МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

# Геометрия

Материалы для практических занятий по дисциплинам
«Аналитическая геометрия» и «Геометрия»
для студентов направлений 010100 «Математика» и
050100 «Педагогическое образование»
(профиль «Математическое образование»)

Курган 2013

**Кафедра** алгебры, геометрии и методики преподавания математики

**Дисциплина:** «Геометрия», «Аналитическая геометрия»
(направления 010100 «Математика» , 050100 «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование»)

**Составили:** старший преподаватель С. В. Бреславец
старший преподаватель С. М. Коростелева

Утверждены на заседании кафедры «13» декабря 2012 г.
Рекомендованы методическим советом университета «9» апреля 2013 г.

СОДЕРЖАНИЕ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ СОВЕТЫ СТУДЕНТАМ-ПЕРВОКУРСНИКАМ

### Лекция, как ее слушать и записывать

1 Лекция – основной вид обучения в вузе.

2 На лекции излагаются основные положения теории, ее понятия и законы, приводятся факты, показывающие связь теории с практикой.

3 Накануне лекции необходимо повторить содержание предыдущей, а затем посмотреть тему очередной лекции по программе.

4 Полезно вести запись лекций, для непонятных вопросов оставлять место, которое будет заполнено, но уже вне аудитории при работе над темой лекции с учебными пособиями.

5 Записи лекций следует вести в отдельной тетради, оставляя место для дополнений во время самостоятельной работы над темой каждой лекции.

6 При конспектировании лекций выделяйте главы и разделы, параграфы, подчеркивайте основное.

### Практическое занятие, как к нему готовиться

1 Практическое занятие – наиболее активный вид учебных занятий в вузе. Он предполагает самостоятельную работу над лекциями и учебными пособиями.

2 Назначение практических занятий по геометрии – научить студентов методам решения геометрических задач, сформировать у них навыки самостоятельного применения изученной теории в курсе геометрии, закрепить эту теорию.

3 К каждому практическому занятию нужно готовиться. Подготовку следует начинать с повторения теории (по записям в конспекте или по учебному пособию). После этого нужно решить задачи из предложенного домашнего задания.

### Организация самостоятельной работы

1 Бюджет времени студента определяется временем, отведенным на занятия по расписанию и на самостоятельную работу. Задание и материал для самостоятельной работы даются во время учебных занятий, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой.

2 Для выполнения всего объема самостоятельной работы необходимо заниматься в среднем 4 часа ежедневно, то есть по 24 часа в неделю. На самостоятельную работу по геометрии еженедельно следует расходовать по 3 – 4 часа.

3 Начинать самостоятельные занятия следует в первые же дни семестра, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Полезно для этого составить расписание порядка дня.

**Тема 1  Элементы векторной алгебры на плоскости и в пространстве**

**Теоретические вопросы**

1 Дать определения вектора.
2 Как от заданной точки отложить данный вектор?
3 Какой вектор называется суммой двух данных векторов? Сформулировать: правило треугольника сложения двух векторов, правило трех точек.
4 Перечислить свойства сложения векторов.
5 Сформулировать правило параллелограмма сложения двух векторов.
6 В чем состоит правило многоугольника сложения нескольких векторов?
7 Какие два вектора называются противоположными?
8 Какой вектор называется разностью двух векторов?
9 Сформулировать правила построения разности двух данных векторов.
10 Сформулировать определения коллинеарных и компланарных векторов.
11 Дать определение произведения вектора на число. Сформулировать свойства.
12 Дать определение базиса. Ортонормированный базис.
13 Что называется координатами вектора в данном базисе?
14 Сформулировать теорему о координатах линейной комбинации векторов и следствия из нее.
15 Сформулировать определение скалярного произведения векторов. Перечислить свойства.
16 Чему равно скалярное произведение векторов в координатах?
17 Каков геометрический смысл скалярного произведения векторов?
18 Каков геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе?
19 Что такое направляющие косинусы вектора? Какова связь между ними?

Задачи

**Равенство и коллинеарности векторов**

1 Верны ли предложения:

а) $\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$;

б) $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right| \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$;

в) $\overline{AB} = \overline{BA}$?

Дать обоснование в каждом случае.

2 Записать в векторной форме необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник ABCD был параллелограммом.

3 Для произвольного треугольника ABC точки M, N и P – соответственно середины сторон AC, AB и BC. Среди указанных ниже пар векторов найти пары равных и пары коллинеарных, но не равных векторов:

а) $\overline{AN}$ и $\overline{MP}$; б) $\overline{NP}$ и $\overline{CA}$; в) $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$.

4 Начертите параллелограмм ABCD и возьмите точку O – точку пересечения диагоналей. Укажите, какие из следующих пар векторов равны, а какие коллинеарны, но не равны:

а) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; в) $\overline{BC}$ и $\overline{CB}$;г) $\overline{AO}$ и $\overline{BC}$; д) $\overline{OA}$ и $\overline{CO}$.

5 Пусть ABCD $A_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед, O – точка пересечения диагоналей, M; N; P; Q – середины ребер $AA_1$, $BB_1, CC_1, DD_1$ соответственно. Доказать, что

а) $\overline{MO}$ = $\overline{OP}$; б) $\overline{QO}$ = $\overline{ON}$; в) $\overline{MN}$ = $\overline{QP}$.

## Сложение и вычитание векторов

1 Пусть ABCD - параллелограмм, O – точка пересечения диагоналей, M, N, P и Q – середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Построить на чертеже следующие векторы:

а) $\overline{MO}$ - $\overline{OA}$; б) $\overline{OC}$ - $\overline{OP}$; в) $\overline{OQ}$ - $\overline{OB}$; г) $\overline{AC}$ - $\overline{PD}$; д) $\overline{AN}$ - $\overline{MQ}$;

е) $\overline{OA}$ - $\overline{PN}$; ж) $\overline{AB}$ - $\overline{OC}$.

2 Упростить выражение: ( $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$ + $\overline{CM}$ ) + ( $\overline{MD} - \overline{KD}$), используя правило многоугольника.

3* Дан параллелограмм ABCD. Доказать, что $\overline{XA} + \overline{XC} = \overline{XB} + \overline{XD}$, где X – любая точка пространства. Доказать обратное утверждение.

4 Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

5 Лодка движется с одного берега реки на другой с собственной скоростью 3 км/ч. Скорость течения реки $\sqrt{3}$ км/ч. Найти величину и направление истинной скорости лодки.

6 Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \overline{AB_1} + \overline{BC_1} + \overline{CA_1}$.

## Умножение вектора на число. Признак коллинеарности двух векторов

1 Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Построить каждый из следующих векторов: $2\overline{a}$; $-\frac{3}{5}\overline{a}$;

$\sqrt{2}\overline{a}$; $-\sqrt{3}\overline{a}$; $2\overline{a} + \frac{1}{4}\overline{b}$; $-\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$.

2*Точка C – середина отрезка AB, O – произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$.

2 Доказать с помощью векторов теорему о средней линии треугольника.

3 Доказать с помощью векторов теорему о средней линии трапеции.

4 Дан треугольник ABC и произвольная точка O пространства. Пусть M – точка пересечения каких-либо двух медиан треугольника. Доказать, что $\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$.

5 Пусть ABCD - параллелограмм, а O – точка пересечения диагоналей. Полагая, что $\bar{a} = \overline{AO}$, $\bar{b} = \overline{BO}$, выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$.

7*Доказать, что сумма векторов, соединяющих центроид треугольника с его вершинами, равна $\bar{o}$.

8 Выяснить, коллинеарны ли следующие пары векторов:
а) $\overline{p_1} = \bar{a} - 2\sqrt{3}\bar{b}$ и $\overline{p_2} = \sqrt{3}\bar{a} - 6\bar{b}$;
б) $\overline{q_1} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\overline{q_2} = \bar{a} + 2\bar{b}$

при условии, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - неколлинеарны.

9 В тетраэдре ABCD точка E лежит на ребре AB и делит отрезок AB в отношении $\lambda = 3 \left( = \frac{AE}{EB} \right)$. Полагая, что $\bar{a} = \overline{AE}$, $\bar{b} = \overline{AC}$, $\bar{c} = \overline{AD}$, выразить через $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторы $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{ED}$ и $\overline{EC}$.

10 В треугольнике ABC векторы $\overline{AK}$, $\overline{BL}$, $\overline{CM}$ направлены по медианам. Выразить их через векторы $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AC}$.

11 Даны четыре производные точки пространства: A, B, C, D. Точки M и P – середины отрезков AB и CD соответственно. Доказать, что $2\overline{MP} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

12 Даны три точки: A, B, C. $M_1 = Z_A(M)$, $M_2 = Z_B(M_1)$, $M_3 = Z_C(M_3)$. Доказать, что положение точки $M_0$ - середины отрезка $MM_3$ - не зависит от выбора точки M. Как расположена точка $M_0$ относительно точек A, B, C? Решить задачу векторным методом и геометрически.

13 Даны точки: A, B, C. Построить точку X так, чтобы:
а) $2\overline{XA} - \overline{XB} + 3\overline{XC} = \overline{O}$;
б) $3\overline{XA} - \overline{XB} + 3\overline{XC} = \overline{O}$.

### Векторный базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

1 Пусть ABCD - параллелограмм, E и F – середины противоположных сторон BC и AD, O – точка пересечения диагоналей; $\overline{e_1} = \overline{AB}$, $\overline{e_2} = \overline{AD}$ - базисные векторы. Определить координаты следующих векторов:

| | | | |
|---|---|---|---|
| а) $\overline{AC}$; | в) $\overline{FC}$; | д) $\overline{EO}$; | ж) $\overline{EA}$. |
| б) $\overline{OD}$; | г) $\overline{BC}$; | е) $\overline{BD}$; | |

2 Построить векторы $\bar{a}_1(1;2)$, $\bar{a}_2(2;-1)$, $\bar{a}_3(0;-1)$, $\bar{a}_4(-1;-2)$, $\bar{a}_5(2;0)$, $\bar{a}_6(-2;\frac{1}{2})$ в аффинном базисе $(\overline{e_1};\overline{e_2})$ и ортонормированном базисе $(\bar{i};\bar{j})$.

3 Даны векторы $\bar{a}(1;-2)$, $\bar{b}(\frac{1}{2};1)$, $\bar{c}(2;0)$. Определить координаты векторов: $\bar{p}=\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}-\frac{1}{2}\bar{c}$, $\bar{q}=\frac{3\bar{a}-5\bar{b}}{2}$, $\bar{r}=\frac{\bar{c}-2\bar{b}}{3}$.

4 Векторы $\overline{AB}$ (1; 3) и $\overline{AC}$ (2; 1) совпадают со сторонами треугольника. Определить координаты векторов $\overline{AM_1}, \overline{BM_2}, \overline{CM_3}$, совпадающих с его медианами.

5 Даны векторы $\bar{a}(3;-4)$, $\bar{b}(0;-3)$, $\bar{c}(3;\sqrt{7})$. Найти их модули. Определить координаты единичных векторов, сонаправленных с данными.

6 Найти координаты векторов $\bar{m}, \bar{n}, \bar{p}$, если

а) $|\bar{m}|=3, (\hat{\bar{i};\bar{m}})=30^{\circ}$; б) $|\bar{n}|=5, (\hat{\bar{i};\bar{n}})=135^{\circ}$; в) $|\bar{p}|=1, (\hat{\bar{i};\bar{p}})=-60^{\circ}$.

7 На плоскости даны два вектора $\bar{u}(2;1)$ и $\bar{v}(1;0)$. Найти коэффициенты разложения вектора $\bar{a}(3;1)$ по векторам $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

8 Среди векторов $\bar{a}(3;7)$, $\bar{b}(-2;1)$, $\bar{c}(6;14)$, $\bar{d}(2;-7)$, $\bar{l}(2;4)$ указать пары коллинеарных.

9 Пусть ABCD$A_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед, E, F и G – середины ребер $AA_1$, AD и $CC_1$ соответственно. Принимая векторы $\bar{l_1}=\overline{AA_1}, \bar{l_2}=\overline{AD}$ и $\bar{l_3}=\overline{AB}$ за базисные, найти координаты векторов: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EG}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{FG}$, $\overline{GD}$, $\overline{A_1C_1}$.

