МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические указания к практическим занятиям для студентов
специальности 010101 Математика

Курган 2011

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

Дисциплина: « Теория случайных процессов»

Составитель: ст. преподаватель Е.А. Лукерьянова

Утверждены на заседании кафедры «01» февраля 2010 г.

Рекомендованы методическим

советом университета «24» ноября 2010 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особая роль в подготовке студентов к профессиональной деятельности принадлежит самостоятельной работе, организуемой в процессе обучения. Настоящие методические указания предназначены для организации самостоятельной работы по изучению курса «Теория случайных процессов». Методические указания включают в себя календарно – тематический план изучения курса, планы занятий, вопросы для зачета, задания для контрольной работы.

В календарно – тематическом плане указаны номера тем, их название, ссылки на рекомендованную литературу, крайние сроки отчета по теме. Планы занятий содержат вопросы для повторения, вопросы для изучения, образцы решения задач, задачи различного уровня сложности, задачи для повторения.

Изучение теоретического материала осуществляется таким образом: после того как студент прочитал материал в учебнике, он составляет конспекты по тем вопросам, которые предлагаются ему в плане занятия. Он сам работает над выводом формул и доказательством теорем. Изучив теоретический материал, студент разбирает образцы решения задач I и II уровней и начинает решать предложенные ему задачи по теме.

Если студент затрудняется в выполнении задания, он обращается к учебнику или за консультацией к преподавателю. Для получения зачета по курсу необходимо предоставить отчет по каждой теме, выполнить контрольную работу. Отчет по теме заключается в том, что студент отвечает на предложенные ему вопросы, показывает самостоятельно решенные задачи, решает 2 - 3 задачи I и II или III уровня сложности, предложенные преподавателем.

Федеральный компонент
Государственного образовательного стандарта
высшего профессионального образования

Обязательный минимум содержания
дисциплины «Математика»

Индекс (по ГОС) ОПД.Ф.15

Определение случайного процесса, конечномерные распределения; траектории; теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений (без доказательства). Классы случайных процессов; гауссовские, марковские, стационарные, точечные с независимыми приращениями; примеры; соотношения между классами. Свойства многомерных гауссовских процессов; существование гауссовского процесса с заданным средним и корреляционной матрицей; свойства симметрии и согласованности. Винеровский процесс; критерий Колмогорова непрерывности траектории; следствие для гауссовских процессов. Пуассоновский процесс; построение пуассоновского процесса по последовательности независимых показательных распределений; определение Хинчина пуассоновского процесса. Среднеквадратическая теория: необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости; стохастический интеграл; процессы с ортогональными приращениями, пример стационарного, гауссовского, марковского процесса; примеры стационарных в широком смысле процессов. Цепи Маркова с непрерывным временем; уравнение Колмогорова–Гопмэна; прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова; время прибывания процесса в данном состоянии. Процессы гибели и размножения; связь с теорией массового обслуживания; применение к расчету пропускной способности технических систем.

Календарно-тематический план изучения курса «Теория случайных процессов»

Номер темы	Название темы, номер занятия	Вопросы для изучения	Литература	Сроки сдачи зачета по теме
1	Корреляционная теория случайной функции 1-4	Понятие случайной функции, случайного процесса. Конечномерные распределения. Математическое ожидание случайной функции. Дисперсия случайной функции. Корреляционная функция случайной функции. Нормированная корреляционная функция случайной функции. Взаимная корреляционная функция. Нормированная взаимная корреляционная функция	[2],[4] [9],[6],[8] [11]	30.09
2	Корреляционная теория случайной функции 5-9	Характеристика суммы случайных функций. Производная случайной функции и ее характеристики. Интеграл от случайной функции и его характеристики. Комплексные случайные величины и их числовые характеристики. Комплексные случайные функции и их характеристики	[2],[4],[9] [6],[8],[10]	28.10
3	Стационарные случайные функции 10-13	Определение стационарной случайной функции. Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции. Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции. Стационарносвязанные случайные функции. Корреляционная функция производной стационарной случайной функции. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производная. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции	[2],[4],[9], [5],[6],[7], [8]	02.11
4	Элементы спектральной теории стационарных случайных функция.	Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами. Дискретный и непрерывный спектр стационарной случайной функции. Спектральная плотность.	[2],[3],[4], [5],[6],[7], [8] ,[9]	10.12

	14-18	Нормированная спектральная плотность. Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций. Стационарный белый шум. Преобразование стационарной случайной функции стационарной динамической системой		
5	Первоначальные сведения о цепях Маркова. Марковские случайные процессы. 19-20	Цепь Маркова. Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода. Равенство Маркова. Марковский случайный процесс. Марковский процесс с дискретным множеством состояний, с непрерывным множеством состояний. Марковский процесс с дискретным и непрерывным временем	[2],[3],[4],[5],[6],[9],[1]	20.12
6	Процесс Пуассона. Винеровский процесс. Простейший поток случайных событий. Свойства простейшего потока. Процесс Пуассона. 21-22	Построение пуассоновского процесса по последовательности независимых показательных распределений. Определение Хинчина пуассоновского процесса. Нормальный гаусовский процесс. Случайный процесс с независимым приращением, процесс со стационарным приращением. Винеровский процесс (процесс броуновского движения) Теория массового обслуживания	[5],[2],[6],[9],[11],[7]	26.12
	Контрольная работа 23			28.12
	Зачет по курсу 24			30.12

Занятие 1
Понятие случайной функции, случайного процесса

Вопросы для повторения

1. Понятие случайной величины.
2. Дискретные и непрерывные случайные величины. Примеры случайной величины.
3. Закон распределения дискретной случайной величины.
4. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
5. Математическое ожидание непрерывной случайной величины.
6. Свойства математического ожидания случайной величины.
7. Дисперсия дискретной случайной величины.
8. Дисперсия непрерывной случайной величины.
9. Свойства дисперсии.
10. Среднее квадратичное отклонение случайной величины.

Вопросы для изучения

1. Понятие случайной функции, случайного процесса.
2. Способы задания случайного процесса.
3. Обозначение случайного процесса.
4. Сечение случайного процесса.
5. Реализация (траектория) случайного процесса.
6. Одномерный и конечномерный закон распределения случайного процесса.
7. Классификация случайных процессов.
8. Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса. Среднее квадратичное отклонение случайного процесса.
9. Корреляционная функция случайного процесса. Основные свойства корреляционной функции $K_x(t_1;t_2)$ случайного процесса $X\ (t)$. Нормированная корреляционная функция и ее свойства.
10. Взаимная корреляционная функция случайного процесса и ее свойства. Нормированная взаимно корреляционная функция и ее свойства.

Образцы решения задач

Задача 1

1. Случайная функция $X(t)=(t^3-1)U$, где U - случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу (0;10). Найти реализации функции $X(t)$ в двух испытаниях, в которых величина U приняла значения: а) $u_1=1$; в) $u_2=3$.

Решение

Если случайная величина в первом опыте приняла значения 1, то получим реализацию случайной функции $X(t)=t^3-1$.

