2+x_2^2x_3^3$.

В задачах 201 – 205 найти значение симметрического многочлена $f(x_1,x_2,x_3)$ от корней уравнения:

201. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3(x_2+x_3)+x_2^3(x_1+x_3)+x_3^3(x_1+x_2)$,
$x^3-x^2-4x+1=0$.

202. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)+x_2^3(x_1x_3+x_1x_4+x_3x_4)+$
$+x_3^3(x_1x_2+x_1x_4+x_2x_4)+x_4^3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$,
$x^4+x^3-2x^2-3x+1=0$.

203. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4x_2+x_1x_2^4+x_1^4x_3+x_1x_3^4+x_2^4x_3+x_2x_3^4$,
$3x^3-5x^2+1=0$.

204. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3x_2^3+x_1^3x_3^3+x_1^3x_4^3+x_2^3x_3^3+x_2^3x_4^3+x_3^3x_4^3$,
$3x^4-2x^3+2x^2+x-1=0$.

205. $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$,
$3x^3-2x^2+1=0$.

В задачах 206 – 210 найти значение выражения от корней уравнения:

206. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}$,
$x^3-3x+5=0$.

207. $\frac{x_1^2}{(x_2+1)(x_3+1)}+\frac{x_2^2}{(x_1+1)(x_3+1)}+\frac{x_3^2}{(x_1+1)(x_2+1)}$,
$x^3-2x^2+1=0$.

208. $\frac{x_1^2}{(x_1+1)^2}+\frac{x_2^2}{(x_2+1)^2}+\frac{x_3^2}{(x_3+1)^2}$,
$x^3-x^2+3x+1=0$.

209. $x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4+x_2^2x_3^4+x_2^4x_3^2+x_1^4x_3^2+x_1^2x_3^4$,
$2x^3-4x+7=0$.

210. $(x_1^2-x_2x_3)(x_2^2-x_1x_3)(x_3^2-x_1x_2)$,
$x^3+5x^2-x=0$.

В задачах 211 – 215 найти сумму квадратов корней уравнения:

211. $x^3+3x^2-4x+1=0$.

212. $2x^4-x^2+5x-1=0$.

213. $x^3+4x^2+2x-4=0$.

214. $2x^3+5x^2-3x+2=0$.

215. $x^4-x^3+2x+3=0$.

В задачах 216 – 220 найти сумму кубов корней уравнения:

216. $x^3+3x^2-4x+1=0$.

217. $2x^3+6x^2+6x-3=0$.

218. $x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$.
219. $3x^4 - 3x^3 + 2x + 3 = 0$.
220. $x^3 - x^2 + x + 2 = 0$.

В задачах 221 – 230 разложить на множители следующие многочлены:

221. $(x+y)(x+z)(y+z) + xyz$.
222. $2(x^3 + y^3 + z^3) + x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 3xyz$.
223. $x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$.
224. $(x+y+z)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 - (x+y)^4 + x^4 + y^4 + z^4$.
225. $x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + 2xyz(x+y+z) + (x^2 + y^2 + z^2)(xy + xz + yz)$.
226. $(x+y+z)^3 - (y+z-y)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$.
227. $(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2 - (x+y+z)^2(x^2 + y^2 + z^2)$.
228. $10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$.
229. $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.
230. $6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4$.

В задачах 231 – 235 доказать тождество:

231. $(x+y+z)(xy + xz + yz) - xyz = (x+y)(x+z)(y+z)$.
232. $x(y+z)^2 + y(x+z)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz = (y+z)(z+x)(x+y)$.
233. $(xy + xz + yz)^2 + (x^2 - yz)^2 + (y^2 - xz)^2 + (z^2 - xy)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.
234. $xyz(x+y+z)^3 - (yz + xz + xy)^3 = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$.
235. $(x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3 = 24xyz$.

В задачах 236 – 240 доказать тождество при указанных условиях:

236. $x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)$, если $x + y + z = 0$.
237. $xyz = 0$, если $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^3 + y^3 + z^3 = 1$.
238. $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, если $x + y + z = 0$.
239. $x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) = 0$, если $x + y + z = 0$.
240. $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, если $x + y + z = 0$.

В задачах 241 – 250 решить системы уравнений:

241. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

242. $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + xz + yz = 11 \\ (x-y)(x-z)(y-z) = 2. \end{cases}$

243. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = \dfrac{73}{8}, \\ xy + xz + yz = x + y + z, \\ xyz = 1. \end{cases}$

244. $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{13}{3}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{13}{3}, \\ xyz=1. \end{cases}$

245. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3, \\ xyz=2. \end{cases}$

246. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=4, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

247. $\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=36, \\ xyz=216. \end{cases}$

248. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1, \\ xy+xz+yz=27, \\ x+y+z=9. \end{cases}$

249. $\begin{cases} xy+xz+yz=11, \\ xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)=48, \\ xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)=118. \end{cases}$

250. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$

Список литературы

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - 17-е издание. СПб.:- Издательский Дом «Лань», 2008.
2. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. 3-е издание. - СПб.:- Издательский Дом «Лань», 2009. - 336с.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. 17-е издание. СПб. - Издательский Дом «Лань», 2008. 288 с.
4. Окунев Л.Я. Сборник задач по высшей алгебре. 2-е издание. - СПб.:- Издательский Дом «Лань» 2009.
5. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. – М.: Просвещение, 1980.
6. Солодовников А. С., Родина М. А. Задачник – практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1985.
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1964.

Логиновских Любовь Михайловна

МНОГОЧЛЕНЫ

Методические указания и материалы для практических занятий по алгебре со студентами специальности 010100 - Математика

Редактор Е.А. Устюгова

Подписано к печати	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. №1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 3,5	Уч.-изд. л. 3,5
Заказ	Тираж 60	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета

640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.

Курганский государственный университет