10 Даны пары векторов:

а) $\bar{a}(\frac{3}{2};3;-6)$ и $\bar{b}(-6;-12;8)$; б) $\bar{c}(-\frac{1}{3};\frac{5}{4};-2)$ и $\bar{d}(\frac{1}{5};-\frac{3}{4};\frac{6}{5})$; в) $\bar{l}(3\frac{3}{5};-3;4\frac{1}{2})$ и $\bar{f}(-10;8\frac{1}{3};-12\frac{1}{2})$.

Указать среди них пары коллинеарных векторов.

## Скалярное произведение векторов

1 Даны векторы $\bar{a}(-1;5)$, $\bar{b}(3;5)$, $\bar{c}(-2;8)$ и $\bar{d}(3;1)$. Вычислить:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; в) $\sqrt{\bar{d}^2}$; д) $(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{c}-\bar{d})$.

б) $\bar{a}\cdot\bar{c}$; г) $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\bar{d}$;

2 Даны векторы $\bar{a}(4;-2;-4)$, $\bar{b}(2;4;3)$, $\bar{c}(0;1;-1)$. Вычислить:

а) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; в) $\sqrt{\bar{a}^2}$; д) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

б) $\bar{a}\cdot\bar{c}$; г) $(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{c})$;

3 Дана параллелограмм OABC. Пусть $\overline{OA}=\overline{CB}=\bar{a}$, $\overline{OC}=\overline{AB}=\bar{b}$. Дать геометрическое истолкование формул:

а) $(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$; б) $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2$.

4 Даны векторы $\bar{a}(1;5;1)$, $\bar{b}(1;-5;2)$, $\bar{c}(2;1;\frac{3}{2})$ и $\bar{d}(0;0;1)$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по ним узнать, образуют ли они острый, прямой или тупой углы.

5 В пространстве дан четырехугольник ABCD и известны координаты векторов $\overline{AB}$ (1; 6; - 2), $\overline{BC}$ (5; 3; - 1) и $\overline{CD}$ (1; - 7; 1). Доказать, что диагонали AC и BD четырехугольника взаимно перпендикулярны.

6 Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны (с помощью скалярного произведения).

7 Найти косинус угла между векторами, заданными своими координатами:

а) $\overline{a_1}(2;-1;3)$ и $\overline{b_1}(1;-4;3)$; б) $\overline{a_2}(2;-2;1)$ и $\overline{b_2}(3;0;-4)$; в) $\overline{a_3}(0;-1;5)$ и $\overline{b_3}(7;5;1)$.

8 Дан треугольник ABC и известны координаты векторов $\overline{AB}$ (-1; -1; $-\sqrt{2}$) и $\overline{BC}$ ($\sqrt{3};\sqrt{3};-\sqrt{6}$). Найти углы треугольника.

9 Найти направляющие косинусы вектора $\overline{a}(5;-\sqrt{2};3)$.

10 С помощью скалярного произведения доказать теорему о двух перпендикулярах: если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым плоскости, то она перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

11 Доказать, что для любого тетраэдра ABCD выполняется равенство $\overline{BC}\cdot\overline{DA}+\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AB}\cdot\overline{DC}=0$.

12 Вектор $\overline{x}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}(3;2;2)$, $\overline{b}(18;-22;-5)$ и образует с вектором $\overline{j}$ тупой угол. Найти его координаты, если $|\overline{x}|=14$.

13 Найти скалярное произведение векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, не используя угол между ними.

14 Найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, не используя угол между ними.

15 Дан треугольник ABC. Определить вид этого треугольника, если известно, что $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AC^2}$. (Предложить не менее четырех способов решения.)

16 Используя скалярное произведение векторов, доказать, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

17 Доказать, что сумма квадратов диагоналей любого четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон без учетверенного квадрата длины отрезка, соединяющего середины его диагоналей.

## Тема 2 Метод координат на плоскости и в пространстве

### Теоретические вопросы

1 Как задается аффинная (прямоугольная декартова) система координат на плоскости? В пространстве? Чем они отличаются?

2 Какой вектор называется радиус-вектором точки?

3 Что называется координатами точки в данной аффинной (прямоугольной декартовой) системе координат?

4 Могут ли две различные точки на плоскости (в пространстве) иметь одинаковые координаты? Ответ обосновать.

5 Укажите знаки координат точек по четвертям; по октантам.

6 Основные задачи аффинной системы координат.

7 Основные задачи прямоугольной декартовой системы координат.

8 Алгебраическая линия. Виды уравнений.

9 Алгебраическая поверхность. Виды уравнений.

10 Схема составления уравнения линии по характеристическому свойству.

Задачи

**Аффинная и прямоугольная декартова система координат на плоскости. Основные задачи на координаты**

1 В прямоугольной декартовой и аффинной системах координат построить следующие точки: A ( - 1; 0), B ( - 2; 1), C (1; 1), D ( - 3; 2) , E (0; - 2), F ( - 3; 3).

2 Построить точки A ( - 2; 3; 4;) и B (2; - 3; - 2) в прямоугольной декартовой и в аффинной системах координат.

3 В аффинной системе координат даны координаты вектора $\overline{a_i}$ и точки $M_i$. Определить координаты конца вектора $\overline{a_i}$, если он отложен от точки $M_i$:

а) $\overline{a_1}$ (3; 4) , $M_1$ (- 2; 3); б) $\overline{a_2}$ (-3; 0) , $M_2$ (0; 0).

4 Начало координат помещено в центре квадрата, сторона которого равна 2*a*. Найти координаты вершин квадрата, если:

а) стороны квадрата параллельны осям координат;

б) диагонали квадрата лежат на осях координат.

5 Вершины четырехугольника находятся в точках A (1; - 3), B (8; 0), C (4; 8) и D (- 3; 5). Доказать, что ABCD – параллелограмм.

6 Вершины четырехугольника находятся в точках A (1; 1), B (2; 3), C (5; 0) и D (7; - 5). Доказать, что ABCD – трапеция.

7 Даны три вершины параллелограмма: A (- 1; 3), B (2; - 5), C (0; 4). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

8 Даны две вершины равностороннего треугольника A (- 3; 2), B (1; 4). Найти третью вершину C.

9 Даны две смежные вершины параллелограмма A (- 4; 4), B (2; 8) и точка M (2; 2) пересечения его диагоналей. Определить две другие вершины C и D.

10 Опеделить координаты точек, делящих отрезок A (2; 3), B (-1;2) в отношении $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = \frac{1}{2}$.

11 Доказать, что в аффинной системе координат точка M (*x*; y) пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ имеет координаты $x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$. Найти координаты точки пересечения медиан, если его вершины имеют координаты:

а) A (3; 1), B (-1; 4), C (1; 1);

б) A (-2; 3), B (5; -2), C (-3; -1).

12 Даны координаты вершин треугольника ABC: A (5; -4), B (-1; 2), C (5; 1). Найти длину медианы AM.

13 Даны координаты вершин треугольника ABC: A (4; 1), B (7; 5), C (-4; 7). Вычислить длину биссектрисы AD угла A.

14 Доказать, что треугольник ABC – прямоугольный, если A (1; 1), B (2; 5), C (-6; 7). Указать вершину прямого угла (применить обратную теорему Пифагора).

15 На оси абсцисс айти точку, равноудаленную от точек A (1; 2) и B (-3; 4).
16 На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек A (-3; 5) и B (6; 4).
17 Определить рдиус окружности, которая проходит через точку A (-24 1) и имеет центр в точке C (2; -3).
18 Дан четырехугольник ABCD: A (-1; 7), B (5; 5), C (7; -5), D (3; -7). Доказать, что четырехугольник, вершинами которого служат середины сторон данного четырехугольника, есть параллелограмм.
19 Дана точка M (2; -1; 1). Найти координаты точек, симметричных с точкой M:
а) относительно начала координат;
б) относительно координатных плоскостей $Oxy, Oxz, Oyz$;
в) относительно координатных осей.
20 Даны тройки точек:
а) $A_1(3;2;1), B_1(5;3;-2), C_1(1;1;4)$;
б) $A_2(1;-3;5), B_2(3;-1;7), C_2(0;4;3)$;
в) $A_3(-1;0;4), B_3(2;3;1), C_3(8;9;-5)$.
Указать среди них тройки точек, лежащих на одной прямой.
21 Доказать, что треугольник ABC: A (3; 5; - 4), B (-1; 1;2), C (-5; -5;-2) является равнобедренным.
22 Доказать, что четырехугольник, вершины которого находятся в точках A (7; 2; 4), B (4; -4;2), C (6; -7;8), D (9; -1; 10) является квадратом.
23 Даны вершины треугольника A (2; -1; 4), B (3; 2; -6), C (-5; 0;2). Вычислить длину медианы AM.
24 Найти радиус сферы, проходящей через точку A (-2; 0; 2) и имеющей центр в точке C (1; 1; 6).
25 На прямой, проходящей через точки A (1; 0; 4) и B (3; -1; 2), найти точку C такую, чтобы AC = 3 AB и точка B лежала между точками A и C.
26 Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB: A (2; -1; 7) и B (4; 5; -2). Найти координаты делящей точки.
27 На оси O*x* найти точку, равноудаленную от точек A (1; 2; 3) и B (-2; 1; 3)
28 В треугольнике с вершинами A (5; 0; 0), B (1; 1; 1), C (3; -1;2) найти внутренние углы.

## Геометрическое истолкование уравнений и неравенств на плоскости

1 Какие из точек A (1; 3), B (-2; 5), C (2; 1), E (1; 0), D $(2;3\sqrt{2})$ принадлежат линии, определенной уравнением $2x^2 - y^2 + 3x + 4 = 0$?
2 Даны уравнения:
а) $x^2 + 2y + x - 1 = 0$; в) $2x^2 - 3y^2 + x - y = 0$;
б) $x^2 - y^2 = 0$; г) $3x^2 - y^2 + 5 = 0$.
Указать, какие из фигур, определяемых данными уравнениями, содержат начало координат.
3 Найти точки пересечения линий, определяемых уравнениями:
а) $x^2 + y^2 = 32$ и $x - y = 0$;

б) $x^2 - 2xy + 4x - 3 = 0$ и $5x - 4y - 1 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 = 0$ и $x^2 + y^2 = 4$.

4 Определить фигуры, заданные в прямоугольной декартовой системе координат следующими уравнениями:

а) $x - y = 0$; е) $x^2 - y^2 = 0$;

б) $y^2 - 2xy = 0$; ж) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 0$

в) $xy + y^2 = 0$; з) $(x-3)^2 + y^2 + 5 = 0$;

г) $y + 3 = 0$; и) $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$.

д) $x - 5 = 0$.

5 Исследовать фигуры, заданные уравнениями:

а) $|x| = 1$; б) $|x| = |y|$.

6 Построить фигуры, заданные системами неравенства:

а) $\begin{cases} x > 0, \\ y \le 1. \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ y > 0. \end{cases}$; в) $\begin{cases} |x| \le 2, \\ |y| \le 3. \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ x \ge 0, \\ y \le 0/ \end{cases}$; д) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 15, \\ x > 2. \end{cases}$.

7 Найти фигуру, координаты точек которой удовлетворяют неравенству $|x| + |y| \le 1$.

8 Даны параметрические уравнения линии:

а) $\begin{cases} x = 3t \\ y = t + 5 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases}$; г) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos t \\ y = 5 \cdot \sin t \end{cases}$.

Составить уравнения этих линий в прямоугольных декартовых координатах и определить вид линии.

9 Найти уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных:

а) $A_1(-3;5), B_1(1;-1)$;

б) $A_2(-3;1), B_2(7;5)$.

10 Составить уравнение множества точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до осей координат равна 5.

11 Даны две точки А ( - *a*; 0) и В ( *a*; 0). Составить уравнение множества точек, из которых отрезок АВ виден под прямым углом. По уравнению определить вид фигуры.