Если случайная величина во втором опыте приняла значение 3, то получим реализацию случайной функции $X(t) = 3(t^3 - 1)$.

Задача 2

Случайная функция $X(t) = U\cos^2 t$, где U - случайная величина. Найти сечение $x(t)$, соответствующее фиксированному значению аргумента $t_1 = \frac{\pi}{6}$.

Решение

Если зафиксировать значение аргумента $t_1 = \frac{\pi}{6}$, то получим сечение $X\left(\frac{\pi}{6}\right)$, т.е. $X\left(\frac{\pi}{6}\right) = U\cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}\pi$ - случайная величина.

Задача 3

Случайный процесс определяется формулой $Y(t) = x \cdot e^{-t}$, $t > 0$, $X = N(3;1)$, т.е. X- случайная величина, распределенная по нормальному закону с *a = 3*, $\sigma = 1$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$.

Решение

Дифференциальная функция случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-3)^2}{2}}$$

$$m_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3+3)\cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-3)e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2}dx\right) = \begin{bmatrix} x-3=t \\ x=t+3 \\ dx=dt \\ t_1 \to -\infty \\ t_2 \to +\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt + 3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\left(0 + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t2}{2}}dt\right) = 6\frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 3e^{-t}$$

$$m_y(t) = 3e^{-t}$$

Приведем другое решение: согласно свойству $M(f(t)X(t)) = f(t)m_x(t)$, где $f(t)$ - неслучайный множитель $m_y(t) = M(Xe^{-t}) = e^{-t}M(X)$, $M(X) = 3$, тогда $m_y(t) = 3e^{-t}$.

Занятие 2
Основные характеристики случайного процесса

Задачи для решения в аудитории

1. Доказать, что неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания $M[X(t)f(t) = f(t)m_x(t)$.
2. Доказать, что математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых.
3. Доказать, что корреляционная функция случайной функции $X(t)$ равна корреляционной функции центрированной случайной функции: $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t)$.
4. Доказать, что при равных между собой значениях аргумента корреляционная функция случайной функции $X(t)$ равна ее дисперсии: $K_x(t,t) = Д_x(t)$.
5. Доказать, что от прибавления к случайной функции $X(t)$ неслучайной функции $\varphi(t)$ корреляционная функция не изменится: если $Y(t) = X(t) + \varphi(t),$ то $K_x(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2).$
6. Доказать, что если случайная функция $Y(t) = X(t)\varphi(t),$ где $\varphi(t)$ - неслучайная функция, то $K_y(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1,t_2).$
7. Пусть $X(t)$ - случайная функция, $\varphi(t)$ - неслучайная функция. Доказать: если $У(t) = X(t) + \varphi(t),$ то $Д_y(t) = Д_x(t).$
8. Дано: $X(t)$ - случайная функция, $\varphi(t)$ - неслучайная функция. Доказать: если $У(t) = X(t)\varphi(t),$ то $Д_y(t) = \varphi^2(t)\ Д_x(t).$
9. Доказать, что корреляционная функция произведения двух центрированных некоррелированных случайных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.
10. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайных функций $X(t)$ и $У(t)$ равна взаимной корреляционной функции центрированных функций $\overset{\circ}{X}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t)$.
11. Доказать, что при одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция двух случайных функций не изменится: $Rxy(t_1,t_2) = Ryx(t_2,t_1)$.

Задачи для повторения

1. В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей R стандартных.

2. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма x+y не превышает единицы, а произведение xy меньше 0,09.
3. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не более чем в трех ящиках.

Занятие 3,4
Характеристики случайных функций

Задачи для решения в аудитории

1. Случайная функция $X(t) = (t^2 + 1)U$, где $U -$ случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу(0;10). Найти реализации функции $X(t)$ в двух испытаниях, в которых величина U приняла значения: а) $u_1 = 2$; б) $u_2 = 3{,}5$.
2. Случайная функция $X(t) = U\sin t$, где $U -$ случайная величина. Найти сечение $X(t)$, соответствующее фиксированным значениям аргумента:

   а) $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$; б) $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Найти математическое ожидание случайной функции:
   а) $X(t) = Ue^t$, $M(U) = 5$;
   б) $X(t) = Ut^2 + 2t + 1$;
   в) $X(t) = U\sin 4t + V\cos 4t$, $M(U) = M(V) = 1$.
4. Известна корреляционная функция $K_x(t,t')$ случайной функции $x(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции:
а) $Y(t) = X(t) + t^2$; б) $Y(t) = X(t)\cdot(t+1)$; в) $Y(t) = cX$, где $c -$ постоянная.
5. Известна дисперсия $Д_x(t)$ случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t) = X(t) + 2$.
6. Дано: $X(t)$ -случайная функция. Найти $Д_y(t)$, если $Y(t) = (t+3)X(t)$.
7. На вход усилительного звена подаются случайная функция $X(t)$, $m_x(t) = t$, $K_x(t_1,t_2) = e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}$ (α>0).

   Найти $m_y(t)$, $K_y(t_1,t_2)$, если $К = 5$ – коэффициент усиления. $У(t) = 5X(t)$ случайная функция на выходе.
8. Найти: $m_x(t)$, $K_x(t_1,t_2)$, $Дx(t)$, если
   а) $X(t) = U\cos 2t$, $M(U) = 5$, $Д(U) = 6$;
   б) $X(t) = U\sin 3t$, $M(U) = 10$, $Д(U) = 0{,}2$.
9. Дано: $Kx(t_1,t_2) = t_1t_2 + 5t_1^2t_2^2$ случайного процесса $X(t)$.

а) убедиться на примере при $t_1 = 1, t_2 = 2,$ что абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений;

б) найти нормированную корреляционную функцию и вычислить коэффициент корреляции сечений, соответствующих значений аргументов $t_1 = 1, t_2 = 4.$

10. $Kx(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{-|t_2 - t_1|}$ случайной функции $X(t)$. Найти нормированную корреляционную функцию.

11. Найти взаимную корреляционную функцию двух случайных функций: $X(t) = t^2 U$ и $У(t) = t^3 U$,где $Д(U) = 5$.

12. Дано: $R_{xy}(t_1, t_2) = \cos(\alpha t_1 + \beta t_2).$ Написать взаимную корреляционную функцию $R_{xy}(t_1, t_2).$

13. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию случайных функций $X(t) = tU$ и $У(t) = (t+1)U$, $Д(U) = 10$.

Задачи для повторения

1. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,3. Найти:
   а) наивероятнейшее число попаданий;
   б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий;
   в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно, хотя бы двух попаданий.
2. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий менее трех.

Занятие 5,6
Характеристики суммы случайных функций

Вопросы для изучения

1. Теорема о математическом ожидании суммы двух случайных функций. Следствие из теоремы.
2. Центрированная функция суммы случайных функций.
3. Корреляционная функция суммы двух коррелированных случайных функций.
4. Корреляционная функция суммы n попарно коррелированных случайных функций.
5. Следствия из теоремы о корреляционной функции суммы двух коррелированных случайных функций.
6. Дисперсия суммы двух некоррелированных случайных функций.