12 Даны точки А ( - 5; 1) и В ( 3; 5). Составить уравнение множества точек, из которых отрезок АВ виден под прямым углом.

13 Найти множество точек М, удовлетворяющих условию $AM^2 - BM^2 = 5$, где А (3; -1), В (1; 2).

14 Найти множество точек М плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек А и В есть величина постоянная, то есть $AM^2 - BM^2 = a^2$.

15 Даны точки $M_1(2;-3;6)$, $M_2(0;7;0)$, $M_3(3;2;-4)$, $M_4(2\sqrt{2};4;-5)$, $M_5(1;-4;-5)$. Установить, какие из них лежат на поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, и какие не лежат на ней?

16 Установить, какие фигуры в пространстве определяются следующими уравнениями:

1) $x = 0$; 2) $y = 0$; 3) $y + 2 = 0$;
4) $z = 0$; 5) $x - 2 = 0$ 6) $z + 5 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; 8) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 49$;
9) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0$; 10) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 5 = 0$; 11) $x \cdot y = 0$;
12) $x \cdot z = 0$; 13) $y \cdot z = 0$; 14) $x^2 - 4x = 0$.

17 Найти уравнение множества точек, равноудаленных от двух точек $M_1(1;2;-3)$ и $M_2(3;2;1)$.

18 Найти уравнение множества точек, разность квадратов расстояний которых до точек $F_1(2;3;-5)$ и $F_2(2;-7;-5)$ есть величина постоянная, равная 13.

19 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$; в) $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ z = 0. \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ y = 0. \end{cases}$; е) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x = 0. \end{cases}$; ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 29, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$.

## Тема 3 Прямая линия на плоскости

### Теоретические вопросы

1 Какими способами может быть задана на плоскости прямая? Обосновать каждый способ.

2 Какие векторы называются направляющим и нормальным векторами прямой? Сколько направляющих (нормальных) векторов имеет прямая?

3 Какое уравнение прямой называется общим уравнением? Как находятся координаты направляющего и нормального векторов из общего уравнения прямой? Каков геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении прямой?

4 Написать уравнения прямой:

а) по точке и направляющему вектору (параметрические, каноническое);

б) по двум точкам; уравнение прямой «в отрезках»;

в) уравнение прямой с угловым коэффициентом. В чем заключается геометрический смысл углового коэффициента?

г) уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором.

5 Как могут располагаться две прямые на плоскости?

6 Сформулируйте аналитические условия взаимного расположения двух прямых, если прямые заданы:

а) общими уравнениями;

б) уравнениями с угловыми коэффициентами.

7 Как вычислить угол между прямыми, заданными общими уравнениями?

8 Как вычислить угол между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами?

9 Сформулировать определение и записать уравнение:
а) пучка пересекающихся прямых;
б) пучка параллельных прямых.
10 Как находится расстояние:
а) от точки до прямой;
б) между двумя параллельными прямыми?
11 Какой вид имеет нормальное уравнение прямой? Что нужно знать, чтобы его составить?
12 Как общее уравнение прямой привести к нормальному виду?
13 В чем заключается геометрический смысл знака многочлена $Ax+By+C$?
14 Каковы условия того, что точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ лежат по одну (по разные) сторону от прямой $Ax+By+C=0$?

Задачи

## Способы задания прямой. Уравнения прямой

1 Написать уравнение прямой:
а) проходящей через точки А (-1; 1) и В (2; 5);
б) проходящей через точку А (2; -6) и параллельной вектору $\overline{p}(1;1)$;
в) отсекающей на осях координат отрезки *a* = 3, *b* = -2;
г) проходящей через точку В (-1; 2) и параллельной оси Оу;
д) проходящей через точку А (3; 5) и параллельной оси Ох;
е) проходящей через точку А (2; 2) и параллельной прямой $x+y=0$.
2 Составить уравнение прямой АВ, если А (5; -3), В (-1; -2).
3 Дан треугольник АВС: А (0; 0), В (0; 2), С (-4; 0). Составить уравнения прямых, содержащих стороны треугольника АВС.
4 Найти точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением: $x+2y+3=0$.
5 Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: $x+2y+3=0$ и $4x+5y+6=0$.
6 Составить уравнение прямой, параллельной оси x и проходящей через точку (2; 3); параллельной оси y и проходящей через точку (2; -3); проходящей через начало координат и точку (2; 3).
7 Доказать, что три прямые $x+2y=3$, $2x-y=1$ и $3x+y=4$ пересекаются в одной точке.
8 Найти координаты точки пересечения медиан (центроид) треугольника с вершинами
А (1; 0), В (2; 3), С (3; 2).
9 Среди прямых, заданных уравнениями, указать пары параллельных прямых:
1) $x+y=1$; 4) $y=4$;
2) $y=x-1$; 5) $y-3=0$
3) $x-y=2$; 6) $2x+2y+3=0$.
10 Найти угловые коэффициенты прямых, заданных уравнениями:

1) $x+2y+3=0$;   3) $3x-2y+6=0$;

2) $3x+4y=12$;   4) $4x-2y-10=0$.

11 Найти острые углы, которые образует заданная прямая с осью Ox:

а) $2y=2x+3$; б) $x\sqrt{3}-y=2$; в) $x+y\sqrt{3}+1=0$.

12 Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=1$ с прямой $y=3x+1$.

13 В треугольнике ABC: A (-1; 3), B (0; 4), C (-2; -2). Написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины A.

14 В треугольнике ABC: A (2; 6), B (-4; 0), C (4; 2). Написать уравнение средних линий треугольника.

15 Установить, какие из следующих троек точек лежат на одной прямой:

а) (2; 1), (-1; 4), (-7; 10);   в) (1; 0), (0; 1), (-2; 3);

б) (0; 5), (7; 1), (-2; 3);   г) (2; 1), (10; 3), (5; 2).

16 Найти длины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми:

а) $3x-2y+6=0$;

б) $x+y+6=0$;

в) $2x-y+3=0$.

Составить уравнения этих прямых в отрезках.

17 Прямая задана параметрическими уравнениями $x=-1+4t$, $y=2-t$

а) найти направляющий вектор данной прямой;

б) определить координаты точек, имеющих параметры: $t_1=3$, $t_2=0$, $t_3=-2$, $t_4=-1$;

в) определить параметры точек пересечения данной прямой с осями координат;

г) среди точек $M_1(-3;1)$, $M_2(3;1)$, $M_3(15;-2)$, $M_4(0;\frac{7}{4})$, $M_5(2;2)$ найти точки, принадлежащие данной прямой.

18 Даны прямые: а) $3x-y+5=0$; б) $x+y-3=0$; в) $x+3y=0$. Написать уравнение каждой из них в параметрическом виде.

19 Записать общие уравнения следующих прямых, заданных параметрически:

а) $x=-2+3t$, $y=4-t$; б) $x=t$, $y=2$; в) $x=5+t$, $y=3t$.

20 Даны середины сторон треугольника M (2; -1), N (-3; 3) и P (-1; 0). Составить уравнения его сторон.

21 Дана прямая $l: 2x-5y+3=0$. Определить:

а) координаты направляющего вектора $\overline{u}$;

б) координаты нормального вектора $\overline{n}$;

в) угловой коэффициент $k$;

г) отрезки $a$ и $b$, отсекаемые на осях координат данной прямой.

22 Написать уравнение прямой:

а) проходящей через точку A (-1; 3) и перпендикулярной к вектору $\overline{n}$ (2; 1);

б) проходящей через точку B (5; 10) и перпендикулярной к прямой $x-y+1=0$;

в) проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 1 = 0$.

23 Написать уравнение прямой, проходящей через точку P (1; 2) и отсекающей равные отрезки на осях координат.

24 Вершины треугольника находятся в точках A (-4; -5), B (4; 1) и $C(-\frac{1}{2};7)$.

Написать уравнения:

а) биссектрисы внутреннего угла A;

б) высоты, опущенной из вершины C.

25 Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

26 Составить уравнение прямой, которая проходит через точку C (1; 1) и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 2.

**Взаимное расположение двух прямых. Пучки прямых. Угол между прямыми**

1 Составить уравнение прямой, симметричной данной прямой $a: 2x + y + 1 = 0$, относительно точки A (2; 3).

2 Даны пары прямых:

а) $x - y = 0$ и $x = 3$;

б) $y = 0$ и $2x - 5 = 0$;

в) $2x + 3y - 6 = 0$ и $x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$;

г) $x + y - 1 = 0$ и $x - y = 0$;

д) $2x + 2y - 1 = 0$ и $x - y = 0$.

Выяснить, какие из данных пар прямых взаимно перпендикулярны.

3 В пучке $2x - y + 1 + \lambda(3x - 2y + 5) = 0$ найти прямую, параллельную прямой $5x - 3y + 1 = 0$.

4 В пучке $\lambda(3x - 4y + 1) + x - y = 0$ найти прямую, проходящую через начало координат.

5 Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная к прямой $x + y = 0$. Написать уравнение этой прямой.

7 На плоскости проведена прямая так, что точка A (1; 2) является серединой ее отрезка, заключенного между осями координат. Написать уравнение этой прямой.

8 При каком значении параметра $t$ прямые, заданные уравнениями $3tx - 8y + 1 = 0$ и $(1 + t)x - 2ty = 0$, параллельны?

9 Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух параллельных прямых:

а) $2x - 5y + 6 = 0$; $2x - 5y - 8 = 0$;

б) $3x + 5y + 8 = 0$; $6x + 10y + 4 = 0$.

10 Найти угол, образованный двумя прямыми, заданными в определенном порядке своими уравнениями в каждом из следующих случаев (предполагается, что плоскость ориентирована при помощи системы координат):

а) $3x+y-6=0$; $2x-y+5=0$; б) $\sqrt{3}x-3y+6=0$; $\sqrt{3}x-y-5=0$;

в) $x-2y+1=0$; $6x+3y-2=0$.

11 Через точку ( -1; 5) провести прямые, наклоненные к прямой $x-y+3=0$ под углом, тангенс которого равен: а) $\frac{3}{5}$; б) $-\frac{3}{5}$.

11 Даны уравнения сторон треугольника АВ: $4x-y+5=0$, ВС: $2x+3y-1=0$, АС: $x+y-3=0$. Определить тангенсы его внутренних углов.

12 Доказать, что прямые $l_1, l_2, l_3$ не проходят через одну точку: $l_1: 3x-y+4=0, l_2: 2x-y+1=0, l_3: x-2y=0$.Найти уравнение прямой, проходящей через точку А = $l_2 \cap l_3$ параллельной прямой $l_1$.

13 Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

1) $3x-y+5=0$, $x+3y-1=0$; 2) $3x-4y+1=0$, $4x-3y+7=0$;

3) $6x-15y+7=0$, $10x+4y-3=0$; 4) $9x-12y+5=0$, $8x+6y-13=0$;

5) $7x-2y+1=0$, $4x+6y+17=0$; 6) $5x-7y+3=0$, $3x+2y-5=0$.

Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.

14 Определить, при каких значениях $m$ и $n$ две прямые $l_1: mx+8y+n=0, l_2: 2x+my-1=0$:

а) параллельны;

б) совпадают;

в) перпендикулярны.

15 Определить, при каком значении $m$ две прямые $l_1: (m-1)x+my-5=0, l_2: mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

16 Определить, при каких значениях $a$ и $b$ две прямые $l_1: ox-2y-1=0, l_2: 6x-4y-b=0$:

а) имеют одну общую точку;

б) параллельны;

в) совпадают.

**Расстояние от точки до прямой. Геометрический смысл знака многочлена** $Ax+By+C$

1 Найти проекцию точки Р (-6; 4) на прямую $x-5y+3=0$.

2 Найти точку Q, симметричную точке Р (-5; 13) относительно прямой $2x-3y-3=0$.

3 Даны вершины треугольника А (1; -2), В (5; 4), С (-2; 0). Составить уравнение биссектрис его внутреннего и внешнего углов при вершине А.

4 Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Вычислить его площадь.

5 Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x-7y+5=0$, $5x+5y-3=0$, в котором лежит начало координат.

6 На оси Ох найти точку, равноудаленную от прямых $x+3y+2=0$, $3x-y+1=0$.

7 Найти расстояние от точки до прямой в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(-1;5)$, $4x+3y-5=0$; б) $M_2(\frac{3}{5};3)$, $5x-12y-6=0$;

в) $M_3(-3;4)$, $x+2y+3=0$.

8 Найти расстояние от точек А (1; 2), В (-1; 3), С (1; 6) до прямой $3x-4y+1=0$.

9 Найти длины высот треугольника, стороны которого заданы уравнениями $y-2=0$, $2x-y-12=0$, $4x-11y+30=0$.

10 Через точку М (-1; 4) проведена прямая, расстояние которой до точки Q (-2; -1) равно 5. Составить ее уравнение.

11 В каждом из следующих случаев найти уравнение биссектрис углов, образованных прямыми:

а) $x-3y+2=0$ и $3x+y-1=0$;

б) $x+2y+5=0$ и $4x-2y-3=0$.

12 Составить уравнение биссектрисы тупого угла, образованного прямыми $x+2y-7=0$ и $4x+2y+3=0$.

13 Составить уравнение окружностей, касающихся двух данных прямых $3x+4y-10=0$ и $5x-12y+23=0$ и имеющих радиус, равный 5.

14 Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $2x-y+7=0$ и $3x-6y-8=0$, в котором лежит точка М (1; 2).

15 Дана прямая $3x-2y+12=0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по разные стороны от данной прямой:

а) $A_1(1;0)$ и $A_2(-5;6)$;

б) $B_1(0;11)$ и $B_2(-5;0)$;

в) $O$ (0;0) и $P(1;1)$.

16 Найти проекцию точки М, заданной своими координатами, на прямую *l*, заданную своим уравнением М(5; -2), $(l): 2x-3y-3=0$.

Имеет место утверждение:

Пусть прямые $l_1$ и $l_2$, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Тогда внутренние области двух вертикальных острых углов, образованных этими прямыми, характеризуются неравенством $(A_1x+B_1y+C_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2)\cdot(A_1A_2+B_1B_2)<0$, а внутренние области двух вертикальных тупых углов – неравенством

$(A_1x+B_1y+C_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2)\cdot(A_1A_2+B_1B_2)>0$.

## Тема 4 Плоскость и прямая в пространстве

### Теоретические вопросы

1 Какими способами может быть задана плоскость в пространстве? Обосновать каждый способ.
2 Какие векторы называются направляющим и нормальным вектором плоскости? Сколько направляющих и нормальных векторов имеет плоскость?
3 Какое уравнение плоскости называется общим уравнением? Как находятся координаты нормального вектора из общего уравнения плоскости? Каков геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости?
4 Назовите уравнения плоскости, заданной:
а) точкой и двумя направляющими векторами (параметрические, детерминантное);
б) тремя точками; отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат;
в) точкой и нормальным вектором.
5 Как могут располагаться две плоскости в пространстве?
6 Сформулируйте аналитические условия взаимного расположения двух плоскостей, если плоскости заданы общими уравнениями.
7 Как вычислить угол между двумя плоскостями, заданными общими уравнениями?
8 Сформулировать определение и записать уравнение:
а) пучка пересекающихся плоскостей;
б) пучка параллельных плоскостей.
9 Как находится расстояние:
а) от точки до плоскости;
б) между двумя параллельными плоскостями?
10 В чем заключается геометрический смысл знака многочлена $Ax+By+Cz+D$?
11 Каковы условия того, чтобы точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ лежали по разные стороны от плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ (по одну сторону)?
12 Каковы способы задания прямой в пространстве?
13 Записать:
а) параметрические и канонические уравнения прямой (заданной точкой и направляющим вектором);
б) уравнения прямой, заданной двумя точками.
14 Как найти направляющий вектор прямой и точки, принадлежащие прямой, если прямая задана как линия пересечения двух плоскостей?
15 Как вычислить угол между двумя прямыми, заданными параметрическим или каноническими уравнениями?
16 Каковы случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве?
17 Записать векторные и координатные условия:
а) для двух скрещивающихся прямых;
б) для двух пересекающихся прямых (двух перпендикулярных прямых).
18 Каковы случаи взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве?

19 Записать условия:
а) пересечения (перпендикулярности) прямой и плоскости;
б) параллельности прямой и плоскости;
в) условие, когда прямая линия лежит в плоскости.
20 Как найти точку пересечения прямой и плоскости, если она существует?
21 Как вычислить угол между прямой и плоскостью, если известны направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости?
22 Как вычислить расстояние от точки до прямой в пространстве? (Указать два способа).
23 Как вычислить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми?

Задачи

**Способы задания плоскости. Уравнения плоскости**

1 Вычислить площадь треугольника, который отсекает плоскость $5x-6y+3z+120=0$ от координатного угла Oxy.

2 Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

3 Составить уравнения плоскостей:
а) проходящих через точку M (3; 2; 1) и параллельных каждой из координатных плоскостей;
б) проходящих через точку M (1; 2; 3) и через каждую из координатных осей;
в) проходящих через точки M (1; -1; 1) и N (-2; 3; 2) и параллельных каждой из координатных осей;
г) проходящих через ось Oz и равноудаленных от точек A (1; 5; 3) и B (2; -1; 1).

4 Найти уравнение плоскости:
а) проходящей через точку A (2; 0; 3) и параллельной векторам $\overline{p_1}(1;0;1)$ и $\overline{p_2}(2;1;3)$;
б) проходящей через точки $M_1(1;2;3)$ и $M_2(2;-1;3)$ и параллельной вектору $\overline{p}(1;2;2)$;
в) проходящей через точку A (1; 1; 1) и ось Ox;
г) проходящей через точки $M_1(1;2;3)$, $M_2(2;1;3)$ и $M_3(0;-1;2)$.

5 Даны вершины тетраэдра A (4; 0; 2), B (0; 5; 1), C (4; -1; 3), D (3; -1; 5). Написать:
а) уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной ребру CD;
б) уравнение плоскости, проходящей через вершину A и параллельной грани BCD.

6 Найти точки пересечения каждой из следующих плоскостей с осями координат:
а) $2x-y+3z-6=0$; б) $5x+2y+5z-10=0$; в) $x-2y+4z+4=0$; г) $x+y+z+2=0$.
Построить на плоскости изображение прямоугольной декартовой системы координат, построить изображение точек пересечения указанных плоскостей с осями координат; построить изображение следов каждой из плоскостей.

7 Указать особенности расположения следующих плоскостей по отношению к системе координат:

а) $x - z + 1 = 0$;
б) $x + 2y + 3z = 0$;
в) $x - y + 2 = 0$;
г) $x + 2z = 0$;
д) $x - 3 = 0$;
е) $y + z + 1 = 0$;
ж) $3y + 5 = 0$;
з) $2y - z = 0$;
и) $z = 0$.

8 Написать «в отрезках» уравнения следующих плоскостей:
а) $2x - y + 3z + 2 = 0$;
б) $\frac{1}{2}x - 3y + z + 1 = 0$;
в) плоскости, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(3;1;5)$ и $M_3(1;2;3)$.

9 Написать уравнение плоскости:
а) проходящей через точку $M_0(2;3;-1)$ и перпендикулярной вектору $\overline{n}(1;2;-4)$;
б) проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\overline{n}(0;-3;4)$.

10 Найти множество точек, равноудаленных от точек А (2; -1; 3) и В (4; 5; -3).

11 Составить уравнение касательной плоскости к сфере $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 24$ в точке $M_0(0;1;3)$.

12 Написать уравнение плоскости:
а) проходящей через начало координат и перпендикулярной плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$;
б) проходящей через вектор $M(1;1;-2)$ и перпендикулярной плоскостям $2x + 3z = 0$, $x - y + z - 1 = 0$.

**Взаимное расположение плоскостей. Пучок плоскостей**

1 Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:
а) $x - 3y + z + 1 = 0$, $2x + y - 4z + 2 = 0$; б) $3x + y - z + 2 = 0$, $6x + 2y - 2z + 3 = 0$;
в) $\sqrt{2}x - y + 3z + \sqrt{2} = 0$, $2x - \sqrt{2}y + 3\sqrt{2}z + 2 = 0$; г) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z = 0$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной плоскости
а) $2x - 4y + 5z - 3 = 0$; б) $2y - 7z + 6 = 0$; в) $3x + 5 = 0$.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (1; -3; 5) и параллельной плоскости:
а) $3x - y + z + 4 = 0$; б) $x - 3y + z = 0$; в) $3z - 4 = 0$.

4 Плоскость в прямоугольной декартовой системе координат задана уравнением $x + y - z + 1 = 0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения данной плоскости и плоскости Oxz и перпендикулярной плоскости $x - 3y + z = 0$.

5 Через линию пересечения плоскостей $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ провести плоскость:
а) проходящую через начало координат;
б) проходящую через точку А (1; 1; 1);
в) параллельную оси Oy.

6 В пучке, определяемом плоскостями $2x - y + 5z - 3 = 0$ и $x + y + 2z + 1 = 0$ найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку

M (1; 0; 1).

7 Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:

а) $16x+8y+2z+1=0$, $2x-2y+z+5=0$;

б) $2x+5y+4z+15=0$, $6x-3z+2=0$.

8 Определить, при каких значениях $l$ и $m$ следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

а) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

б) $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$;

в) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

9 Определить, при каком значении $l$ следующие пары уравнений будут определять перпендикулярные плоскости:

а) $3x-5y+lz-3=0$, $x+3y+2z+5=0$;

б) $5x+y-3z-3=0$, $2x+ly-3z+1=0$;

в) $7x-2y-z=0$, $lx+y-3z-1=0$.

## Расстояние от точки до плоскости. Геометрический смысл знака многочлена $Ax+By+Cz+D$

1 Даны точки $M_1(2;5;12)$, $M_2(1;0;0)$, $M_3(-1;-5;4)$, $M_4(-14;22;0)$, $M_5(1;-5;12)$, $M_6(0;0;5)$ и плоскости:

а) $2x-y+z+1=0$;

б) $x-2z+12=0$.

Для каждой из данных плоскостей среди указанных точек выбрать те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

2 Дана плоскость $3x-y+4z+1=0$. Указать, какие из пар точек, приведенных ниже, лежат по одну и ту же сторону от данной плоскости:

а) O (0; 0; 0) и A (2; 1; 0); б) $A_1(1;2;1)$ И $A_2(5;15;-1)$; В) $B_1(-1;2;-5)$ И $B_2(-15;1;0)$.

3 Две пересекающиеся плоскости $5x-y+z+1=0$ и $x+y-5z+1=0$ делят множество точек пространства, не лежащих на них, на четыре двугранных угла (области). Составить систему неравенств, определяющих внутреннюю область двугранного угла, которому принадлежит точка M (3; 1; 2).

4 Привести к нормальному виду уравнения плоскостей:

а) $x-2y+2z-12=0$; б) $2x-3y+5z-5=0$; в) $\dfrac{3}{7}x+\dfrac{6}{7}y-\dfrac{2}{7}z+3=0$; г) $12y-5z+39=0$;

д) $y+2=0$; е) $2z-5=0$.

5 Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M_1(1;-2;2)$, $2x+y+2z-7=0$;

б) $M_2(3;0\$4)$, $2x+3y+8=0$.