Образцы решения задач

Задача

Задана случайная функция $X(t) = tU$, $У(t) = t^2V$, где U и V - некоррелированные случайные величины, причем $M(U) = 3$, $M(V) = 6$, $Д(U) = 0{,}2$, $Д(V) = 5$. Найти: а) $m_z(t)$; б) $K_z(t_1, t_2)$; в) $Д_z(t)$, где $Z(t) = X(t) + У(t)$.

Решение

а) $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$,

$m_x(t) = M(tU) = tM(U) = 3t$;

$m_y(t) = M(t^2V) = t^2M(V) = 6t^2$,

$m_z(t) = 3t + 6t^2$.

б) U и V - некоррелированные случайные величины. Их корреляционный момент равен нулю:

$M[(U-3)(V-6)] = 0$

$R_{xy}(t_1, t_2) = M[(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = t_1, t_2^2 M[(U-3)(V-6)] = 0$

$x(t)$ и $y(t)$ не коррелированные. Поэтому $K_z(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) + K_y(t_1, t_2)$.

$K_x(t_1, t_2) = M[(\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M[(U-3)t_1 \cdot (U-3)t_2] = t_1t_2M[(U-3)^2] =$
$= t_1t_2Д(U) = 0{,}2t_1t_2$

$K_y(t_1, t_2) = M[(\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)] = t_1^{\ 2}t_2^{\ 2}M[(V-6)^2] = 5t_1^{\ 2}t_2^{\ 2}$

$K_z(t_1, t_2) = 0{,}2t_1\ t_2 + 5t_1^{\ 2}t_2^{\ 2}$

в) $Д_z(t) = K_z(t, t) = 0{,}2t^2 + 5t^4$

Задачи для решения в аудитории

1. Заданы корреляционные и взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)$, если рассматриваемые функции:

а) коррелированные;

б) не коррелированные.

2. Известны математические ожидания $m_x(t) = 2t + 1$, $m_y(t) = t - 1$ и корреляционные функции $K_x(t_1, t_2) = t_1 \cdot t_2$, $K_y(t_1, t_2) = e^{-4(t_2 - t_1)^2}$ некоррелированных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти: а) $M_z(t)$; б) $K_z(t_1, t_2)$, если $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

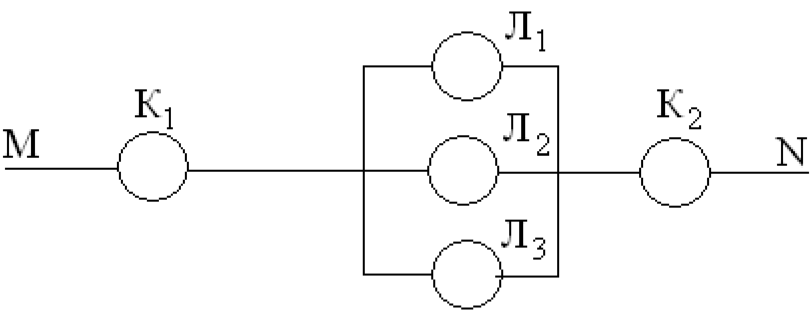
3. Заданы коррелированные и взаимные корреляционные функции случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию случайных функций $U(t) = aX(t) + bY(t)$, $V(t) = cX(t) + dY(t)$, где a, b, c, d$\in R$.

4. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t) = Ut + Vt^2$, где u и v – некоррелированные случайные величины $M(U) = 4$, $M(V) = 7$, $Д(U) = 0{,}1$, $Д(V) = 2$.

5. Заданы случайные функции $X(t) = U\cos t + V\sin t$, $Y(t) = U\cos 3t + V\sin 3t$, где u и v – некоррелированные случайные величины, причем $M(U) = M(V) = 0$, $Д(U) = Д(V) = 5$. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{xy}(t_1, t_2)$.

Задачи для повторения

1. Сборщик получил 2 коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом №1, и 3 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,9, а завода №2 – 0,7. Из наудачу взятой коробки сборщик извлек деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.
2. Электронная цепь между точками M и N составлена по схеме:



Выход из строя за время T различных элементов цепи – независимые события, имеющие следующие вероятности: $P(K_1) = 0{,}6;$ $P(Л_1) = 0{,}4;$ $P(Л_2) = 0{,}7;$ $P(Л_3) = 0{,}9.$ Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.
3. При проверке качества зерна пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежат 96%, ко второй – 2%, к третьей – 1%, к четвертой – 1 % всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для семян второй группы – 0,2, для семян третьей группы – 0,18, для семян четвертой группы – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастит колос, содержащий не менее 50 зерен.

Занятие 7, 8

Производная случайной функции и ее характеристики. Интеграл от случайной функции и его характеристики

Вопросы для изучения

1. Понятие среднеквадратичной сходимости.
2. Дифференцирование случайной функции.

3. Теорема о математическом ожидании производной $X^{1}(t)$ от случайной функции $X(t)$
4. Вторая производная случайной функции.
5. Теорема о корреляционной функции, производной от случайной функции $X(t)$.
6. Взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной $X^{1}(t)$.
7. Интеграл от случайной функции $X(t)$ по отрезку $[0,t]$.
8. Теорема о математическом ожидании интеграла от случайной функции.
9. Теорема о корреляционной функции интеграла от случайной функции $X(t)$.
10. Теорема о взаимно корреляционной функции случайной функции $X(t)$ и интеграла $y(t)=\int\limits_0^t x(s)ds$.

Образцы решения задач

Задача 1

Доказать, что взаимная корреляционная функция случайной функции $X(t)$ и ее производной равна частной производной от корреляционной функции по аргументу, который «соответствует производной» [если индекс x стоит на первом (втором) месте, то надо дифференцировать по первому (второму) аргументу]: а) $R_{x\overset{\circ}{x}}=\frac{\delta K_x}{\delta t_2}$; б) $R_{\overset{\circ}{x}x}=\frac{\delta K_x}{\delta t_1}$.

Решение

а) По определению взаимной корреляционной функции, $R_{x\overset{\circ}{x}}=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}{}^{I}(t_2)\right]$.

Произведение под знаком математического ожидания можно представить в виде частной производной по аргументу t_2:

$$\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}{}^{I}(t_2)=\overset{\circ}{X}(t_1)\frac{d\overset{\circ}{X}(t_1)}{dt_2}=\frac{\delta\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]}{\delta t_2},$$ поэтому

$$R_{x\overset{\circ}{x}}=M\left\{\frac{\delta\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]}{\delta t_2}\right\}.$$

Учитывая, что операции дифференцирования и нахождения математического ожидания можно переставлять, окончательно получим:

$$R_{x\overset{\circ}{x}}=\frac{\delta M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\right]}{\delta t_2}=\frac{\delta Kx}{\delta t_2}.$$

б) Рекомендуется доказать самостоятельно.

Задача 2

Найти корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + X^{I}(t)$, зная корреляционную функцию K_X.

Решение

В силу теоремы 2 (§2), $K_z = K_x + K_{\overset{\circ}{x}} + R_{x\overset{\circ}{x}} + R_{\overset{\circ}{x}x}$.