6 Установить расположение плоскости $2x-2y-\mathrm{z}+9=0$ относительно сферы в каждом из следующих случаев:

а) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$; б) $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=9$;

в) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4$; г) $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

7 Вычислить расстояние между следующими парами параллельных плоскостей:
а) $x-2y+2z-6=0$; $x-2y+2z+18=0$;
б) $2x-3y+6z-14=0$; $4x-6y+12z-21=0$;
в) $x-y+5z+27=0$; $3x-3y+15z+3=0$.
8 На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки M (1; 1; 4) и от плоскости $2x-2y+z-12=0$.
9 Составить уравнения множества точек, отстоящих от плоскости $6x-3y+2z-14=0$ на расстоянии, равном 3.
10 Составить уравнения множества точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей в каждом из следующих случаев:
а) $2x-y+3z-4=0$ и $2x-y+3z-5=0$;
б) $x+y-2z-3=0$ и $x+y-2z+7=0$.
11 Написать уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями:
а) $3x-y+7z-4=0$ и $5x+3y-5z+2=0$;
б) $x-7y+6=0$ и $3x-4y+5z-6=0$.
12 Доказать, что плоскость $3x-4y-2z+5=0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $M_1(3;-2;1)$ и $M_2(-2;5;2)$.
13 Две грани куба лежат на плоскостях $2x-2y+z-1=0$ и $2x-2y+z+5=0$. Вычислить объем этого куба.
14 Определить, лежит ли начало координат внутри острого или тупого угла, образованного двумя плоскостями $x-2y+3z-5=0$, $2x-y-z+3=0$.
15 Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $2x-14y+6z-1=0$, $3x+5y-5z+3=0$, в котором лежит начало координат.
16 Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями $2x-y+2z-3=0$, $3x+2y-6z-1=0$, в котором лежит точка M (1; 2; -3).
17 Составить уравнение плоскости, которая делит пополам острый двугранный угол, образованный двумя плоскостями $2x-3y-4z-3=0$ и $4x-3y-2z-3=0$.
18 Составить уравнение плоскости, которая делит пополам тупой двугранный угол, образованный двумя плоскостями $3x-4y-z+5=0$, $4x-3y+z+5=0$.

Имеет место утверждение:
Пусть плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, пересекаются, но не перпендикулярны друг другу. Тогда внутренние области двух вертикальных двугранных острых углов, образованных этими плоскостями, характеризуются неравенством $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\cdot(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)<0$, а внутренние

области двух вертикальных двугранных тупых углов - неравенством $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)\cdot(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)\cdot(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)>0$.

## Прямая линия в пространстве.
## Взаимное расположение прямых и плоскостей

1 Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$; б) $\begin{cases} x=3+2t, \\ y=3t, \\ z=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-3=0, \\ x+y+z-5=0. \end{cases}$

2 Определить координаты точки, лежащей на прямой $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{5}$ и имеющей:

а) абсциссу, равную 3;

б) ординату, равную – 1.

3 Составить уравнения прямой:

а) проходящей через точку $M_0(2;1;-3)$ и параллельной вектору $\overline{p}(1;-3;1)$;

б) проходящей через две точки $M_1(2;-3;\frac{1}{2})$, $M_2(3;5;\frac{3}{2})$;

в) образованной пересечением плоскости $x+3y-z+1=0$ с координатной плоскостью Оху;

г) образованной пересечением плоскости $x-y+z=0$ с плоскостью, проходящей через точки А (2; 0; 3), В (1; 1; 1), С (2; 4; -3).

4 Написать параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ y=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+2y+z-1=0, \\ x-y+1=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=0, \\ y+z=0. \end{cases}$

5 Через точку М (1; -3; 4) провести прямую, параллельную прямой $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+3y-z-1=0. \end{cases}$

6 Доказать, что прямые $l_1:\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-6t, \\ z=-1-8t; \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=7-6t, \\ y=2+9t, \\ z=12t; \end{cases}$ лежат в одной плоскости и написать уравнение этой плоскости.

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ и параллельной прямой $l:\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-3z+5=0. \end{cases}$

8 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;1;-3)$ и параллельной прямым $l_1:\begin{cases} 2x-2y+3z-4=0, \\ x+2y-4z+1=0 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} 3x-y-z=0, \\ x+y-3z+1=0. \end{cases}$

9 Через точки $M_1(-6;6;-5)$ и $M_2(12;-6;1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.
10 Даны вершины треугольника А (3; -1; -1), В (1; 2; -7) и С (-5; 14; -3). Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине В.
11 Даны вершины треугольника А (1; -2; -4), В (3; 1; -3) и С (5; 1; -7). Составить параметрические уравнения высоты, опущенной из вершины В на противоположную сторону.
12 Составить канонические уравнения следующих прямых:
а) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-2y-4z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

13 Доказать, что прямая $l: \begin{cases} x=1+2t, \\ y=3t, \\ z=-2+t; \end{cases}$ пересекает плоскость $2x-y+\text{z}+1=0$ .
Найти координаты точки пересечения.
14 Через точку пересечения плоскости $x-2y+3\text{z}+5=0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была параллельна плоскости Oyz.
15 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;3;7)$ и прямую $l: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{-1}$.
16 Составить уравнения прямой, проходящей через точку А (0; 0; 1) и пересекающей каждую из прямых: $l: \begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$.
17 Показать, что прямая $l: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+2}{1}$ параллельна плоскости $x-2y+5\text{z}-6=0$, а прямая $m: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ лежит в этой плоскости.
18 Написать уравнения прямой, проходящей через точку М (2; -3; 3) и перпендикулярной к плоскости $x-3y+4\text{z}-1=0$.
19 Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-3;4)$ и перпендикулярной к прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{5}$.
20 Написать уравнения прямой, проходящей через точку А 92; 3; -1), пересекающей прямую $l: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z}{3}$ и перпендикулярной к ней.
21 Найти точку, симметричную точке М (1; 5; 2) относительно плоскости $2x-y-\text{z}+11=0$.
22 При каком значении $m$ прямая $l: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6\text{z}+7=0$?

23 При каком значении $C$ прямая $l:\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

24 При каких значениях A и D прямая $l:\begin{cases}x=3+4t,\\y=1-4t,\\z=-3+t;\end{cases}$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$?

25 При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна к прямой $l:\begin{cases}x=3+2t,\\y=5-3t,\\z=-2-2t\end{cases}$ ?

26 Найти проекцию точки P (2; -1; 3) на прямую $l:\begin{cases}x=3t,\\y=5t-7,\\z=2t+2.\end{cases}$

27 Найти точку Q, симметричную точке P (4; 1; 6) относительно прямой $l:\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$.

**Метрические задачи на прямую и плоскость**

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, параллельной прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}$ и перпендикулярной к плоскости $x-2y+z-1=0$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (-1; 1; 3), параллельной прямой $x=y=z$ и перпендикулярной к плоскости $3x-2y=0$.

3 Составить уравнения проекции прямой на плоскость $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$;
П: $3x-y+z-1=0$.

4 Найти расстояние от точки P (7; 9; 7) до прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=2$.

5 Найти расстояние между скрещивающимися прямыми: $l_1:\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-1}$ и $l_2:\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{-3}$.

6 Даны две прямые: $l_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}$ и $l_2:\frac{x+4}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{0}$.

а) Доказать, что они скрещиваются.

б) Написать уравнения плоскостей, проходящих через каждую из них параллельно второй прямой.

в) Найти расстояние между скрещивающимися прямыми и между плоскостями; убедиться в том, что эти расстояния равны.

7 Найти угол между прямой $\frac{x}{2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z-4}{6}$ и плоскостью $6x+15y-10z=0$.

8 Найти угол между следующими прямыми $l_1:\begin{cases} y+1=0 \\ x+2z-1=0 \end{cases}$ и $l_2:\begin{cases} x=0 \\ z=1 \end{cases}$.

Определить угол между прямой $l:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ и плоскостью П: $4x+2y+2z-5=0$.

9 Вычислить расстояние от точки P (1; -1; -2) до прямой $l:\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

10 Убедившись, что прямые $l_1:\begin{cases} 2x+2y-z-10=0 \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ и $l_2:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние между ними.

11 Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $l_1:\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$; $l_2:\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

б) $l_1:\begin{cases} x=2t-4, \\ y=-t+4, \\ z=-2t-1; \end{cases}$; $l_2:\begin{cases} x=4t-5, \\ y=-3t+5, \\ z=-5t+5; \end{cases}$;

в) $l_1:\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$; $l_2:\begin{cases} x=6t+9, \\ y=-2t, \\ z=-t+2; \end{cases}$.

## Тема 5 Алгебраические линии и поверхности второго порядка

### Теоретические вопросы

1 Дать определение окружности и записать ее уравнения. Как в каждом случае найти центр и радиус окружности?

2 Что называется степенью точки относительно окружности? Каков геометрический смысл степени точки?

3 Что называется радикальной осью двух окружностей? Радикальным центром?

4 Сформулировать геометрические и алгебраические определения эллипса, гиперболы, параболы. Записать канонические уравнения.

5 Основные элементы линий: фокальные радиусы, эксцентриситет, дирекориса, фокуса, асимптоты гиперболы.

6 Равносторонняя гипербола. Сопряженные гиперболы, параболы.

7 Директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы. Теорема Аполлония.

8 Построение эллипса, гиперболы, параболы.

9 Общее уравнение линии второго порядка.

10 Схема приведения общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду.

11 Определение поверхности второго порядка. Уравнения.
12 Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Классификация.
а) Центральные квадрики: эллипсоиды; гиперболоиды; конусы.
б) Нецентральные квадрики: параболоиды; цилиндры; квадрики, распавшиеся на две плоскости.
13 Линейчатые поверхности второго порядка и их прямолинейные образующие.
14 Поверхности вращения.

Задачи

## Окружность. Эллипс

1 В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения:
а) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; б) $x^2+xy-2x=0$; в) $x^2+y^2-2x=0$;
г) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;
д) $36x^2+36y^2-72x+12y-11=0$.
Выяснить, какие из уравнений определяют окружность. Найти координаты центра и радиус каждой.
2 Определить расположение точки М (2; 7) относительно окружности $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.
3 Найти уравнение окружности, проходящей через три точки:
а) А (4; 6), В (-2; -2), С (-2; 6); б) А (1; -4), В (4; 5), С (3; -2).
4 Составить уравнение окружности с центром в точке С (5; 2), касающейся прямой $x-3y+2=0$.
5 Найти уравнение множества точек, для каждой из которых сумма квадратов расстояний от двух точек А (-1; 2) и В (1; 4) есть величина постоянная, равная 22.
6 Найти множество точек плоскости, имеющих одну и ту же степень относительно данной окружности.
7 Доказать, что радикальная ось двух окружностей есть прямая, перпендикулярная к линии центров.
8 Найти длины полуосей и координаты фокусов:
а) $4x^2+9y^2-36=0$; б) $x^2+9y^2=9$.
9 Найти точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, абсциссы которых равны:
а) 2; б) 3; в) 1.
10 Длина большой полуоси эллипса равна 6, эксцентриситет - $\frac{1}{2}$, а расстояние точки М эллипса до фокуса $F_1$ равно 7. Найти расстояние $MF_2$ и координаты точки М.
11 Составить каноническое уравнение эллипса, если:
а) координаты вершин эллипса - $A_1(6;0)$, $A_2(-6;0)$, $B_1(0;3)$, $B_2(0;-3)$;
б) фокальное расстояние равно 10; малая полуось – 5;
в) расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет - $\frac{1}{2}$;

г) эллипс проходит через точку М (-3; $\frac{7}{4}$) и расстояние между фокусами равно 6.

12 Написать уравнение директрис эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$ и найти расстояние между ними.

13 Составить уравнение эллипса, зная, что:

а) расстояние между директрисами равно 12, а большая ось равна $2\sqrt{3}$;

б) директрисы заданы уравнениями х = 12 и х = - 12, а а эксцентриситет равен $\frac{1}{3}$.

14 Найти эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между его директрисами в 4 раза больше расстояния между фокусами.

15 На эллипсе, определяемом уравнением $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$, найти точки, расстояние от которых до правого фокуса в 4 раза больше расстояния до левого фокуса.

16 Эллипс проходит через две противоположные вершины квадрата ABCD, и его фокусами являются две другие вершины этого квадрата. Написать каноническое уравнение эллипса и уравнение его директрис, если АС = 2 М.

17 Найти длины полуосей и координаты фокусов гипербол:

а) $9x^2-4y^2-36=0$;

б) $10x^2-2y^2-10=0$.

## Гипербола, парабола

1 Составить каноническое уравнение гиперболы по следующим данным:

а) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10;

б) длина действительной оси равна 6, гипербола проходит через точку М (9; 4);

в) расстояние между фокусами 6, эксцентриситет равен 1,5;

г) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$, а расстояние между фокусами равно 20;

д) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$, расстояние между фокусами равно 26;

е) эксцентриситет равен 1,5, расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

2 Составить каноническое уравнение гиперболы, если угол между асимптотами равен 60º, а гипербола проходит через точку М ($4\sqrt{3}$; 2).

3 Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку М ($4\sqrt{2}$; 3).

4 Дана гипербола $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$. Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы; найти эксцентриситеты и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

5 По данному эксцентриситету в каждом из случаев определить угол между асимптотами гиперболы: а) $\varepsilon = \sqrt{2}$; б) $\varepsilon = 2$.

6 Уравнения асимптот гиперболы $y = \pm 0{,}75x$. Найти эксцентриситет.

7 Составить уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 3 и фокусы находятся в точках $F_1(0;-2)$ и $F_2(6;-2)$.

8 Найти уравнение гиперболы, проходящей через точку М (-5; 3) и имеющей общие фокусы с равносторонней гиперболой $x^2 - y^2 = 8$.

9 Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из парабол:

а) $y^2 = 6x$; в) $2x^2 - 3y = 0$;

б) $x^2 = 4y$; г) $3y^2 + 16x = 0$.

10 Составить каноническое уравнение параболы по следующим данным:

а) р = 3;

б) парабола проходит через точку Р (1; -4);

в) директриса определяется уравнением х + 3 = 0;

г) фокус имеет координаты (0; 5);

д) директриса имеет уравнение у + 12 = 0.

11 Вычислить фокальный радиус точки М параболы $y^2 = 8x$, если ее абсцисса равна 8.

12 На параболе $x^2 = -12y$ найти точку, фокальный радиус которой равен 9.

13 Составить уравнение параболы по следующим данным:

а) парабола симметрична относительно оси ОУ, фокус помещается в точке F (0; 2), вершина совпадает с началом координат;

б) вершина находится в начале координат, парабола расположена в нижней полуплоскости, симметрична оси ОУ и р = 0,6;

в) фокус имеет координаты F(5; 0), а ось ординат служит директрисой;

г) парабола симметрична относительно оси ОУ и проходит через начало координат; прямая у = 2 пересекает параболу в точках с абсциссами 3 и -3.

14 Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр параболы, зная, что пролет арок равен 24 м, а высота - 6 м.

15 Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой р = 0,1. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2 м от места выхода.

16 Эксцентриситет эллипса равен $\frac{1}{3}$, а расстояние от точки М до директрисы равно 12. Вычислить расстояние от М до соответствующего фокуса.

17 Составить каноническое уравнение гиперболы, если уравнения директрис $x = \pm\frac{3}{2}$, расстояние от точки, взятой на гиперболе до фокуса, в два раза больше расстояния от этой точки до соответствующей директрисы.

18 Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус ее точки М равен 16. Найти расстояние от точки М до соответствующей этому фокусу директрисы.

## Общая теория линий второго порядка

1 Привести общее уравнение линии второго порядка к каноническому виду путем преобразования прямоугольной системы координат. Построить кривую, заданную данным уравнением, в каждом из следующих случаев:

1) $2x^2-8x+4y+9=0$; 2) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$; 3) $x^2-\frac{1}{4}y^2-x-\frac{3}{2}y-1=0$;

4) $y^2-2x-10=0$; 5) $x^2-10x+26=0$; 6) $5x^2+5y^2+8xy-9=0$;

7) $5x^2+5y^2-6xy+16=0$; 8) $9x^2+16y^2+24xy-40x+30y=0$;

9) $9x^2+16y^2-24xy+30x-40y-25=0$; 10) $9x^2+4y^2-12xy-39=0$.

## Сфера. Эллипсоид

1 Составить уравнение сферы с центром в точке O и радиусом R, если O (2; -1; 3), R = 5.

2 Составить уравнение сферы с центром S (-4; 0; 3), если точка M (-1; 4; 3) принадлежит сфере. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости OYZ и до оси OX.

3 Написать уравнение сферы, если:

а) центр сферы O (0; 0; 0) и точка M (6; -2; 3) принадлежит сфере;

б) центр сферы S (1; 4; -7) и сфера касается плоскости $\alpha: 6x+6y-7z+42=0$.

4 Найти центр и радиус окружности: $\varpi:\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36,\\ 3x+y-z-9=0.\end{cases}$.

5 Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

6 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$. Сделать чертеж.

7 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $2x^2+3y^2+z^2-8x+6y-4z-3=0$. Выполнить чертеж.

8 Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, который пересекает плоскость OYZ по эллипсу $\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{20}=1$ и проходит через точку M (1; $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$).

9 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением:

а) $x^2+y^2+z^2-4z+5=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+4x-8=0$.

10 Найти сечение эллипсоида $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ координатными плоскостями канонической системы координат. Выполнить чертеж.

## Гиперболоиды, параболоиды

1 Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность проходит через точку ($\sqrt{5}$; 3; 2) и пересекает плоскость OXZ по гиперболе $\frac{x^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$.

2 Провести исследование поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $2x^2-3y^2-2z^2-8x+6y-12z-21=0$. Сделать чертеж.

3 Провести исследование поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2+2y^2-4z^2-8z-8=0$. Сделать чертеж.

4 Построить сечения координатными плоскостями поверхностей, заданных следующими уравнениями:

а) $3x^2-y^2-4z^2+12=0$; б) $3x^2-3y^2+2z^2+12=0$.

5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы с полуосями 2 и 4 ее мнимой оси, совпадающей с осью OZ. Центр гиперболы совпадает с началом координат. Гипербола лежит в плоскости XOZ. Сделать чертеж.

6 Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если поверхность пересекает плоскость OXY по окружности $x^2+y^2=9$, а плоскость OXZ по гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{10}=1$.

7 Определить вид и провести исследование поверхности второго порядка, заданной уравнением $4x^2-y^2+4z^2+4y+32z+56=0$. Построить ее изображение.

8 Определить вид и провести исследование поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2-2y^2+3z^2+6=0$. Построить изображение поверхности.

9 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $2x^2+2y^2-4z+5=0$. Сделать чертеж.

10 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $x^2-2y^2-4x-z+1=0$. Сделать чертеж.

11 Построить сечения координатными плоскостями поверхностей, заданных следующими уравнениями:

а) $x^2+9y^2+18z=0$; б) $x^2+y^2-z-2=0$.

12 Сделать чертеж в прямоугольной декартовой системе координат поверхности, заданной уравнением $2x^2+y^2-8z=0$.

13 Исследовать методом сечений поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $2x^2-4y-z^2=0$. Сделать чертеж.

## Линейчатые поверхности. Прямолинейные образующие

1 Изобразить цилиндрические поверхности, заданные уравнением:
а) $x^2+4y=0$; б) $3x^2+2y^2-6=0$; в) $x^2+y^2-2y=0$.

2 Исследовать поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной декартовой системе координат уравнением:
а) $x^2-6z=0$; б) $9y^2-16x^2-144=0$.

3 Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $x^2=10z$, $y=0$ вокруг оси OZ.

4 В плоскости XOZ дана окружность с центром в точке (4; 0; 0) радиуса $r=1$. Написать уравнение поверхности вращения, образованной вращением данной окружности вокруг оси OZ.

5 Написать уравнения следующих поверхностей вращения:
а) получающейся при вращении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$, $z=0$ вокруг большой (малой) оси;
б) получающейся при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ вокруг ее действительной (мнимой) оси.

6 Написать уравнения двух систем прямолинейных, образующих однополостной гиперболоид $x^2+9y^2-z^2=9$, и определить те из них, которые проходят через точку М (3; $\frac{1}{3}$; -1).

7 На гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=2z$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $6x+4y-8z+1=0$.

8 Найти прямолинейные, образующие гиперболоида, заданного уравнением $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, проходящие через точку А (6; 2; 8).

9 Найти те прямолинейные образующие гиперболического параболоида $4y^2-x^2=z$, которые образуют с прямой $\begin{cases} x+y=0, \\ z=0 \end{cases}$ угол 45°.

10 Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$, перпендикулярные оси ОУ.

11 Найти прямолинейные образующие гиперболического параболоида $x^2-y^2=4z$, параллельные плоскости $x+y+z-1=0$.

## Тема 6 Геометрические преобразования на плоскости

### Теоретические вопросы

1Определение движения, основная теорема и свойства. Классификация движений.
2 Виды движений: осевая симметрия, параллельный перенос, центральная симметрия, поворот. Определения, способы задания и построение образов точек, свойства.
3 Сущность метода геометрических преобразований при решении задач на доказательство, построение, вычисление.
4 Преобразования плоскости: гомотетия и подобие. Определения, способы задания и построение образов точек, свойства.
5 Аффинные преобразования: определение, основные свойства, примеры.

Задачи

### Метод движений

**а) задачи на доказательства**

1 На высоте ВД треугольника АСВ взята точка К так, что АК = КС. Доказать, что треугольник АВС равнобедренный.

2 Построить квадрат, две противоположные вершины которого лежали бы на данной прямой, а две другие – на данных окружностях.

3 На стороне АВ параллелограмма АВСД, вне его, построен квадрат АВМК, а на стороне СД в той же полуплоскости, что и параллелограмм, построен квадрат СДРЕ. Доказать, что расстояние между центрами квадратов равно стороне параллелограмма.

4 Две прямые, содержащие точку пересечения диагоналей параллелограмма, пересекают его стороны соответственно в точках М и К, Р и Е. Доказать, что МРКЕ – параллелограмм.

5 Две равные окружности пересекаются в точках А и В. Через Точку А проведена хорда МА одной окружности, а через точку В – хорда ВК другой окружности, причем МА и ВК параллельны. Доказать, что эти хорды равны.

6 Дан правильный шестиугольник ABCDEF, M – середина диагонали AC, N – середина стороны DE. Доказать, что треугольник MNF – правильный.

7 Через центр правильного треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен $60^0$. Доказать, что отрезки этих прямых, которые являются их пересечением с треугольником, равны.

**б) задачи на построение и вычисление**

1 На данной прямой построить такую точку, чтобы сумма расстояний от этой точки до двух данных точек, не лежащих на этой прямой, была наименьшей.

2 Найти площадь трапеции, сумма оснований которой равна 21 см, а диагонали равны 13 см и 20 см.

3 Даны две пересекающиеся прямые c и d и две точки A и B, не принадлежащие им. Построить параллелограмм АВСД так, чтобы вершины С и Д лежали соответственно на прямых c и d.

4 Построить биссектрису угла АОВ, вершина О которого не доступна.

5 Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата. Кроме того, остался столб в центре участка. Построить границу участка.

6 Построить параллельные прямые a, b, c, проходящие соответственно через данные точки A, B, C так, чтобы одна из них была средней линией полосы, определяемой двумя другими прямыми.

7 Построить равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины его острых углов принадлежали данным окружностям, а вершиной прямого угла являлась данная точка.

8 На сторонах AB и AC треугольника ABC, вне его построены квадраты ABMN и ACPQ. Найти длину отрезка NQ, если длина медианы AE треугольника ABC равна m.

**Метод преобразований**

1 Доказать, что точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны равнобедренной трапеции, точка пересечения ее диагоналей и середины оснований трапеции принадлежат одной прямой.

2 Через точку касания двух окружностей проведены две произвольные прямые, которые пересекают эти окружности в точках А, В и С, Д, причем А и В лежат на одной окружности, С и Д – на другой. Доказать, что АВ $\parallel$ СД.

3 Даны две окружности и точка М. Построить на окружностях соответственно точки А и В, чтобы $M \in AB$ и $AM : MB = 2 : 3$.

4 Построить равнобедренный треугольник, зная угол при его вершине и сумму длин основания и высоты.

5 Доказать, что отношение площади данного четырехугольника к площади четырехугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного, равно 2 : 1.

6 Пользуясь только одной линейкой:

а) построить середину отрезка, лежащего на одной из двух данных параллельных прямых;
б) построить прямую, проходящую через данную точку М и параллельную двум данным параллельным прямым, не содержащим точку М.

## Тема 7.1 Элементы конструктивной геометрии. Методы изображений

**Теоретические вопросы**

1 Схема решения задач на построение.
2 Общие аксиомы и аксиомы инструментов.
3 Простейшие построения и простейшие задачи на построение.
4 Суть метода ГМТ и алгебраического метода при решении задач.
5 Центральное и параллельное проецирование. Изображение плоских фигур в параллельной проекции (изображение треугольника в параллельной проекции, четырехугольника, правильных многоугольников).
6 Изображение окружности в параллельной проекции. Построение многоугольников, вписанных в окружность и описанных около неё.
7 Изображение многогранников в параллельной проекции. Теорема Польке – Шварца, теорема Польке.
8 Изображение тел вращения в параллельной проекции. Комбинации многогранников и тел вращения.
9 Построение сечений многогранников: а) метод внутреннего проецирования; б) метод следа секущей плоскости; в) метод параллельных прямых.
10 Методы решения метрических задач: а) использование оригинала; б) алгебраический метод; в) метод соответствия.
11 Применение аксонометрии и метода Монжа для решения задач.

Задачи

**Задачи на построение, решаемые ограниченными средствами**

1 Построить середину отрезка, заданного своими концами А и В, используя линейку и циркуль.
2 Построить середину отрезка, заданного своими концами А и В, используя двустороннюю линейку .
3 Построить середину отрезка, заданного своими концами А и В , используя прямой угол.
4 Построить середину отрезка, заданного своими концами А и В, используя циркуль.
5 Разделить данный угол пополам, пользуясь только двусторонней линейкой.
6 Определить центр начерченной окружности, используя только прямой угол.
7 Через данную точку провести прямую, параллельную данной, пользуясь только острым углом.
8 Через данную точку провести прямую, параллельную данной, пользуясь только двусторонней линейкой.
9 Удвоить данный отрезок, пользуясь только прямым углом.
10 Дан острый угол. Удвоить его с помощью двусторонней линейки.

**Применение метода ГМТ к решению задач**

1 Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.
2 Постройте треугольник по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.
3 Постройте треугольник по стороне и медианам, проведенным к другим сторонам.
4 Постройте ромб по углу и диагонали.
5 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на одну из них.
6 Постройте треугольник по двум углам, прилежащим к основанию и периметру.

**Алгебраический метод**

1 Построить треугольник ABC, если даны высота BH и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABH и CBH.
2 В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.
3 Построить квадрат, площадь которого в два раза больше площади данного квадрата.

4 Построить круг, площадь которого равна площади кольца, между двумя концентрическими окружностями.

5 Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

6 Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.

**Изображение плоских фигур**

1 Построить изображение правильного шестиугольника различными способами.

2 Построить касательную к эллипсу: а) параллельную данной хорде,
б) проходящую через данную на эллипсе точку.

3 Построить изображение правильного треугольника, вписанного в окружность и описанного около неё.

4 Построить изображения: а) прямоугольного треугольника; б) трапеции; в) равнобедренного треугольника; г) правильного шестиугольника, вписанных в окружность.

5 Построить изображения описанных около окружности: а) прямоугольного треугольника; б) равнобедренной трапеции; в) правильного шестиугольника.

6 Построить описанный около окружности равнобедренный прямоугольный треугольник.

7 Построить описанный около окружности ромб с острым углом в $60^o$.

8 Построить вписанную в окружность трапецию, основания которой видны из центра окружности под углами в $60^o$ и $120^o$.

9 На изображении круга построить изображение: а) сектора с углом $15^o$; б) сегмента с дугой $75^o$; в) сектора с углом $135^o$; г) сегмента с дугой $135^o$; д) сектора с углом $75^o$.

**Изображение многогранников и круглых тел**

1 Построить изображение правильной четырёхугольной призмы, вписанной в цилиндр.

2 Построить изображение правильной треугольной призмы, вписанной в конус, вписанной в усечённый конус.

3 Построить изображение треугольной призмы, описанной около цилиндра.

4 Построить изображение конуса, вписанного в шар.

5 Построить изображение правильной шестиугольной призмы, вписанной в шар.

6 Построить изображение цилиндра, описанного около шара.

7 Построить изображение правильной треугольной призмы, описанной около шара.

**Позиционные задачи**

1 Построить точку пересечения плоскости, проходящей через ребро АД тетраэдра АВСД и точку $M \in BC$, с прямой, заданной точками $P \in AB$ и $Q \in СД$.

2 Дано изображение треугольной пирамиды и её высоты. Через середину высоты и середину бокового ребра провести прямую и построить точку её пересечения с поверхностью пирамиды.

3 Точки E и F – середины рёбер ДС и ДА тетраэдра АВСД. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку F, параллельно плоскости ABE (2 случая).

9 Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания параллельно боковому ребру, противолежащему этой диагонали.

5 Построить сечение правильной пятиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, произвольно выбранными на её боковых рёбрах, или на её боковых рёбрах и гранях.
6 Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, заданной тремя точками, одна из которых выбрана на боковой грани, две другие – на боковых рёбрах.
7 Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на трёх попарно скрещивающихся рёбрах.
8 Построить сечение правильной пятиугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками, одна из которых выбрана на ребре основания, две другие – на боковых рёбрах.
9 Построить сечение цилиндра плоскостью, заданной тремя точками на его боковой поверхности.
10 Построить сечение конуса плоскостью, заданной следом и точкой на боковой поверхности конуса.

**Метрические задачи**

1 Дано изображение прямоугольного треугольника с отношением катетов 1:2. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.
2 Трапеция $A'B'C'D'$ – изображение равнобедренной трапеции АВСД (АВ $\|$ СД), углы при основании которой равны 45º. Построить изображение центра окружности, описанной вокруг трапеции.
3 Дано изображение равнобедренного треугольника. Построить изображение:
а) биссектрисы угла при вершине; б) перпендикуляра, опущенного из середины боковой стороны на основание; в) биссектрисы угла при основании.
4 Дано изображение треугольника и двух его высот. Построить изображение центра окружности, описанной около треугольника – оригинала.
5 Дано изображение прямоугольного треугольника с отношением катетов, равным $\frac{3}{4}$. Построить изображение центра окружности, вписанной в треугольник – оригинал.
6 Построить изображение перпендикуляра, опущенного из вершины куба на его диагональ.
7 Дана правильная четырёхугольная пирамида SАВСД. Изобразить перпендикуляр, опущенный из точки Е грани SАВ на плоскость основания.
8 Дан прямоугольный параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$, рёбра которого относятся как 1:2:3. Построить изображение точки пересечения прямой $С_1С$ и биссектрисы угла $ВВ_1С_1$.
9 Длина ребра куба равна а. Найти площадь сечения, проведённого через диагональ $АД_1$ грани $АА_1Д_1Д$ и середину ребра $ВВ_1$.
10 В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани – квадраты, провести плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Найти площадь сечения, если ребро призмы равно а.

11 $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – прямоугольный параллелепипед. $АВ:АД:АА_1=1:2:1$. Через вершины В, $С_1$, Д проведена плоскость. Точка $Р \in А_1Д_1$, причём $А_1Р:РД_1=1:2$. Опустить перпендикуляр из точки Р на плоскость $ВС_1Д$.
12 Построить сечение правильного тетраэдра плоскостью, проходящей через: 1) ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру; 2) через точку $M \in BSC$ перпендикулярно ребру AS.
13 Дано изображение правильного тетраэдра SABC. Построить изображение перпендикуляра, проведённого через точку Р, лежащую на грани SAB, к грани SBC.

**Аксонометрия. Метод Монжа**

1 Построить изображение куба и правильной треугольной пирамиды в кабинетной проекции.
2 В правильной четырёхугольной пирамиде со стороной a и высотой h построить сечение, проходящее через сторону основания, перпендикулярно противоположной боковой грани.
3 Построить сечение правильной треугольной пирамиды, проходящее через ребро основания, перпендикулярно противоположному боковому ребру. Сторона основания равна a, высота h.
4 Построить изображение правильной четырёхугольной призмы, конуса, используя метод Монжа.
5 В правильный октаэдр, вписанный в сферу, вписать шар.
6 Построить изображение правильной четырёхугольной призмы и сечения, проходящего через вершину основания перпендикулярно противоположному боковому ребру, используя метод Монжа.

**Дополнительные задачи для самостоятельного решения**

1 Дано изображение квадрата АВСД, М – середина АВ. Построить изображение перпендикуляра, опущенного из точки С на ДМ.
2 Дано изображение равнобедренного треугольника, высота которого равна основанию. Построить изображение центра окружности, описанной около треугольника – оригинала.
3 Построить изображение квадрата, вписанного в окружность и описанного около неё.
4 Построить изображение вписанных в окружность: а) прямоугольника, б) правильного восьмиугольника.
5 Построить изображение описанных около окружности: а) равнобедренного треугольника, б) ромба.
6 На изображении правильного шестиугольника построить изображения: а) апофемы, б) биссектрисы одного из внешних углов, в) перпендикуляра, проведённого через центр к одной из меньших диагоналей.
7 Изобразить правильный тетраэдр SACB и перпендикуляр, проведённый через точку Р на его грани SAB к грани SBC.

8 Дана правильная треугольная пирамида SABC, O – центр основания ABC. Построить точку пересечения прямой SO с плоскостью, проходящей через ребро AB и середину ребра SC.

9 В усечённый конус вписать правильную четырёхугольную призму.

10 В шар вписать цилиндр.

11 Построить изображение правильной шестиугольной призмы, описанной около шара.

12 Построить изображение правильной треугольной пирамиды, вписанной в шар.

13 Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, заданной тремя точками на боковых гранях.

14 Построить сечение куба АВСД $A'B'C'Д'$, проходящее через точку A и середины рёбер $B'C'$ и $C'Д'$.

15 $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – параллелепипед, Е – середина $ВВ_1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку Е, параллельно плоскости $А_1ВС_1$.

16 АВСД – правильный тетраэдр. ДМ – его высота, точка N – середина ДМ. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку N, параллельно грани ДВС.

17 Построить сечение конуса плоскостью, проходящей через три точки на его боковой поверхности.

18 Дана правильная треугольная пирамида SABC, O – центр основания ABC. Построить точку пересечения прямой OS с плоскостью, проходящей через ребро AB и середину ребра SC.

19 Построить изображение правильной шестиугольной призмы в кабинетной проекции.

20 Высота правильной четырёхугольной призмы вдвое больше стороны её основания.

21 Построить плоскость, проходящую через вершину основания, перпендикулярно диагонали призмы, не проходящей через эту вершину.

22 В правильный тетраэдр, вписанный в сферу, вписать шар.

23 Построить изображение правильной треугольной пирамиды и сечения, проходящего через ребро основания перпендикулярно противоположному боковому ребру, используя метод Монжа.

24 Дано изображение куба. Построить изображение перпендикуляра, проведённого из вершины куба на любую его диагональ.

25 Изобразить правильный тетраэдр SABC и перпендикуляр, проведённый из точки $P \in ASB$ к грани SBC.

26 Дано изображение куба $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ и плоскость, проходящая через ребро $А_1В_1$ параллельно ребру СД и пересекающая АВСД. Точка $P \in А_1В_1С_1Д_1$. Построить перпендикуляр из точки Р на данную плоскость.

27 $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ – куб. Точка $M \in ВВ_1С_1С$. Построить в грани куба $ВВ_1С_1С$ через точку М прямую, перпендикулярную диагонали $В_1Д$ куба.

## Тема 7.2 Элементы проективной геометрии

**Вопросы по теории**

1. Аксиоматическое определение проективной плоскости $P_2$.
2. Модели проективной плоскости (доказательство непротиворечивости системы аксиом).
3. Принцип двойственности. Примеры.
4. Теорема Дезарга и ее частные случаи.
5. Гармоническая четверка точек. Построение четвертой гармонической точки.
6. Сложное отношение четырех точек.
7. Квадрики на $P_2$. Полюс и поляра. Построение полюсов и поляр.