Учитывая, что корреляционная функция производной (теорема 2) $K_{\overset{\circ}{x}} = \dfrac{\delta^2 K_x}{\delta t_1 \delta t_2}$ и взаимные корреляционные функции (теорема 3) $R_{x\overset{\circ}{x}} = \dfrac{\delta Kx}{\delta t_2}$, $R_{\overset{\circ}{x}x} = \dfrac{\delta Kx}{\delta t_1}$, окончательно получим искомую корреляционную функцию: $K_z = K_x + \dfrac{\delta^2 K_x}{\delta t_1 \delta t_2} + \dfrac{\delta K_x}{\delta t_2} + \dfrac{\delta K_x}{\delta t_2}$.

Занятие 9

Комплексные случайные функции и их характеристики

Вопросы для изучения

1. Определение комплексной случайной величины.
2. Математическое ожидание комплексной случайной величины.
3. Дисперсия комплексной случайной величины.
4. Корреляционный момент двух комплексных случайных величин.
5. Определение комплексной случайной функции.
6. Математическое ожидание комплексной случайной функции.
7. Дисперсия комплексной случайной функции.
8. Корреляционная функция комплексной случайной функции.
9. Взаимная корреляционная функция двух комплексных случайных функций.

Задачи для решения в аудитории

1. Случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,2	0,3	0,2

Y	-1	2	7
P	0,3	0,4	0,3

Найти *M(Z), D(Z),* где *Z=X+Yi.*

2. Случайная величина X выражает число попаданий в мишень при 5 выстрелах. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,4. Случайная величина Y выражает число появлений «герба» при четырех подбрасываниях монеты. Найти *M(Z), D(Z),* где *Z=X+Yi.*
3. Случайные величины X и Y заданы следующими дифференциальными функциями:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ \cos x & при \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & при \quad x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ 6e^{-6x} & при \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Найти *M(Z), D(Z),* где *Z=X+Yi.*

4. Случайные функции $X(t) = U\cos 2t$, $Y(t)=V\sin^2 t$. $M(U) = 5$, $M(V) = 3$, $D(U) = D(V) = 8$. Найти *M(Z(t)), D(Z(t)),* где *Z(t)=X(t)+Y(t)i.*
5. Вывести формулу $\mu_{z_1z_2} = \mu_{x_1y_1} + \mu_{x_2y_2} + (\mu_{x_2y_1} - \mu_{x_1y_2})i$.
6. Доказать, что $R_{z_1z_2}(t_1,t_2) = R_{x_1x_2}(t_1,t_2) + R_{y_1y_2}(t_1,t_2) + [R_{x_2y_1}(t_1,t_2) - R_{x_1y_2}(t_1,t_2)]i$.
7. Заданы случайные функции $X(t) = (t-1)U$ и $Y(t) = t^2U$, где U и V-некоррелированные случайные величины, причем $M(U) = 2$, $M(V) = 3$, $D(U) = 4$, $D(V) = 5$. Найти корреляционную функцию *Z(t)=X(t)+Y(t)i.*
8. Найти взаимную корреляционную функцию двух случайных функций $Z_1(t) = X_1(t) + Y_1(t)$ и $Z_2(t) = X_2(t) + Y_2(t)$, где $X_1(t) = (t+1)U$, $Y_1(t) = (t^2+1)U$, $X_2(t) = (t-1)U$, $Y_2(t) = t^2U$, $M(U) = 2$, $D(U) = 4$.

Задачи для повторения

1. Написать функцию распределения F(x) и плотность вероятности f(x) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону с параметром λ=5. Найти: а)P (0,4 < X < 1), б)M(X), в)Д(X), г)σ(X).
2. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону $f(t) = 0{,}01e^{-0{,}01t}$ (t > 0), где t – время, ч.

   Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно более 100ч.
3. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ и построить ее график.

Занятие 10, 11
Стационарные случайные функции

Вопросы для изучения

1. Понятие стационарной случайной функции.
2. Свойства корреляционной функции стационарной функции.
3. Нормированная корреляционная функция стационарной функции.
4. Числовые характеристики случайной величины $Y = \varphi(X)$.
5. Стационарно связанные случайные функции.

Задачи для решения в аудитории

1. Задана случайная функция $X(t) = sin(t + \varphi)$, где φ - случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2π). Доказать, что $X(t)$ - стационарная функция.
2. Доказать, что если $X(t)$ - стационарная случайная функция, Y – случайная величина, не связанная с $X(t)$, то случайная функция $Z(t)=X(t)+Y$ стационарна.
3. Доказать, что если $X(t)$ - стационарная случайная функция, $Y = X(t_0)$ – случайная величина, то случайная функция $Z(t)=X(t)+Y$ не стационарна.
4. Стационарна ли случайная функция $X(t) = Ucos2t$, где U – случайная величина?
5. Является ли стационарной случайная функция $X(t) = Usint + Vcost$, где U и V – некоррелированные случайные величины, причем $m_u = m_v = 0, D_u = D_v = D$?
6. Задана случайная функция $X(t) =t^2 + Usint + Vcost$, где U и V - случайные величины, причем $M(U) = M(V) = 0, M(UV) = 0, D(U) = D(V) = 10.$

   Доказать, что:

   а) $X(t)$ – нестационарная функция;

   б) $\overset{\circ}{X}(t)$ – стационарная функция.
7. Доказать, что корреляционная функция стационарной случайной функции есть четная функция.
8. Известна корреляционная функция $k_x(\tau)$ стационарной функции $X(t)$. Доказать, что если $Y(t) = aX(t)$, то $k_y(\tau) = a^2k_x(\tau)$.
9. Известна корреляционная функция $k_x(\tau) = De^{-a^2\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = 4X(t)$.
10. Доказать, что дисперсия стационарной случайной функции $X(t)$. постоянна и равна значению корреляционной функции в начале координат: $D_x(t) = k_x(0)$.
11. Доказать, что абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат: $|k_x(\tau)| \le k_x(0)$.
12. Найти нормированную корреляционную функцию, зная корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$:

   а) $k_x(\tau) = 3e^{-\tau^2}$;

   б) $k_x(\tau) = D_x e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$.
13. Доказать, что взаимные корреляционные функции двух стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$, взятых в различных порядках, связаны равенством $r_{xy}(\tau) = r_{yx}(\tau)$.
14. Доказать, что для стационарных и стационарно связанных случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ абсолютная величина взаимной корреляционной

функции не превышает средней геометрической дисперсий этих функций $\left|\tau_{xy}\right| \le \sqrt{Д_x Д_y}$.

15. Заданы две стационарные случайные функции: X(t) = cos(t + φ), Y(t) = sin(t +φ), где φ- случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0; 2π). Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.
16. Дано: *X(t) = Usint + Vcost*, *Y(t) = Ucost + Vsint*, где *U* и *V* – некоррелированные случайные величины с M(U) =M(V) =0, *D(U) = D(V) =5.* Найти нормированную взаимную корреляционную функцию заданных функций. *X(t)* и *Y(t)*- стационарные и стационарно связанные случайные функции.

Занятие 12, 13

Корреляционная функция производной и интеграла случайной функции. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной

Вопросы для изучения

1. Теорема о корреляционной функции производной стационарной случайной функции.
2. Теорема о взаимной корреляционной стационарной случайной функции и ее производной.
3. Теорема о корреляционной функции интеграла от стационарной случайной функции.
4. Следствие из теоремы о корреляционной функции интеграла от стационарной случайной функции.

Задачи для решения в аудитории

1. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 2e^{-0,5\tau^2}$ стационарной случайной функции *X(t).* Найти: а) корреляционную функцию и дисперсию производной *X′(t)* = $\overset{\circ}{X}$; б) отношение дисперсий случайной функции *X(t)*и ее производной.
2. Дано: $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$. Найти $r_{xx}(\tau)$.
3. Дано: $k_x(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$. Найти: $Д_y(t)$, если $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$.
4. Доказать, что производные любого порядка (если они существуют) от стационарной случайной функции также стационарны.
5. Заданы математическое ожидание m_x *(t)= 8* и корреляционная функция $k_x(\tau) = 5e^{-|\tau|}[\cos 2\tau + 0,5\sin 2|\tau|]$ нормальной стационарной случайной функции *X(t)*. Найти вероятность того, что производная *Y(t) = X′(t)* заключена в интервале (0,10).

6. Заданы математическое ожидание m_x $(t)= 12$ и корреляционная функция $k_x(\tau) = 4e^{-|\tau|}[\cos 2\tau + 0{,}5\sin 2|\tau|]$ нормальной стационарной случайной функции *X(t)*. Найти вероятность того, что производная *Y(t)* = *X′(t)* принимает значения, большие, чем $\sqrt{5}$.
7. Известна $k_x(\tau) = 3e^{-2\tau^2}$. Найти корреляционную функцию Y(t).

Занятие 14, 15

Спектральная плотность стационарной случайной функции

Задачи для решения в аудитории

1. Доказать, что спектральная плотность стационарной случайной функции является четной функцией. Указание: использовать формулу $s_x(w) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)\cos w\tau d\tau$.
2. Доказать, что зная спектральную плотность стационарной случайной функции *X(t),* можно найти дисперсию этой функции по формуле $D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(w)dw$. Указание: принять во внимание, что $k_x(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_x(w)e^{iw\tau}dw$, $D_x = k_x(0)$.
3. Найти дисперсию стационарной случайной функции *X(t),* зная ее спектральную плотность $s_x(w) = 10/\pi(1 + w^2)$.
4. Доказать что, зная спектральную плотность дифференцируемой стационарной случайной функции, можно найти спектральную плотность ее производной по формуле $s_x(w) = w^2 s_x(w)$.
5. Задана спектральная плотность $s_x(w) = \dfrac{a^2}{(w^2 + a^2)^2}$ $(a > 0)$ дифференцируемой стационарной случайной функции *X(t)*. Найти дисперсию производной *X′(t)*.
6. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции *X(t),* зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = 1 - |\tau|$ при $|\tau| \le 1$; корреляционная функция равна нулю при $|\tau| > 1$.
7. Найти спектральную плотность стационарной случайной функцию, зная ее корреляционную функции $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}$.
8. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}\cos\tau$.
9. Доказать, что функция $k_x(\tau) = 5e^{-2\tau^2}$ может быть корреляционной функцией стационарной случайной функции *X(t)*.
10. Может ли функция $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau| + \tau^2)$ быть корреляционной функции *X(t)?*

Решение.

Проверим, выполняются ли все свойства корреляционной функции $k_x(\tau)$.

а) свойство $k_x(\tau)$ - четная функция – выполняется: $k_x(-\tau) = k_x(\tau)$.

б) свойство $k_x(0) > 0$ выполняется: $k_x(0) = 1 > 0$.

в) $|k_x(\tau)| \le k_x(0)$. не выполняется: например, $k_x(1) = 3/e > k_x(0) = 1$. .

г) свойство $s_x(w) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau)e^{-iw\tau}d\tau \ge 0$ при всех значениях w не выполняется.

Действительно, допустив, что заданная функция $k_x(\tau)$ является корреляционной функцией некоторой стационарной случайной функции *X(t)* и выполнив выкладки, найдем функцию $s_x(w) = \dfrac{4(1-w^2)}{\pi(1+w^2)}$; при $|w| > 1$ функция $s_x(w) < 0$.

Итак, заданная функция $k_x(\tau)$ не является корреляционной функцией никакой стационарной случайной функции. Разумеется, это заключение можно было сделать, убедившись, что не выполняется хотя бы одно свойство корреляционной функции.

Занятие 16, 17
Спектральная теория стационарной случайной функции

Вопросы для изучения

1.Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами.

2.Дискретный спектр стационарной случайной функции:

а) частоты – произвольные числа, количество их конечно;

б) равностоящие частоты, множество их бесконечно.

3.Непрерывный спектр стационарной функции.

4.Спектральная плотность.

5.Нормированная спектральная плотность.

6.Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций.

7.Дельта-функция.

8.Стационарный белый шум.

9.Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системы.

Образцы решения задач

Задача 1

Дано: *X(t)* - стационарная случайная функция, $k_x(\tau)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}|\tau| & при \quad |\tau|\le 2\\ 0 \quad при & |\tau|>2\end{cases}$ корреляционная функция.

Найти: $S_x(w)$.

Решение

$S_x(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^t R_x(\tau)\cos w\tau d\tau$, $|\tau| = \tau$ в интервале (0; 2). Получим

$$S_x(w)=\frac{1}{\pi}\int_0^2(1-\frac{1}{2}\tau)\cos w\tau d\tau=\frac{1}{\pi}\begin{bmatrix}u=1-\frac{1}{2}\tau & du=\frac{1}{2}d\tau\\ dv=\cos w\tau d\tau & v=\frac{1}{w}\sin w\tau\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}(1-\frac{1}{2}\tau)\frac{1}{w}\sin w\tau\Big|_0^2-\frac{1}{2\pi w}\int_0^2\sin w\tau=\frac{1}{\pi}(1-\frac{1}{2}2\frac{1}{w}\sin 2w+$$

$$+\frac{1}{2\pi w}\cdot\frac{1}{w}\cos w\tau\Big|_0^2\frac{1}{2\pi w^2}\cos w2-\frac{1}{2\pi w^2}=\frac{1}{2\pi w^2}(\cos w2-1)=\frac{\sin^2 w}{\pi w^2}$$

Задача 2

Дано: $S_x(w)=\frac{5}{\pi(1+w^2)}$ спектральная плотность, стационарная случайная функция *X(t)*. Найти: $S_{x\,норм}(w)$.