Задачи

**Модели $P_2$. Принцип двойственности**

1 В трехмерном евклидовом пространстве дана сфера. Под точкой множества М будем понимать две диаметрально противоположные точки этой сферы. Под прямой – множество пар диаметрально противоположных точек, лежащих на окружности большого круга. Доказать, что построенное множество является проективной плоскостью. Рассмотреть связку S прямых и плоскостей с центром в точке О, где О – центр данной сферы, и постройте отображение $f: M \to S$, определяемое следующими условиями:

а) образом точки $(A, A') \in M$ является прямая $AA'$ связки S;

б) образом прямой $a \in M$ является плоскость $a \in S$, содержащая прямую $a$.

Показать, что $f$ - биективное отображение, сохраняющее инцидентность.

2 Какие из следующих предложений справедливы на проективной плоскости и какие – на евклидовой плоскости:

а) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным точкам;

б) существует одна и только одна точка, инцидентная двум различным прямым.

3 Какие из нижеприведенных предложений справедливы в трехмерном проективном пространстве и какие – в евклидовом пространстве:

а) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным точкам;

б) существует одна и только одна точка, инцидентная двум различным прямым;

в) существует одна и только одна прямая, инцидентная двум различным плоскостям;

г) три различные плоскости имеют по крайней мере одну общую точку;

д) три различные прямые, не лежащие в одной плоскости, но попарно пересекающиеся, имеют одну и только одну общую точку;

е) три различные прямые, попарно не скрещивающиеся и не проходящие через одну общую точку, лежат в одной плоскости?

*Замечание.* Под проективной плоскостью трехмерного проективного пространства мы понимаем $\pi(V_3 \setminus \{0\})$, где $V_3$ - трехмерное векторное подпространство четырехмерного векторного пространства $V_4$.

4 Объяснить, почему в геометрии проективной плоскости не рассматриваются такие понятия, как «параллельность прямых», «перпендикулярность прямых», «биссектриса угла», «середина отрезка», «квадрат», «трапеция».

**Теорема Дезарга**

1 Рассмотреть частные случаи конфигурации Дезарга на расширенной плоскости, когда:

а) дезаргова ось – несобственная прямая;

б) дезаргов центр – несобственная точка.

Сформулировать соответствующие частные случаи прямой и обратной теорем Дезарга в терминах евклидовой геометрии.

2 Проверьте, что для любой прямой из конфигурации Дезарга можно подобрать такие два трехвершинника этой же конфигурации, для которых данная прямая будет дезарговой осью.

3 На евклидовой плоскости трапеция вписана в четырехугольник так, что ее параллельные стороны параллельны одной из его диагоналей. Докажите, что непараллельные стороны трапеции пересекаются на другой диагонали.

4 На евклидовой плоскости вершины параллелограмма $ABCD$ лежат на сторонах параллелограмма $A'B'C'D'$ так, что $A \in (A'B')$, $B \in (B'C')$, $C \in (C'D')$, $D \in (D'A')$ . докажите, используя теорему Дезарга, что центр симметрии параллелограмма ABCD совпадает с центром симметрии параллелограмма $A'B'C'D'$.

5 Используя теорему Дезарга, докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6 На евклидовой плоскости даны параллельные прямые $l$ и $m$ и точка P, им не принадлежащая. Пользуясь одной линейкой, через точку P проведите прямую, параллельную прямым $l$ и $m$.

7 Точку пересечения двух прямых $l$ и $m$ будем называть недоступной, если эти прямые пересекаются за пределами чертежа. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через точку N и недоступную точку пересечения прямых $l$ и $m$.

**Гармоническая четверка точек. Сложное отношение четырех точек**

1 C – середина отрезка AB на евклидовой плоскости, D – середина BC. Найти двойные отношения ($ABCD$), ($ACBD$), ($DCBA$).

2 Пользуясь одной линейкой, построить точку D, четвертую гармоническую к точкам A, B, и C в следующих трех случаях:

а) ($ABCD$) = - 1; б) ($ACBD$) = - 1; в) ($ADBC$) = - 1.

*Указание.* Воспользоваться гармоническими свойствами полного четырехвершинника.

3 На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Пользуясь одной линейкой, разделите этот отрезок пополам.

4 Какая прямая на евклидовой плоскости будет четвертой гармонической к трем прямым пучка $a, b, c$, если прямая $c$ делит угол, образованный прямыми $a$ и $b$, пополам?

5 На евклидовой плоскости даны три прямые пучка $S : a, b, c$. Пользуясь одной линейкой, , построить четвертую гармоническую прямую к прямым $a, b, c : (abcd)$ = - 1.

*Указание.* 1) Используйте принцип двойственности; 2) постройте A, B, C – точки пересечения прямых $a, b, c$ с какой либо прямой. Затем постройте точку D такую, что ( $ABCD$ ) = - 1, и прямую $d = (SD)$.

6 На евклидовой плоскости даны прямые $a, b, c$ одного пучка $S$, причем $c$ перпендикулярна $a$. Пользуясь одной линейкой, удвойте угол, образованный прямыми $a$ и $b$.

*Указание.* Искомая прямая $d$ удовлетворяет условию $(acbd)$= - 1.

7 На евклидовой плоскости дан отрезок AB и его середина C. Пользуясь одной линейкой, проведите прямую через данную точку $F \notin (AB)$ параллельно прямой AB.

*Указание.* Постройте полный четырехвершинник $PFQE$ так, чтобы $Q \in (AF)$, $P = (FB) \cap (QC)$, $E = (AP) \cap (QB)$. Тогда $(FE)$ - искомая прямая.

8 На евклидовой плоскости даны две параллельные прямые и на одной из них отрезок AB. Пользуясь одной линейкой, удвойте отрезок AB.

*Указание.* Если $D_\infty$ - несобственная точка данных параллельных прямых, а X – искомая точка, то $(AXBD_\infty)$ = - 1.

9 На евклидовой плоскости дан параллелограмм. Пользуясь одной линейкой, через точку пересечения его диагоналей проведите прямые, параллельные его сторонам.

10 На прямой даны точки A, B, C. Постройте точку $D$ такую, чтобы ( $ABCD$ ) = 2.

11 Двойное отношение ( $ABCD$ ) равно -1. Найдите ( $DBCA$ ).

12 а) Дано ( $ABCD$ ) = 3. Найдите ( $CABD$ ).

б) Дано ( $ABCD$ ) = - 2. Найдите ( $DBCA$ ), ( $CADB$ ), ( $CABD$ ), ( $ADBC$ ), ( $CBAD$ ).

в) Дано ( $ABCD$ ) = - 1. Найдите ( $DBCA$ ), ( $CADB$ ), ( $CABD$ ), ( $ADBC$ ), ( $CBAD$ ).

13 На евклидовой прямой даны фундаментальные точки $E_0$ , $E_1$ , $E_2$ проективной системы координат. Постройте точки A (1; -1), B (2; -1), C (3; 2).

*Указание.* Рассмотрите пучок прямых с центром в произвольной точке $S$, не принадлежащей данной прямой, и аффинную систему координат $R$ с началом $S$, базисные векторы $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ которой соответственны параллельны прямым $SE_1$ и $SE_2$, причем $\overline{e_1} + \overline{e_2} = \overline{SE_0}$. Затем постройте вектор $\overline{a} = (1;-1)_R$. Искомой точкой будет точка пересечения данной прямой и прямой пучка с направляющим вектором $\overline{a}$.

14 Найдите двойное отношение ( $ABCD$ ) следующих четверок точек проективной прямой:

а) $A = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 7 \\ -3 \end{vmatrix}$, $D = \begin{vmatrix} 5 \\ -3 \end{vmatrix}$;

б) $A=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}7\\-4\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$, $D=\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$;

в) $A=\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}-1\\11\end{vmatrix}$, $D=\begin{vmatrix}3\\2\end{vmatrix}$.

15 Даны три точки и двойное отношение четверки точек проективной прямой. Найдите четвертую точку.

а) $A=\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $(ABCD)=\dfrac{1}{2}$. Найдите $D$.

б) $A=\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $(ABCD)=-1$. Найдите $D$.

в) $A=\begin{vmatrix}1\\-1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}2\\1\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$, $(ABCD)=1$. Найдите $D$.

**Квадрики на проективной плоскости**

1 Найдите уравнение поляры точки А (1:2:1) относительно квадрики $G: -x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2=0$.

2 Найдите уравнения поляр точек:

а) $A=\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}$; б) $B=\begin{vmatrix}4\\-2\\3\end{vmatrix}$; в) $C=\begin{vmatrix}0\\2\\-1\end{vmatrix}$; г) $D=\begin{vmatrix}-4\\2\\1\end{vmatrix}$

относительно квадрики $x_1^2-x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3=0$. Какие из этих точек являются внутренними и какие внешними по отношению к данной квадрике?
*Указание.* Учтите, что поляра внутренней точки не пересекает квадрику, а внешний – пересекает.

3 На прямой $4x_1+x_2-x_3=0$ найдите точку, гармонически сопряженную с точкой А (-3:1:-3) относительно квадрики _$x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3=0$.
*Указание.* Искомая точка является точкой пересечения поляры точки А (-3:1:-3) и данной прямой $4x_1+x_2-x_3=0$.

4 На прямой $3x_1+x_2-x_3=0$ найдите точку, гармонически сопряженную с точкой А (1:2:-1) относительно квадрики $x_1^2+2x_2^2-x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3+6x_1x_3=0$.

5 Найдите полюс прямой $a(0:-1:2)$ относительно квадрики _$G: x_2^2+4x_1x_3=0$.

6 Найдите полюсы прямых

а) $x_1-x_2-2x_3=0$; б) $x_1=0$; в) $x_2+3x_3=0$

относительно квадрики $x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_2x_3=0$.

7 Даны квадрика $G$ и точка $A\notin G$. Пользуясь одной линейкой, постройте поляру точки А.
*Указание.* Для того, чтобы построить поляру точки А, достаточно построить две ее точки $B_1$ и $B_2$, каждая из которых гармонически сопряжена с точкой А относительно квадрики.

8 Даны квадрика $G$ и точка А. Через точку А проведены три секущие, пересекающие квадрику в точках $X$ и $Y$, $Z$ и $T$, $U$ и $V$. Построены точки Р = $(XT)\bigcap(ZY)$ и $Q=(ZV)\bigcap(UT)$. Докажите, что прямая $PQ$ есть поляра точки А.

9 Даны квадрика $G$ и внешняя точка А. Пользуясь одной линейкой, постройте касательные к квадрике $G$ из точки А.

## Список литературы

1 Атанасян, Л. С. Геометрия. Решение задач. 9 класс [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б Кадомцев. – М. : Физматлит, 2005. – 120 с.
2 Золотаревская, Д. И. Аналитическая геометрия [Текст] : учебное пособие / Д. И. Золотаревская. – М. : ЛИБРОКОМ, 2010. – 384 с.
3 Ильин, В. А. Аналитическая геометрия [Текст] : учебное пособие / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М. : Физматлит, 2007. – 224 с.
4 Понтрягин, Л. С. Метод координат [Текст] / Л. С. Понтрягин. - 2-е изд., стер.- Серия «Знакомство с высшей математикой». – М. : УРСС, 2004. – 136 с.
5 Привалов, И. В. Аналитическая геометрия [Текст] : учебник для вузов / И. В. Привалов. - 36-е изд. – СПб. : Лань, 2008. – 304 с.
6 Резниченко, С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие для вузов / С. В. Резниченко. – М. : Физматкнига МФТИ, 2001. – 576 с.

Бреславец Светлана Виктровна
Коростелева Светлана Михайловна

**Геометрия**

Материалы для практических занятий по дисциплинам
«Аналитическая геометрия» и «Геометрия»
для студентов направлений 010100 «Математика» и
050100 «Педагогическое образование»
(профиль «Математическое образование»)

Редактор А.С. Мокина

| | | |
|---|---|---|
| Подписано в печать15.05.13 | Формат 60 x 84 1/16 | Бумага тип. №1 |
| Печать трафаретная | Усл. печ. л. 3,0 | Уч.-изд. л. 3,0 |
| Заказ 90 | Тираж 25 | Цена свободная |

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.