Решение

Найдем: $Д_x=\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(w)dw=\frac{5}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dw}{1+w^2}=\frac{5}{\pi}arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{5}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=5$

$$S_{x\,норм}(w)=\frac{S_x(w)}{\int_{-\infty}^{+\infty}S_x(w)dw}$$

$$S_{x\,норм}(w)=\frac{1}{\frac{\pi}{1}+w^2}.$$

Занятие 18

Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системы

Вопросы для изучения

1. Понятие стационарной линейной динамической системы.
2. Понятие передаточной функции линейной динамической системы.
3. Частотная характеристика линейной динамической системы.
4. Правило нахождения спектральной плотности выходной функции.

5. Корреляционная функция выходной функции.
6. Разобрать задачу №2 на стр. 448.

Задачи для решения в аудитории

1. На вход линейной стационарной динамической системы, описанной уравнением $Y'(t)+2Y(t)=5X'(t)+6X(t)$, подается стационарная случайная функция *X(t)* с математическим ожиданием $m_x=5$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме (после затухания переходного процесса).
2. На вход линейной стационарной динамической системы, описанной уравнением $Y'(t)+3Y(t)+5Y(t)=4X'(t)+10X(t)$, подается стационарная случайная функция *X(t)* с математическим ожиданием $m_x=2$. Найти математическое ожидание случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.
3. На вход линейной стационарной динамической системы, описанной уравнением $3Y'(t)+Y(t)=4X'(t)+X(t)$, подается стационарная случайная функция *X(t)* с корреляционной функцией $k_x(\tau)=6e^{-2|\tau|}$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.
4. На вход линейной стационарной динамической системы, описанной уравнением $Y'(t)+3Y(t)=X'(t)+4X(t)$, подается стационарная случайная функция *X(t)* с математическим ожиданием $m_x=6$ и корреляционной функцией $k_x(\tau)=5e^{-2|\tau|}$. Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.
5. На вход линейной стационарной динамической системы, описанной уравнением $Y'(t)+Y(t)=X(t)$, подается стационарная случайная функция *X(t)* с постоянной спектральной плотностью s_0(белый шум). Найти дисперсию случайной функции $Y(t)$ на выходе системы в установившемся режиме.

Занятие 19, 20
Марковские случайные процессы

Вопросы для изучения

1. Цепь Маркова.
2. Цепь Маркова с дискретным временем.
3. Цепь Маркова с непрерывным временем.
4. Однородная цепь Маркова.
5. Переходные вероятности.
6. Матрица перехода системы.
7. Равенство Маркова.
8. Марковский случайный процесс.

9. Примеры марковских случайных процессов.

Задачи для решения в аудитории

1. Матрица вероятностей переходов за один шаг цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Найти предельные вероятности.
2. Задана матрица перехода $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу вероятностей переходов за два шага.
3. Цепь Маркова с двумя состояниями S_1 и S_2 задана матрицей вероятностей переходов $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. В качестве начального состояния процесса некоторое устройство выбирает S_1 с вероятностью $\frac{1}{4}$ и S_2 - с вероятностью $\frac{3}{4}$. Построить граф, соответствующий матрице. Найти вероятность того, что после первого шага процесс перейдет в состояние S_1.
4. Цепь Маркова управляется матрицей перехода $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Определить матрицу вероятностей переходов за три шага.
5. Найти предельные вероятности для системы S, граф которой изображен на рис. 1.

$$\begin{tikzcd} \boxed{S_1} \arrow[r, shift left, "1"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "4"] \arrow[r, shift left, "2"] & \boxed{S_3} \arrow[l, shift left, "3"] \end{tikzcd}$$

Рис. 1.

Занятие 21

Процесс Пуассона. Винеровский процесс

Вопросы для изучения

1. Поток событий. Примеры.
2. Свойства, которыми могут обладать потоки событий.
3. Простейшие потоки событий.
4. Интенсивность потока.
5. Вероятность появления событий простейшего потока за время длительного t.

6. Процесс Пуассона.
7. Винеровский процесс. Примеры.

Образцы решения задач

Задача 1

Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит менее четырех вызовов.

Решение

Событие А – «поступило менее четырех вызовов»

A_1 – «поступило три вызова»

A_2 – «поступило два вызова»

A_3 – «поступило один вызова»

A_4 – « не поступило ни одного вызова»

События A_1, A_2, A_3 ,A_4 несовместны, $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$.

$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$$P(Ai) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

$\lambda = 3$, $t = 2$, $k = 3, 2, 1, 0$.

$$P(A_1) = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} \approx 0{,}089$$

$$P(A_2) = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} \approx 0{,}045$$

$$P(A_3) = \frac{6\ e^{-6}}{1!} \approx 0{,}0149$$

$$P(A_4) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} \approx 0{,}0025$$

P(A) = 0, 1514

Задача 2

Показать, что для пуассоновского потока событий $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(\Delta t) \geq 1)}{P(X(\Delta t = 1)} = 1$, где $X(\Delta t)$ - число событий, попадающих на участок длиной Δt.

Решение

$$P(X(\Delta t) \geq 1) = 1 - P(X(\Delta t) = 0) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

$$P(X(\Delta t) \geq 1) = \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(X(\Delta t) \geq 1)}{P(X(\Delta t = 1)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda \Delta t e^{-\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\lambda e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda (e^{\lambda \Delta t} + \Delta t(-\lambda) e^{-\lambda \Delta t})} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{-\lambda \Delta t}}{e^{-\lambda \Delta t}(1 - \lambda \Delta t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{1 - \lambda \Delta t} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} 1 - \lambda \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta t} = \frac{1}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Задача 3

Поток машин, следующий по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с плотностью λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, который ему придется ждать; определить его математическое ожидание m_t и среднее квадратичное отклонение τ_t.

Решение

Плотность распределения времени ожидания будет такая же, как плотность распределения промежутка между машинами, а именно

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (t > 0), так как «будущее» в простейшем потоке никак не зависит от «прошлого», в частности от того, сколько времени тому назад прошла последняя машина. Для показательного закона $m_t = \dfrac{1}{\lambda}$, $Д_t = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\lambda_t = \dfrac{1}{\lambda} = m_t$.

Задача 4

Рассматривается предельный стационарный режим n – канальной системы массового обслуживания с отказами. Плотность потока заявок λ, плотность «потока обслуживания» - M. Требуется найти следующие характеристики СМО:

1) среднее число занятых каналов k;
2) вероятность того, что произвольно взятый канал будет занят;
3) среднее время занятости одного (произвольно взятого) канала $t_{зан}$;
4) среднее время простоя канала $\overline{t_{пр}}$.

Решение

1) Для любой СМО, в которой каждая заявка может обслуживаться только одним каналом, среднее число заявок λ_0, обслуживаемых в единицу времени, определяется как произведение среднего числа занятых каналов на плотность потока обслуживаний: $\lambda_0 = M\bar{k}$.

Вероятность обслуживания произвольно выбранной заявки равна отношению плотности потока обслуживания заявок к плотности потока поступающих заявок

$P_{обсл.} = \dfrac{\lambda_0}{\lambda}$ откуда $\lambda_0 = M\bar{k} = P_{обсл} \cdot \lambda$

Следовательно, $\bar{k} = \dfrac{\lambda}{\mu} P_{обсл}$ или $\bar{k} = \dfrac{\alpha \cdot k(n-1, \alpha)}{k(n, \alpha)}$ где $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Выражение для среднего числа занятых каналов можно получить из формулы $\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} kP_k$, где $P_k = \dfrac{P(k,\alpha)}{P(n,\alpha)} = \dfrac{R(k,\alpha) - R(k-1,\alpha)}{R(n,\lambda)}$ k = 0, 1, …,n.

2) Обозначим вероятность того, что произвольно взятый канал занят обслуживанием какой – то заявки, через $P_{зан}$. Очевидно, что эта вероятность одинакова для всех каналов, следовательно

$$\overline{k} = nP_{зан}$$

$$P_{зан} = \frac{\overline{k}}{n} = \frac{\alpha}{n} = \frac{R(n-1,\alpha)}{R(n,\alpha)}$$

3) Среднее время занятости одного канала $\overline{t_{зан}} = \frac{1}{\mu}$, т.е. равно среднему времени обслуживания заявки.

4) Среднее время простоя $\bar{t}_{пр}$ определим из условия $P_{зап} = \frac{\bar{t}_{зан}}{\bar{t}_{зан} + \overline{t}_{пр}}$,

$$\bar{t}_{пр} = \overline{t_{зан}} \cdot \frac{1-P_{зан}}{P_{зан}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1-P_{зан}}{P_{зан}}.$$

Занятие 22

Процесс Пуассона. Теория массового обслуживания

Вопросы для повторения

1. Поток событий. Свойства потока событий.
2. Простейшие потоки событий.
3. Вероятность появления событий простейшего потока за время длительного t.
4. Процесс Пуассона.
5. Понятие системы массового обслуживания. Виды систем массового обслуживания.
6. Параметры, определяющие работу системы массового обслуживания.
7. Формула Эрланга для определения вероятности состояний.
8. Вероятность того, что заявка будет обслужена.

Задачи для решения в аудитории

1. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.
2. Поток машин, следующий по шоссе, представляет собой регулярный поток с плотностью λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, которое ему придется ждать. Определить его математическое ожидание m_t и среднее квадратичное отклонение τ_t.
3. Разобрать решение задачи 10,4 (стр. 327) из [4].
4. Рассматривается работа автоматической телефонной станции (АТС), рассчитанной на одновременное обслуживание 20 абонентов (двадцатиканальная СМО). Вызов на АТС поступает в среднем через 6 секунд. Каждый разговор длится в среднем 2 минуты. Если абонент

застает АТС занятой, то он получает отказ. Если абонент застает свободным хотя бы один из 20 каналов, то он соединяется с нужным ему номером. Определить вероятность того, что абонент, вызывая АТС, не застанет ее занятой, а так же другие характеристики СМО: среднее число занятых каналов, вероятность занятости канала, среднее время простоя канала.

Занятие 23
Контрольная работа

Задачи первого и второго уровня

1. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции $X(t) = U\sin 3t$, где U - случайная величина, причем M (U) = 10, Д (U) = 0,2.
2. Задана случайная функция $X(t) = U\cos 3t$, где U - случайная величина, причем M (U) = 1, Д (U) = 1. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию случайной функции $Y(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t X(s)ds$.
3. На вход дифференцирующего звена поступает случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = 5\sin t$ и $K_x = 3e^{-0,3(t_2-t_1)^2}$. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию выходной функции $Y(t) = X^{/}(t)$.
4. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $X(t) = Ut + Vt^2$, где U и V – некоррелированные случайные величины, где M (U) = 4, M (V) = 7, Д(U) = 0,1, V = 2.
5. Случайная функция $X(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 0$, $Kx(t,t^{|}) = \frac{1}{1+(t^{|}-t)^2}$. Найти характеристики случайной функции $Y(t) = \int\limits_0^t X(t)dt$. Определить, стационарны ли функции $X(t)$, $Y(t)$.
6. Случайная функция $X(t)$ задана выражением $X(t) = V\cos wt$, где – V случайная величина с характеристиками $m_v(t) = 2,\ \tau_v(t) = 3$. Является ли стационарной случайная функция $Y(t) = X(t) + \alpha\frac{dX(t)}{dt}$, α - неслучайная величина?
7. Случайная функция $X(t)$ задана каноническим разложением $X(t) = t + V_1\cos wt + V_2\sin wt$, где V_1 и V_2 - некоррелированные случайные

величины с математическим ожиданием, равным нулю и Д$_1$=Д$_2$=2. Определить, является ли стационарной случайная функция $X(t)$.

8. Задана корреляционная функция некоторого случайного процесса $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \begin{cases} 2, & |\pi| \le T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$$

Выяснить, является ли заданный случайный процесс $X(t)$ стационарным в широком смысле?

9. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = 5e^{-0,5\tau^2}$ стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию и дисперсию производной $X^{'}(t) = x$; б) отношение дисперсий функций $X(t)$ и ее производной.

10. Задана корреляционная функция $k_x(\tau) = Дe^{-\alpha|\tau|} \quad (1 + \alpha|\tau|)$, (α > 0) стационарной случайной функции $X(t)$. Найти: а) корреляционную функцию $X^{'}(t)$; б) доказать, что дисперсия производной пропорциональна параметру Д и квадрату параметра α.

11. Найти дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t x(s)ds$, зная корреляционную функцию стационарной случайной функции $X(t)$: $k_x(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$

12. Найти взаимные корреляционные функции стационарной случайной функции $X(t)$ и ее производной, зная корреляционную функцию $k_x(\tau) = e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$.

13. Известно, что спектральная плотность стационарной случайной функции имеет вид $S_x(w) = \dfrac{8}{n(1+w^2)}$. Найти дисперсию случайной функции $X(t)$.

14. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, зная, что $m_x(t) = 1$, , а спектральная плотность $s_x(w) = \dfrac{4}{\pi(1+w^2)}$.

15. Найти спектральную плотность стационарной функции $X(t)$, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = 1 - |\tau|$ при $|\tau| \le 1$, корреляционна функция равна нулю при $|\tau| > 1$.

16. Найти дисперсию стационарной функции $X(t)$, зная ее спектральную плотность $S_x(w) = \dfrac{10}{n(1+w^2)}$

17. Цепь Маркова управляется матрицей перехода $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Определить матрицу вероятностей переходов за три шага.

18. Цепь Маркова с двумя состояниями S_1 и S_2 задана матрицей вероятностей переходов $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. В качестве начального состояния процесса некоторое устройство выбирает S_1 с вероятностью $1/4$ и S_2 с вероятностью $3/4$. Построить граф, соответствующий матрице. Найти вероятность того, что после первого числа процесс перейдет в состояние S_1.
19. Матрица вероятностей переходов за один шаг цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Найти предельные вероятности.
20. Задана матрица перехода $P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу вероятностей переходов за два шага.

Задачи третьего уровня

1. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = U(t)X(t) + V(t)X'(t)$, где $X(t)$ – дифференцируемая случайная функция, корреляционная функция которой известна, $U(t)$ и $V(t)$ – неслучайные функции.
2. Задана корреляционная функция случайной функции $X(t)$. Найти взаимную корреляционную функцию R_{yz}, случайных функций $Y(t) = aX(t) + bX'(t)$ и $Z(t) = cX'(t) + dX(t)$, где a, b, c, d - постоянные действительные числа.
3. Задана корреляционная функция $k_x = Де^{-|t_2 - t_1|}$. Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)dx$.
4. Доказать нестационарность случайной функции $X(t) = a\sin(wt + \varphi)$, где *a, w* - положительные числа; φ - нормально распределенная случайная величина, плотность вероятности которой $f(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varphi^2/2}$.
5. Заданы математическое ожидание $m_x(t) = 8$ и корреляционная функция $k_x(\tau) = 5e^{-|\tau|}\left[\cos 2\tau + \frac{1}{2}\sin 2|\tau|\right]$ нормальной стационарной случайной функции $X(t)$. Найти вероятность того, что производная $Y(t) = X'(t)$ заключена в интервале (0, 10).

6. Найти спектральную плотность стационарной функции, зная ее корреляционную функцию $k_x(\tau) = Дe^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau \quad (\alpha > 0)$.
7. Спроектированы две линейные стационарные динамические системы, на вход которых поступает стационарная случайная функция $X(t)$. Передаточные функции систем соответственно равны: $\Phi_1(p) = \dfrac{(4p+1)}{3p+1}$, $\Phi_2(p) = {(p+1)}\Big/{3p+1}$. Спектральная плотность выходной функции известна: $S_x(w) = \dfrac{12}{n(w^2+4)}$. Какая из систем обеспечивает наименьшую дисперсию выходной функции?

Занятие 24

Зачет по курсу

Вопросы к зачету

1. Случайные величины и их виды.
2. Закон распределения дискретных случайных величин. Многоугольник распределения случайных величин.
3. Интегральная функция распределения случайных величин.
4. Дифференциальная функция распределения случайных величин.
5. Математическое ожидание, дисперсия случайной величины.
6. Понятие случайной функции, случайного процесса.
7. Сечение случайной функции. Реализация случайной функции.
8. Виды случайных процессов.
9. Математическое ожидание случайного процесса. Свойства математического ожидания.
10. Дисперсия случайного процесса. Свойства дисперсии случайного процесса.
11. Корреляционная функция случайного процесса. Свойства корреляционной функции.
12. Нормированная корреляционная функция случайного процесса.
13. Взаимно корреляционная функция двух случайных процессов X(t) и Y(t): свойства взаимной корреляционной функции.
14. Коррелированные и некоррелированные случайные процессы.
15. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных процессов.
16. Теорема о корреляционной функции суммы двух коррелированных случайных процессов. Следствия из теоремы.
17. Характеристики производной от случайной функции.
18. Характеристика интеграла от случайной функции.
19. Стационарная случайная функция и ее характеристики.
20. Стационарно связанные случайные функции, корреляционная функция производной от стационарной случайной функции.

21. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции.
22. Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции и ее производных.
23. Спектральная плотность стационарной случайной функции.
24. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.
25. Простейший поток событий. Процесс Пуассона.
26. Цепи Маркова. Марковские случайные процессы.
27. Винеровские случайные процессы.

Список литературы

1. Боровков, А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1972.
2. Вентцель, Е.С. Курс теории случайных процессов/ Е.С. Вентцель. – М.: Наука,1975.
3. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей/ Е.С. Вентцель, А.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000.
4. Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, А.А. Овчаров. – Учеб. пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 2000. – 366с.
5. Гихман, И.И. Введение в теорию случайных процессов/ И.И. Гихман, А.В. Скороходов. – М.: Высшая школа, 2000.
6. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001.
7. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшее образование, 2000.
8. Крамер, Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Медбеттер. – М.: Мир, 1969.
9. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис – пресс, 2007. – 288 с.
10. Розанов, Ю.А. Случайные процессы /Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1979.
11. Скороходов, А.В. Случайные процессы с независимыми приращениями/ А.В. Скороходов. – М.: Наука, 1986.
12. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение/ В. Феллер. т. 1. – М.: Мир, 1961.

Задания для зачета по теме: «Основные характеристики случайного процесса»

1. Случайная функция $x(t) = (t^2 + t - 1)u$, где u – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу (0, 20). Найти реализации функции x(t), если u = 3. Найти сечение x(t), соответствующее фиксированному значениями аргумента t = 4.
2. Найти математическое ожидание случайной функции, дисперсию и корреляционную функцию $x(t) = ut^3 - 6t + 1$, где u – случайная величина, причем M(u) = 2, Д(u) = 5.
3. Доказать, что корреляционная функция произведения трех центрированных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.
4. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию x(t) = tu и y(t) = (t + 2)u, где Д(u) = 20.
5. Случайная функция $x(t) = (t^2 - 1)u$, где u – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу (0, 20). Найти реализации функции x(t), если u = 8. Найти сечение x(t), соответствующее фиксированному значениями аргумента t = 5.
6. Найти M(x(t)), Д(x(t)), $к_x(t_1, t_2)$, если $x(t) = ut^3 - 6t + 1$, где u – случайная величина, причем M(u) = 8, Д(u) = 5.
7. Доказать, что при умножении случайной функции x(t) на неслучайный множитель φ(t) корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$.
8. Найти нормированную взаимную корреляционную функцию $x(t) = tu^2$ и y(t) = (t – 1)u, где Д(u) = 10.

9. Известна корреляционная функция $к_x$ случайной функции x(t). Найти корреляционную функцию $y(t) = x(t)(t^2 - 1)$.
10. На вход усилительного звена подается случайная функция x(t), математическое ожидание и корреляционная функция которой известны: m(x)t = t – 1,
$k_x(t_1, t_2) = e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2}$. Найти $M_y(t)$, $K_y(t_1, t_2)$, если коэффициент усиления k = 6, y(x) = 6x(t).
11. Доказать, что взаимная корреляционная функция случайных функций x(t) и y(x) равна взаимной корреляционной функции центрированных функций $x^0(t)$ и $y^0(x)$.
12. Известна дисперсия Дx(t) случайной функции x(t). Найти дисперсию случайной функции y(x) = x(t) + 4.
13. Найти: а) M(x(t)), б) $k_x(t_1, t_2)$, в) $Д_x(t)$, если x(t) = usin2t, где u – случайная величина, причем M(u) = 4, Д(u) = 7.

14. Доказать, что математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых.

15. Найти взаимно корреляционную функцию двух случайных функций: $x(t) = t^3u$, $y(x) = t^4u$, где u – случайная величина, причем Д(u) = 7.

16. Случайная функция $x(t) = (t^3 - 1)u$, где u – случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу (0, 20). Найти реализацию функции x(t) при u = 3 и найти сечение x(t), соответствующее фиксированному значению аргумента t =5.

Лукерьянова Елена Александровна

Случайные процессы
Методические указания к практическим занятиям для студентов специальности
010101 Математика

Редактор Н.А. Леготина

Подписано к печати	Формат 60х84/16	Бумага тип. №1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,25	Уч.-изд. л.2,25
Заказ	Тираж 50	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет