МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Экономическое моделирование и информатика»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплине “Математика”
для студентов экономических специальностей
080105(060400), 080109(060500), 080502(060800), 080507(061100),
080111(061500), 080115(350900), 080504(061000), 080301(351300)
всех форм обучения

Курган 2004

Кафедра: «Экономическое моделирование и информатика»

Дисциплина: «Математика» для студентов экономических специальностей 080105(060400), 080109(060500), 080502(060800), 080507(061100), 080111(061500), 080115(350900), 080504(061000), 080301(351300) всех форм обучения

Составили: ассистент Кузьмина С.С., ассистент Плютова А.В.

Работа выполнена при равноценном участии авторов

Методические указания
утверждены на заседании кафедры 29 июня 2004 г.

Рекомендованы редакционно-издательским советом университета

«___»_____________2004 г.

Содержание

Введение

Методические указания предназначены для проведения практических занятий по теме “Дифференциальные уравнения высших порядков”. Состоят из семи разделов, основными из которых для студентов экономических специальностей являются четвертый, шестой и седьмой.

В каждом разделе даны основные теоретические сведения, знание которых необходимо для решения задач. Это может оказаться особенно полезным для студентов-заочников, самостоятельно изучающих теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробное изложение теории можно найти в книгах, указанных в списке рекомендуемой литературы, помещенном в конце брошюры.

Методические указания содержат также большое количество примеров и задач (с ответами), поэтому могут быть использованы для проведения самостоятельных работ и самоконтроля студентов.

1. Основные понятия и определения

Определение 1. *Дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$F\left(x, y, y', y'',\dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{1}$$

где $y = y(x)$ – искомая функция.

Замечание 1. Дифференциальные уравнения связывают между собой независимую переменную $\boldsymbol{x}$, искомую функцию $\boldsymbol{y}$, ее производные различных порядков, при этом сама функция или независимая переменная в уравнении могут отсутствовать.

Определение 2. *Порядком дифференциального уравнения* называется наивысший порядок производной, входящий в это уравнение.

Замечание 2. Если уравнение (1) удается разрешить относительно наивысшей производной, то получаем уравнение в явной форме

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'',\dots, y^{(n-1)}\right). \tag{2}$$

Определение 3. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием уравнения*.

Определение 4 *Решением* дифференциального уравнения (1) называется любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, т.е.

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x),\dots, \varphi^{(n-1)}(x), \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Определение 5. Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, то выражение $\Phi(x,y)=0$ называется ***интегралом*** данного уравнения (1).

Пример 1. Доказать, что функция $y=xe^{2x}$ является решением уравнения $y''-4y'+4y=0$.

Подставив в данное уравнение саму функцию и ее производные $y'=e^{2x}(1+2x)$, $y''=4e^{2x}(1+x)$, получим тождество:

$$4e^{2x}(1+x)-4e^{2x}(1+2x)+4xe^{2x}=4e^{2x}(1+x-1-2x+x)\equiv 0.$$

Определение 6. График решения (или интеграла) дифференциального уравнения на плоскости Oxy называется *интегральной кривой*.

Теорема Коши (*о существовании и единственности решения дифференциального уравнения***).** Если правая часть уравнения (2) является непрерывной функцией в окрестности начальной точки

$$\left(x_0,y_0,y_0^{/},...,y_0^{(n-1)}\right), \qquad (3)$$

и в указанной окрестности непрерывны частные производные этой функции по аргументам $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то уравнение (2) имеет решение $y=y(x)$ на некотором интервале (a,b), содержащем x_0, такое, что:

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0^{/}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, \qquad (4)$$

и оно единственное.

Определение 7. Числа из совокупности (3) называются *начальными данными*, а равенства (4) - *начальными условиями*.

Определение 8. *Общим решением* уравнения (1) называется функция вида

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n), \qquad (5)$$

содержащая n произвольных констант $C_1,C_2,\ldots,C_n$ и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) для любого допустимого набора констант $C_1^{(0)},C_2^{(0)},\ldots,C_n^{(0)}$ функция $y=\varphi\left(x,C_1^{(0)},C_2^{(0)},\ldots,C_n^{(0)}\right)$ - решение уравнения (1);

2) для любых начальных данных $\left(x_0,y_0,y_0^{/},...,y_0^{(n-1)}\right)$ существует такой набор констант $C_1^{(0)},C_2^{(0)},\ldots,C_n^{(0)}$, что $y=\varphi\left(x,C_1^{(0)},C_2^{(0)},\ldots,C_n^{(0)}\right)$ – решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям $y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0^{/}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, т.е.:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right), \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad , \\ y^{(n-1)}{}_0 = \varphi^{(n-1)}\left(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right); \end{cases}$$

Определение 9. Общее решение, полученное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называется *общим интегралом* дифференциального уравнения (1).

Задача Коши для уравнения (1) формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{/}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $\left(x_0, y_0, y_0^{/}, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ - начальные данные.

Определение 10. Решение или интеграл, полученные из общего решения или общего интеграла при фиксированных допустимых числовых значениях произвольных постоянных $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$, называется соответственно *частным решением*

$$y = \varphi\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right)$$

или *частным интегралом*

$$\Phi\left(x, y, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right) = 0$$

дифференциального уравнения (1).

Алгоритм нахождения частного решения дифференциального уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{/}, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ с начальными данными $\left(x_0, y_0, y_0^{/}, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$:

1 находят общее решения уравнения (1) или (2) в виде (5):

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n);$$

2 дифференцируют общее решения (5) по переменной ***x*** до (n-1) порядка, получают систему:

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad , \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n); \end{cases} \tag{6}$$

3 вместо $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ в систему (6) подставляют начальные данные (3), таким образом, выполняются начальные условия (4):

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_0^{/} = \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n); \end{cases} \tag{7}$$

4 решают полученную систему (7) относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, находят: $C_1 = C_1^{(0)}, \quad C_2 = C_2^{(0)}, \ldots, \quad C_n = C_n^{(0)}$;

5 подставляют найденные значения произвольных постоянных $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$ в формулу общего решения (5), получают искомое частное решение: $y = \varphi\left(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right)$ или частный интеграл $\Phi\left(x, y, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right) = 0$.

Определение 11. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым***.

Замечание 3. Особое решение не возможно получить из общего решения ни при каких значениях произвольных постоянных.

Пример 2. Дифференциальное уравнение $y'' = 3 \cdot \sqrt[3]{(y'-1)^2}$ имеет общее решение $y = x + \frac{1}{4}(x + C_1)^4 + C_2$. Функция $y = x + C$ также является решением данного уравнения, но это решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C_1 и C_2. Кроме того, $y' = 1$ для любой точки решения, что приводит к нарушению условия единственности из теоремы Коши, т.к. частная производная правой части данного уравнения по y' при $y' = 1$ разрывна. В следующих пунктах рассмотрим нелинейные уравнения, допускающие понижение порядка, и линейные уравнения с характерными для них приемами интегрирования.

2. Нелинейные уравнения, допускающие понижение порядка

2.1 Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка *n*

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение n-го порядка, содержащее только независимую переменную и производную n-го порядка:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{8}$$

Общее решение уравнения (8) находится путем n-кратного интегрирования. $y^{(n-1)} = \int y^{(n)} dx = \int f(x) dx = \varphi_1(x) + C_1$.

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int (\varphi_1(x) + C_1) dx = \int \varphi_1(x) dx + \int C_1 dx = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2 .$$

После n-кратного интегрирования получаем общее решение уравнения (8):

$$y = \varphi_n(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y^{(4)} = \frac{8}{(x-3)^5}$.

Согласно формуле $y^{(n-1)} = \int y^{(n)}dx = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1$ и правилам интегрирования, имеем: $y''' = \int y^{(4)}dx = \int \frac{8}{(x-3)^5}dx = -\frac{2}{(x-3)^4} + C_1$.

Аналогично находим:

$$y'' = \int y'''dx = \int\left(-\frac{2}{(x-3)^4} + C_1\right)dx = \frac{2}{3(x-3)^3} + C_1x + C_2 {}_{1}\ .$$

Проинтегрировав последнее равенство еще два раза, получим общее решение исходного уравнения:

$$y' = \int y''dx = \int\left(\frac{2}{3(x-3)^3} + C_1x + C_2\right)dx = -\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3,$$

$$y = \int y'dx = \int\left(-\frac{1}{3(x-3)^2} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3\right)dx = \frac{1}{3(x-3)} + \overline{C_1}x^3 + \overline{C_2}x^2 + C_3x + C_4.$$

Интегрируя последовательно исходное уравнение, находим общее решение:

$$\begin{cases} y'' = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C_1, \\ y' = -\dfrac{\ln^2 x}{2} - \ln x + C_1x + C_2, \\ y = -\dfrac{x\ln^2 x}{2} + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3. \end{cases}$$

Пример 2. Найти решение уравнения $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0,\ y' = 1,\ y'' = 2 \quad \text{\textit{при}} \quad x = 1$.

Подставим начальные данные в систему:

$$\begin{cases} 2 = -\dfrac{\ln 1}{1} - 1 + C_1, \\ 1 = -\dfrac{\ln^2 1}{2} - \ln 1 + C_1 + C_2,, \\ 0 = -\dfrac{\ln^2 1}{2} + \dfrac{C_1}{2} + C_2 + C_3. \end{cases}$$

Решая систему относительно неизвестных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получим: $\begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = -2,. \\ C_3 = 0{,}5 \end{cases}$

Заменив C_1, C_2, C_3 в формуле общего решения соответствующими им значениями, получим искомое частное решение $y = -\frac{x\ln^2 x}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2}$.

2.2 Уравнение, не содержащее искомой функции y и последовательных первых производных

Рассмотрим уравнение вида: $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad 1 \le k < n$. (9)
Сделаем замену: $y^{(k)} = z(x)$, где $z(x)$ - новая неизвестная функция. Тогда $y^{(k+1)} = z'(x), \quad y^{(k+2)} = z''(x), \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Таким образом, при замене производных функции y получим уравнение $(n-k)$-го порядка относительно функции z:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0. \tag{10}$$

Тогда общее решение запишется в виде: $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ или $\Phi(x, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}) = 0$. Возвращаясь к переменной y, получим соответственно: $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$ или $\Phi\left(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}\right) = 0$. Далее интегрируем уравнения, как было показано в пункте 2.1.

Замечание 1. Изложенным выше методом всегда может быть проинтегрировано в квадратурах линейное уравнение вида $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} = f(x)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения: $y''' ctgx + y'' = 2$.

Данное уравнение не содержит искомой функции y и первой производной. Поэтому произведем замену: $y'' = z(x)$, тогда $y''' = z'(x)$, и уравнение примет вид: $z' ctgx + z = 2$. Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1-ого порядка: $z' + \dfrac{z}{ctgx} = \dfrac{2}{ctgx}$, которое решаем методом вариаций произвольной постоянной или методом Бернулли:

$$z = 2 + C_1 \cos x,$$

$$y'' = 2 + C_1 \cos x.$$

$$y' = \int (2 + C_1 \cos x) dx = 2x + C_1 \sin x + C_2,$$

$$y = \int (2x + C_1 \sin x + C_2) dx = x^2 - C_1 \cos x + C_2 x + C_3.$$

Пример 4. Найти частное решение уравнения $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = e, \; y'(1) = e^2$. Уравнение не содержит искомую функцию y. Понизим порядок уравнения на единицу, положив $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'(x)$. При этом получим однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции z: $xz' = z \ln\left(\dfrac{z}{x}\right)$. Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$z = xe^{1 + C_1 x},$$

$$\frac{dy}{dx} = xe^{1 + C_1 x}.$$

Отсюда $y = \int x e^{1+C_1 x} dx = \dfrac{C_1 x - 1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2$. Получили общее решение исходного уравнения. Значения произвольных постоянных C_1 и C_2 определяются с помощью начальных условий: $\begin{cases} \dfrac{C_1 - 1}{C_1^2} e^{1+C_1} + C_2 = e, \\ e^{1+C_1} = e^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = e \end{cases}$.

Тогда искомое частное решение: $y = (x-1)e^{1+x} + e$.

Пример 5. Найти частное решение уравнения $(y'')^2 = 4(y'-1)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0,\ y' = 1$ при $x = 0$. Полагая $y' = z$, получаем уравнение первого порядка:

$$(z')^2 = 4(z-1),$$
$$z' = \pm 2\sqrt{z-1},$$
$$dz = \pm 2\sqrt{z-1}dx.$$

Поделим обе части последнего уравнения на выражение $\pm 2\sqrt{z-1}$ при условии $z \neq 1$: $\dfrac{dp}{\pm 2\sqrt{z-1}} = dx.$

Отсюда:

$$\pm\sqrt{z-1} = x + C_1,$$
$$z = 1 + (x + C_1)^2.$$

Получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 + (x + C_1)^2, \\ y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2. \end{cases}$$

Подставив в систему начальные данные, получим: $C_1 = 0, C_2 = 0$. Тогда искомое частное решение имеет вид: $y = x + \dfrac{1}{3}x^3$.

В ходе решения исключилось условие $z' = 1$, которое необходимо проверить, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = 1,\ y = x + C$. Семейство $y = x + C$ дает особые решения исходного уравнения. Действительно, разрешив уравнение относительно y'', получим два уравнения: $y'' = 2\sqrt{y'-1}, \quad y'' = -2\sqrt{y'-1}.$

Для каждого из этих уравнений не выполняются условия теоремы существования и единственности решения (пункт 1) ни в какой окрестности начальной точки $(0{,}0{,}1)$, т.к. производные от правых частей по y' обращаются в бесконечность при $y' = 1$. Проверим, нет ли среди особых решений такого, которое удовлетворяло бы поставленным начальным условиям. Очевидно, что таким решением будет $y = x$. Это решение не входит в общее решение ни при каких C_1, C_2, поэтому решение запишем: $y = x + \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ y = x$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' = 0$.

Данное уравнение *не содержит искомую функцию* y, поэтому сделаем замену $y' = p(x)$ (пункт 2.2), тогда $y'' = p'(x)$. Получим линейное однородное уравнение 1-го порядка относительно функции $p(x)$: $p' + \frac{2}{x}p = 0$. Последнее уравнение является также уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{p} = -2\frac{dx}{x},$$

$$p = \frac{C}{x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{x^2},$$

$$y = \int \frac{C}{x^2}dx = \frac{C_1}{x} + C_2.$$

2.3 Уравнение, не содержащее независимой переменной x

Уравнение вида $$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (11)$$

допускает понижение порядка на единицу, если ввести замену $y' = p(y)$, а за новый аргумент принять y. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ преобразуются так:

$$\begin{cases} y'' = (y')' = (p(y))' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p, \\ y''' = (y'')' = (p' \cdot p)' = p'' \cdot p^2 + (p')^2 \cdot p, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad , \\ y^{(n)} = \omega\left(p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right). \end{cases} \qquad (12)$$

Подставляя найденные $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (11), получим уравнение $(n-1)$-го порядка с искомой функцией p от независимой переменной y.

Замечание 2. Принимая y за независимую переменную, можно потерять решение вида $y = C = const$. Непосредственной подстановкой $y = C$ в уравнение (11), можно выяснить, имеет ли оно решения такого вида.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $2yy'' = (y')^2 + y^2$.

Данное уравнение не содержит явно аргумент x, поэтому с помощью замены $y' = p(y)$, $y'' = p'(y)y' = p'p$ можно понизить порядок уравнения на единицу. При этом получим уравнение первого порядка $2yp'p = p^2 + y^2$. Пусть $p^2 = u$, тогда $(p^2)' = 2p'p.$, подставляя в последнее уравнение, получим: $y\dfrac{du}{dy} = u + y^2$. Разделим обе части уравнения на $y \neq 0$: $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{1}{y}u + y,$ при этом $y = 0$ является особым решением. Интегрируя последнее уравнение, находим $u = C_1 y + y^2$. Следовательно, $p^2 = C_1 y + y^2$, $(y')^2 = C_1 y + y^2$, откуда:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx,$$

$$\ln\left| y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1 y + y^2} \right| = \pm x + C_2.$$

Функция $y = 0$ будет частным решением.

Пример 8. Решить задачу Коши: $y^3 y' y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}.$

Положив $y' = p(y)$ и приняв y за новую независимую переменную, получим $y'' = p'(y)y' = p'p$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде: $y^2 p^2 \dfrac{dp}{dy} + 1 = 0.$ Отсюда:

$$p = \sqrt[3]{\frac{3}{2y^2} + 3C_1}\text{, т.е.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{\frac{3}{2y^2} + 3C_1}.$$

Прежде чем интегрировать последнее уравнение, определим значение произвольной постоянной C_1, воспользовавшись начальным условием $y'(1) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$: $\sqrt[3]{3/2} = \sqrt[3]{3/2 + 3C_1}$, $C_1 = 0.$ Итак, приходим к уравнению $y' = \left(\dfrac{3}{2}y^2\right)^{\frac{1}{3}}$, которое легко решается путем разделения переменных. Получим: $y = \dfrac{(x + C_2)^3}{18}.$ Из начального условия $y(1) = 1,$ находим C_2: $1 = \dfrac{(1 + C_2)^3}{18}$, $C_2 = \sqrt[3]{18} - 1.$ Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = \dfrac{\left(x + \sqrt[3]{18} - 1\right)^3}{18}.$

2.4 Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *однородной* k-го порядка относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если для $\forall t \neq 0$ справедливо равенство:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Определение 2. Уравнение $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется *однородным относительно искомой функции и ее производных*, если функция $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ является однородной относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

Однородное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка на единицу, если сделать замену: $\dfrac{y'}{y} = z$, таким образом:

$$y' = y \cdot z, \tag{13}$$

где z - новая неизвестная функция: $z = z(x)$.

Действительно, найдем выражения для $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$. Продифференцируем последовательно формулу (13) и каждый раз будем заменять y' на yz:

$$\begin{cases} y'' = y'z + yz' = y\left(z^2 + z'\right), \\ y''' = y\left(z^3 + 3zz' + z''\right), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ y^{(n)} = y\omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right). \end{cases}$$

Подставим выражения для $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в исходное уравнение:

$$F\left(x, y, yz, y\left(z^2 + z'\right), \ldots, y\omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Вследствие предположения однородности функции F:

$$y^k \cdot F\left(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0,$$

тогда, разделим обе части последнего уравнения на y^k:

$$F\left(x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \omega\left(z, z', \ldots, z^{(n-1)}\right)\right) = 0.$$

Это уравнение $(n-1)$-го порядка. Если мы найдем его общее решение $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, то, применяя обратную замену z, на $\dfrac{y'}{y}$, получим: $\dfrac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$. Интегрируем обе части: $\ln y = \int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, потенцируя, найдем общее решение исходного уравнения $y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) dx}$.

Пример 9. Проинтегрировать уравнение $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$.

Полагая $y' = yz$, имеем $y'' = y\left(z^2 + z'\right)$. Подставляя выражения для y' и y'' в исходное уравнение и сокращая на $y^2 (y \neq 0)$, получим: $x\left(z^2 + z'\right) - xz^2 - z = 0$ или $xz' - z = 0$. Интегрируя последнее уравнение, находим $z = C_1 x$. Заменим z на $\dfrac{y'}{y}$: $\dfrac{y'}{y} = C_1 x$. Интегрируя еще раз, получаем: $y = C_2 e^{\frac{C_1}{2} x^2}$ *или* $y = Be^{Ax^2}$, $A = \dfrac{C_1}{2}$, $B = C_2$. $y = 0$ - частное решение уравнения.

2.5 Задачи для самостоятельной работы

1. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (пункт 2.1): $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $y = \dfrac{\ln 2}{2}$, $y' = 1$ *при* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $y = -\ln|\cos x|$.

2. Проинтегрировать уравнения (пункт 2.2):

1) $xy'' = y' \cdot \ln \dfrac{y'}{x}$;

2) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$.

Ответы: 1) $y = \dfrac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1}\left(x - \dfrac{1}{C_1}\right) + C_2$, $y = \dfrac{ex^2}{2} + C$;

2) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2 x + C_3 + \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{2}$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомого решения (пункт 2.2):

1) $y'' = \left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}$; $y = 1$, $y' = 0$ *при* $x = 0$;

2) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y = 0$, $y' = 4$ *при* $x = 2$;

3) $4y' + (y'')^2 = 4xy''$; $y = 0$, $y' = 0$ *при* $x = 0$.

Ответы: 1) $y = -\sqrt{1 - x^2} + 2$; 2) $y = \dfrac{2}{5}\sqrt{2x^5} - \dfrac{16}{5}$; 3) $y = 0$, $y = \dfrac{x^3}{3}$.

4. Проинтегрировать уравнение (пункт 2.3):

1) $y \cdot y'' - 2y \cdot y' \cdot \ln y - (y')^2 = 0$;

2) $1 + (y')^2 = 2y \cdot y''$.

Ответы: 1) $\ln y = C_1 tg(C_1 x + C_2)$; 2) $2C_1 y = (\pm C_1 x + C_2)^2 + 1$.

5. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y'' = e^{2y}$; $y = 0$, $y' = 1$ *при* $x = 0$;

2) $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2y \cdot y'}{1 + y^2}$; $y = 0$, $y' = 1$ *при* $x = 0$.

Ответы: 1) $y = \ln \dfrac{1}{|1 - x|}$; 2) $y = tgx$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. Найти общее решение уравнения (пункт 2.4): $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

Ответ: $y = C_2 e^{-\frac{C_1}{x}}$.

7. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (пункт 2.4): $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ *при* $x = 0$.

Ответ: $y = 1 + \sin x$.

3. Линейные однородные уравнения

3.1 Понятие линейного однородного уравнения

Определение 1. *Линейным уравнением n-го порядка* называется уравнение $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$. (14)

Определение 2. Если при всех рассматриваемых значениях x функция $f(x)$ равна нулю, то уравнение (14) называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Замечание 1. Предполагается, что коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны на интервале (a,b), тогда уравнение (14) на интервале (a,b) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

Замечание 2. Всякое решение линейного уравнения является частным решение, поэтому *особых решений оно не имеет*.

3.2 Линейно-зависимые и линейно-независимые системы функций

При отыскании общего и частного решений уравнений (14) важную роль играет понятие линейной зависимости и линейной независимости нескольких функций.

Определение 3. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a,b), если существуют постоянные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) = 0$ для любых $x \in (a,b)$. Если же указанное тождество выполняется только в случае, когда все $\alpha_i = 0$, то функции $y_i(x)$ называются *линейно независимыми* на интервале (a,b).

Определение 4. *Определителем Вронского* системы функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель, составленный из этих функций и их производных до $(n-1)$-го порядка:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 *(необходимое условие линейной зависимости n функций).* Если функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ определены, имеют непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка (включительно) и *линейно зависимы* на интервале (a,b), то определитель Вронского равен нулю, т.е. $W(x)=0$ для $\forall x\in(a;b)$.

Замечание 3. Сформулированное условие линейной зависимости не является достаточным для произвольной системы функций.

Теорема 2 ***(достаточное условие линейной независимости n функций).*** Если функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ определены, имеют непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка (включительно) на интервале (a,b) и хотя бы в одной точке $x_0\in(a,b)$ $W(x_0)\neq 0$, то система функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ *линейно независима* на (a,b).

Пример 1. Доказать, что система функций $y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ y_3=e^{2x}$ является линейно независимой.

Составим определитель Вронского. Для этого найдем производные первого и второго порядков данной системы функций:
$y_1'=e^x,\ y_2'=-e^{-x},\ y_3'=2e^{2x},\ y_1''=e^x,\ y_2''=e^{-x},\ y_3''=4e^{2x}$ и запишем их по строкам соответственно:

$$W\left(e^x,e^{-x},e^{2x}\right)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x}\\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x}\\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x}\end{vmatrix}=e^xe^{-x}e^{2x}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{vmatrix}=-6e^{2x}\neq 0$$

для любых x. Так как определитель Вронского $W\neq 0$, то по теореме 2 система функций линейно независима.

3.3 Свойства решений линейного однородного уравнения. Структура общего решения линейного однородного уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0. \tag{15}$$

Теорема 3. Если некоторая функция y_1 есть частное решение уравнения (15), то функция $y_2=\alpha\cdot y_1$ для $\forall\alpha\in R$ также является решением этого уравнения.

Теорема 4. Если каждая из функций $y_1,y_2,\ldots,y_n$ есть частное решение уравнения (15), то любая их линейная комбинация $y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n$ также является решением этого уравнения.

***Определение* 5.** Совокупность n линейно независимых частных решений $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ уравнения (15) называется *фундаментальной системой решений (ФСР)* этого уравнения.

Теорема 5. Чтобы система частных решений $y_1,y_2,\ldots,y_n$ уравнения (15) была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель

Вронского системы решений был отличен от нуля *на всем интервале*, где эти решения определены.

Замечание 4. Всякое уравнение (15) при условии непрерывности коэффициентов имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений.

Замечание 5. Построить фундаментальную систему решений в элементарных функциях или в квадратурах от элементарных функций удается всегда для уравнений с постоянными коэффициентами или для уравнений, приводящихся к ним (пункты 4, 6). Для уравнений с переменными коэффициентами задача интегрирования однородных и неоднородных линейных уравнений облегчается путем предварительного понижения порядка уравнения.

Теорема 6. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - любая фундаментальная система решений уравнения (15), то функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, (16)
где C_i - произвольные постоянные, является общим решением уравнения (15).

Пример 2. Является ли функция $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ общим решением уравнения $y'' - 9y = 0$?

Подстановкой в уравнение легко убедиться в том, что функции $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = e^{-3x}$ являются его решениями. Эти частные решения линейно независимы, т.к. $W\left(e^{3x}, e^{-3x}\right) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = e^{3x} e^{-3x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, а потому составляют ФСР. Тогда по теореме 4 функция $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ - общее решение.

3.4 Понижение порядка линейного однородного уравнения с помощью известных частных решений

Если для уравнения (15) известно ненулевое частное решение y_1, то подстановка $y = y_1 \cdot z$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция, приводит его к линейному однородному уравнению n-го порядка относительно функции z, не содержащему явно эту функцию (т.е. уравнению, допускающему понижение порядка). Если известно k линейно независимых частных решений уравнения (15), то его порядок можно понизить на k единиц.

Линейные однородные уравнения 2-го порядка, для которых известно одно частное решение, можно интегрировать сразу, не прибегая к понижению их порядка. Так, если $y_1(x)$ - ненулевое частное решение уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то второе его частное решение, линейно независимое с первым, можно найти по формуле *Лиувилля-Остроградского*:

$$y_2(x) = y_1 \cdot \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx. \qquad (17)$$

Общее решение уравнения запишется в виде: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, если известно одно из его частных решений $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

По формуле (17) второе частное решение

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{e^{\int -\frac{2}{x}dx}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} dx = \frac{\sin x}{x} \cdot \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x},$$

тогда общее решение данного уравнения примет вид: $y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Подбором находим, что функция $y_1(x) = x$ есть одно из частных решений уравнения. Далее можно решать двумя путями: 1) найти второе частное решение по формуле (17) и записать общее решение; 2) понизить порядок уравнения. Применим второй способ. Пусть $y = y_1 \cdot z = x \cdot z$. Тогда $y' = xz' + z, \quad y'' = xz'' + 2z'$. Подставим выражения y, y' и y'' в исходное уравнение, получим: $x(x^2+1)z'' + 2z' = 0$.

Теперь, полагая $z' = u(x), \quad z'' = u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно u: $x(x^2+1)u' + 2u = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид $u = C_1 \frac{x^2+1}{x^2}$, откуда, учитывая $u = z'$, получаем уравнение 1-го порядка относительно z: $dz = C_1\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

Интегрируя последнее, находим $z = C_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2$, а т.к. $y = xz$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2 x.$$

3.5 Задачи для самостоятельной работы

1. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

1) $x, \quad \ln x$;

2) $xe^x, \quad e^{x+\ln x}$;

3) $2x^2+1, \quad x^2-1, \quad x+2$;

4) $\sin x, \quad \cos x, \quad \sin 2x$.

Ответы: 1) нез.; 2) зав.; 3) нез.; 4) нез.

2. Найти общее решение уравнения, пользуясь указанным частным решением:

1) $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0, \quad y_1 = x$;

2) $y'' \sin^2 x = 2y, \quad y_1 = ctgx$;

3) $y'' + (tgx - 2ctgx) y' + 2ctg^2 xy = 0, \quad y_1 = \sin x$;

4) $(1 - x^2) y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0, \quad y_1 = \sqrt{1 + x}$.

Ответы: 1) $y = C_1 x \ln x + C_2 x$; 2) $y = C_1 ctgx - C_2 xctgx$; 3) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$; 4) $y = C_1 \sqrt{1 + x} + C_2 \sqrt{1 - x}$.

4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

4.1 Основные понятия и решение дифференциальных уравнений в зависимости от корней характеристического уравнения

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{18}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - некоторые действительные числа.

Это уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, определенную при любых значениях x. Метод построения ФСР (метод Эйлера) состоит в том, что частное решение уравнения (18) имеет вид:

$$y = e^{kx},$$

где k - некоторое постоянное число (действительное или комплексное), которое нужно определить.

Подставим функцию $y = e^{kx}$ в уравнение (18), получим:

$$\left(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n\right) e^{kx} = 0.$$

Отсюда следует, что k должно удовлетворять уравнению:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{19}$$

Определение 1. Уравнение вида (19) называется *характеристическим уравнением*, а его корни - *характеристическими числами* уравнения (18).

Структура ФСР, и общего решения зависит от вида корней характеристического уравнения.

Различают три случая.

1). *Все корни характеристического уравнения* (19) *различные и действительные числа*. Обозначим их через $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогда ФСР будет состоять из функций: $y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, \quad y_n = e^{k_n x}$, а общее решение примет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$.

2). *Все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные.* Пусть $k_1 = a + bi$ - комплексный корень характеристического уравнения (19), тогда $k_2 = a - bi$ тоже будет корнем этого уравнения. Паре комплексно-сопряженных корней соответствуют два линейно независимых частных решения уравнения (18): $y_1 = e^{ax}\cos bx,\quad y_2 = e^{ax}\sin bx$. Общее решение, соответствующее $k_{1,2} = a \pm bi,$ примет вид: $e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right)$.

3). *Среди корней характеристического уравнения имеются кратные.* Пусть k_1 - *действительный* r-кратный корень. Тогда ему соответствует r линейно независимых частных решений вида $e^{k_1x},\, xe^{k_1x}, \ldots,\, x^{r-1}e^{k_1x}$, а в формуле общего решения выражение вида - $e^{k_1x}\left(C_1 + C_2x + \ldots + C_rx^{r-1}\right)$.

Если $k_1 = a + bi$ - *комплексный* корень характеристического уравнения кратности r, то ему и сопряженному с ним корню $k_2 = a - bi$ той же кратности соответствуют $2r$ линейно независимых частных решений вида:

$$\begin{cases} e^{ax}\cos bx, & xe^{ax}\cos bx, \ldots, \quad x^{r-1}e^{ax}\cos bx, \\ e^{ax}\sin bx, & xe^{ax}\sin bx, \ldots, \quad x^{r-1}e^{ax}\sin bx. \end{cases}$$

В формуле общего решения этим корням соответствует выражение вида:

$$e^{ax}\left(\left(C_1 + C_2x + \ldots + C_rx^{r-1}\right)\cos bx + \left(C_{r+1} + C_{r+2}x + \ldots + C_{2r}x^{r-1}\right)\sin bx\right).$$

Записав решения, соответствующие всем простым и кратным вещественным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней, получим ФСР уравнения (18). Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y''' - 5y'' + 6y' = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$ имеет различные действительные корни: $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 3$, поэтому совокупность функций $y_1 = 1,\, y_2 = e^{2x},\, y_3 = e^{3x}$ образует ФСР, а функция $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$ является общим решением уравнения.

Пример 2. Дано дифференциальное уравнение $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0$.

Его характеристическим уравнением будет $k^3 + 3k^2 + 9k - 13 = 0$.
Оно имеет один действительный корень $k_1 = 1$ и два комплексно-сопряженных корня $k_2 = -2 + 3i,\, k_3 = -2 - 3i$. Поэтому функции $y_1 = e^x,\, y_2 = e^{-2x}\cos 3x,\, y_3 = e^{-2x}\sin 3x$ образуют фундаментальную систему решений, а $y = C_1e^x + e^{-2x}\left(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x\right)$ является общим решением уравнения.

Пример 3. Пусть дано уравнение $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$.

Его характеристическое уравнение $k^3-2k^2+4k-8=0$ имеет один вещественный корень $k_1=2$ и два чисто мнимых корня $k_2=2i, k_3=-2i$. Поэтому $y_1=e^{2x}, y_2=\cos 2x, y_3=\sin 2x$ и $y=C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

Пример 4. Для уравнения $y'''-5y''+8y'-4y=0$ имеем $k^3-5k^2+8k-4=0;\ \ k_1=1, k_2=k_3=2$. Здесь один корень простой и один двукратный. Поэтому фундаментальная система решений состоит из функций: $y_1=e^x, y_2=e^{2x}, y_3=xe^{2x}$, тогда общее решение примет вид: $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2+C_3x)$.

Пример 5. Для уравнения $y^{(4)}+2y''+y=0$
имеем $k^4+2k^2+1=0;\ \ k_1=k_2=i, k_3=k_4=-i$. Поэтому
$y_1=\cos x, y_2=x\cos x;\ \ y_3=\sin x, y_4=x\sin x$ и $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y''-y=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=1, y'(0)=0$. Составим соответствующее характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2-1=0;\ \ k_1=1, k_2=-1$. Тогда общее решение имеет вид: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Подставим начальные данные $x_0=0, y_0=1, y_0'=0$ в систему:

$$\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}, \\ y'=C_1e^x-C_2e^{-x}, \end{cases}$$

получим:

$$\begin{cases} 1=C_1+C_2, \\ 0=C_1-C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$, следовательно, искомым решением будет - $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$.

4.2 Задачи для самостоятельной работы

1. Найти общее решение уравнения:

1) $y''+3y'+2y=0$;
2) $y'''-2y''-y'+2y=0$;
3) $y^{(4)}-5y''+4y=0$;
4) $y^{(5)}-10y'''+9y'=0$;
5) $y''+2y'+2y=0$;
6) $y''+4y=0$;
7) $y'''-y=0$;
8) $y^{(4)}-y=0$;
9) $y^{(4)}+10y''+9y=0$;
10) $y'''-7y''+16y'-12y=0$;
11) $y'''-6y''+12y'-8y=0$;

12) $y^{(4)}+2y''-8y'+15y=0$;

13) $y^{(4)}+8y''+16y=0$.

Ответы:

1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$;

2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$;

3) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}+C_4e^{-2x}$;

4) $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$;

5) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$;

6) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$;

7) $y=C_1e^{x}+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$;

8) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$;

9) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$;

10) $y=C_1e^{3x}+e^{2x}(C_2+C_3x)$;

11) $y=e^{2x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$;

12) $y=e^{x}(C_1+C_2x)+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$;

13) $y=(C_1+C_2x)\cos 2x+(C_3+C_4x)\sin 2x$.

2. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y''+y=0;\quad y=1,\ y'=0\quad \textit{при}\quad x=\frac{\pi}{2}$;

2) $y^{(4)}-y=0;\quad y=1,\ y'=1,\ y''=1,\ y'''=1\quad \textit{при}\quad x=0$.

Ответы: 1) $y=\sin x$; 2) $y=e^{x}$.

5. Линейные неоднородные уравнения

5.1 Структура общего решения. Интегрирование линейного неоднородного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x). \qquad (14)$$

Теорема 1 (*о структуре общего решения*). Общее решение линейного неоднородного уравнения (14) имеет вид: $\quad y=\overline{y}+y^*$, $\qquad$ (20)

где $\overline{y}$ - общее решение соответствующего ему однородного уравнения (15), а y^* - одно из частных решений уравнения (14). Если правая часть уравнения (14) равна сумме нескольких различных функций, то для отыскания частного решения такого уравнения нужно использовать **теорему наложения решений**: надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и является частным решением исходного уравнения (14) (т.е. уравнения с суммой соответствующих функций в правой части). Непосредственное нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения, кроме случая уравнения с постоянными коэффициентами, причем, с правыми частями специального вида (пункт 6), представляет большие трудности. Поэтому на практике для нахождения общего решения неоднородного уравнения обычно применяют *метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)*, который всегда дает возможность найти общее решение уравнения (14) в квадратурах, если известна ФСР соответствующего однородного уравнения (15).

5.2 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Если известна фундаментальная система решений уравнения (14), то согласно методу вариаций (метод Лагранжа) общее решение уравнения (14) всегда представимо в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{21}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (14), а неизвестные функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases} \tag{22}$$

которая является линейной системой алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$. Определитель системы является определителем Вронского, который в случае фундаментальной системы решений y_i отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots, C_n'(x) = \varphi_n(x),$$

откуда: $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{C_1}, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{C_2}, \ldots, C_n(x) = \int \varphi_n(x)dx + \overline{C_n}$.

Подставляя функции $C_i(x)$ в формулу (21), получим общее решение уравнения (14):

$$y = \overline{C_1}y_1 + \overline{C_2}y_2 + \ldots + \overline{C_n}y_n + y_1\int \varphi_1(x)dx + y_2\int \varphi_2(x)dx + \ldots + y_n\int \varphi_n(x)dx.$$

Замечание 1. Для отыскания неизвестных $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ по формулам Крамера, заметим, что определитель основной матрицы системы равен определителю Вронского: $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$.

Тогда для отыскания $C_i'(x)$ используют формулу: $C_i'(x)=\frac{W_i}{W}$, где W - определитель Вронского, W_i - определитель, полученный из W, путем замены i- го столбца столбцом $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$.

Пример 1. Дана ФСР $y_1 = x+2$ и $y_2=\frac{1}{(x+2)^3}$, $y''+\frac{3}{x+2}y'-\frac{3}{(x+2)^2}y=0$

Найти общее решение уравнения $y''+\frac{3}{x+2}y'-\frac{3}{(x+2)^2}y=\frac{1}{(x+2)^4}$.

Общее решение однородного уравнения, соответствующее данному неоднородному, имеет вид: $y=C_1(x+2)+C_2\frac{1}{(x+2)^3}$. (*)

Тогда общее решение неоднородного уравнения, согласно уравнению (21), примет вид: $y=C_1(x)(x+2)+C_2(x)\frac{1}{(x+2)^3}$. Найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$, решая систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)(x+2)+C_2'(x)\frac{1}{(x+2)^3}=0, \\ C_1'(x)-3C_2'(x)\frac{1}{(x+2)^4}=\frac{1}{(x+2)^4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)=-\frac{C_2'(x)}{(x+2)^4}, \\ -\frac{C_2'(x)}{(x+2)^4}-\frac{3C_2'(x)}{(x+2)^4}=\frac{1}{(x+2)^4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x)=-\frac{1}{4}, \\ C_1'(x)=\frac{1}{4(x+2)^4}. \end{cases}$$

Интегрируя последние равенства, находим:

$$\begin{cases} C_1(x)=-\frac{1}{12(x+2)^3}+\overline{C_1}, \\ C_2(x)=-\frac{1}{4}x+\overline{C_2}. \end{cases}$$

Подставив функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (*), получим общее решение исходного уравнения:

$$y=\overline{C_1}(x+2)+\overline{C_2}\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{1}{12(x+2)^3}(x+2)-\frac{x}{4(x+2)^3}=\overline{C_1}(x+2)+\overline{C_2}\frac{1}{(x+2)^3}-\frac{2x+1}{6(x+2)^3}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Рассмотрим сначала однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y'' - y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1$. Функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ образуют ФСР однородного уравнения, а его общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Заменив произвольные постоянные C_1 и C_2 функциями от x, получим общее решение неоднородного уравнения: $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$. (**)
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{e^x + 1}. \end{cases}$$

Найдем неизвестные по формулам: $C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W}$, $C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W}$. Для этого найдем определитель Вронского W и определители W_1, W_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{e^x}{e^x + 1} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} = -\frac{1}{e^x + 1},$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{e^x + 1} \end{vmatrix} = e^x \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{W_1}{W} = \dfrac{1}{2(e^x + 1)}, \\ C_2'(x) = \dfrac{W_2}{W} - \dfrac{e^{2x}}{2(e^x + 1)}. \end{cases}$$

Интегрируя, имеем:

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln(e^x + 1) + C_1, \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}\ln(e^x + 1) + C_2. \end{cases}$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу (**), получаем общее решение исходного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2}\left(\left(x - \ln(e^x + 1)\right)e^x + \left(-1 + \ln(e^x + 1)\right)e^{-x}\right)$.

5.3 Понижение порядка линейного неоднородного уравнения с помощью известных частных решений

Как было отмечено ранее (пункт 3, замечание 5), понижение порядка дифференциальных уравнений во многих случаях облегчает процесс их интегрирования. Чтобы понизить порядок неоднородного уравнения на единицу, достаточно знать какое-нибудь ненулевое частное решение y_1 соответствующего ему однородного уравнения и воспользоваться заменой $y = y_1 \cdot z(x)$, которая уже упоминалась в пункте 3.4 применительно к однородным уравнениям.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{3}{x+2}y' - \frac{3}{(x+2)^2}y = \frac{1}{(x+2)^4}$, если известны два частных решения $y_1 = x+2$ и $y_2 = \frac{1}{(x+2)^3}$ соответствующего однородного уравнения.

Данное уравнение было решено в пункте 5.2 (пример 1) методом вариации. Теперь проинтегрируем его вторым способом - с помощью замены $y = y_1 z$. За y_1 возьмем функцию $x+2$, тогда $y = (x+2)z$. Отсюда, $y' = z + (x+2)z'$, $y'' = 2z' + (x+2)z''$. Подставим выражения y, y' и y'' в исходное уравнение, получим уравнение $z'' + \frac{5}{x+2}z' = \frac{1}{(x+2)^5}$, не содержащее искомой функции z, а значит, допускающее понижение порядка. Сделаем еще одну замену: $z' = p(x), z'' = p'(x)$, после чего получим линейное неоднородное уравнение первого порядка: $p' + \frac{5}{x+2}p = \frac{1}{(x+2)^5}$.

Интегрируя, находим общее решение $p = \frac{C_1}{(x+2)^5} + \frac{x}{(x+2)^5}$.

Отсюда:

$$z = \int p(x)dx = C_1\int\frac{dx}{(x+2)^5} + \int\left(\frac{1}{(x+2)^4} - \frac{2}{(x+2)^5}\right)dx = -\frac{C_1}{4(x+2)^4} + C_2 - \frac{1}{3(x+2)^3} + \frac{1}{2(x+2)^4}.$$

Тогда общее решение исходного уравнения:

$$y = (x+2)z = -\frac{C_1}{4(x+2)^3} + C_2(x+2) - \frac{1}{3(x+2)^2} + \frac{1}{2(x+2)^3}$$

или

$$y = \overline{C_1}(x+2) + \overline{C_2}\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2x+1}{6(x+2)^3}.$$

Как видно из решения, получили тот же результат.

5.4 Другие методы понижения порядка линейного неоднородного уравнения

Пример 4. Линейное неоднородное уравнение 3-го порядка $y''' = \frac{2}{x^2}$ содержит только независимую переменную и старшую производную. Порядок такого уравнения можно понизить на две единицы (пункт 2.1) путем последовательного интегрирования правой части:

$$y'' = 2\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{x} + C_1,$$

$$y' = -2\int \frac{dx}{x} + C_1 x = -2\ln x + C_1 x + C_2,$$

$$y = -2x(\ln x - 1) + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Таким образом, $y = \overline{C_1} x^2 + C_2 x + C_3 - 2x(\ln x - 1)$ - общее решение уравнения.

Пример 5. Уравнение $xy'' - y' = e^x x^2$ не содержит искомой функции, а значит, допускает понижение порядка на единицу с помощью замены $y' = p(x)$ (пункт 2.2). После подстановки получаем:

$$xp' - p = e^x x^2,$$

$$p' - \frac{1}{x} p = e^x x.$$

Интегрируя последнее уравнение как линейное первого порядка, получим:

$$p = C_1 x + xe^x \text{, т.е. } \frac{dy}{dx} = C_1 x + e^x x.$$

Отсюда, $y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + e^x(x-1) + C_2$ - общее решение исходного уравнения.

Пример 6. Уравнение $y'' + 5y' + 6y = 3$ не содержит явно независимую переменную, поэтому допускает понижение порядка на единицу (пункт 2.3) с помощью замены $y' = p(y)$. Однако, в данном случае такая замена не облегчает процесс интегрирования, поэтому лучше воспользоваться алгоритмом, рассмотренным в пункте 6.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' + \dfrac{2}{x} y' - \dfrac{2}{x^2} y = 3x^2$.

Нетрудно увидеть, что левая часть уравнения есть производная по x от функции $\Phi(x, y, y') = y' + \dfrac{2}{x} y$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде:

$$\left(y' + \frac{2}{x} y \right)' = 3x^2.$$

Отсюда $y' + \dfrac{2}{x} y = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$. Интегрируя полученное уравнение как линейное первого порядка, находим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{6}.$$

5.5 Задачи для самостоятельной работы

1. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных:

1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$;

2) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x$;

3) $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

4) $y'' + 4y = ctg\, 2x$;

5) $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$;

6) $y'' + y = e^x + \cos x$;

7) $xy'' + 2y' + xy = x$, $y_1 = \dfrac{\cos x}{x}$, $y_2 = \dfrac{\sin x}{x}$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения;

8) $ctgx \cdot y'' + 2y' + (2tgx + ctgx)y = \cos^2 x$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = x\cos x$ - фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения.

Ответы:

1) $y = e^x(C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{x}$;

2) $y = C_1 + C_2 e^x + \dfrac{e^x}{x}$;

3) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$;

4) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln(tg\, 2x)$;

5) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sqrt{\sin 2x}$;

6) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}(e^x + x \sin x)$;

7) $y = C_1 \dfrac{\cos x}{x} + C_2 \dfrac{\sin x}{x} + 1$;

8) $y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x - \sin x \cdot \cos x$.

2. Найти общее решение уравнения, если известны два частных решения соответствующего ему однородного уравнения (воспользоваться заменой вида $y = y_1 \cdot z$):

1) $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = \dfrac{ctgx}{x}$, $\quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $y_2 = \dfrac{\cos x}{x}$;

2) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$, $\quad y_1 = e^x$, $y_2 = x$.

Ответы:

1) $y = C_1 \dfrac{\sin x}{x} + C_2 \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{\sin x}{x} \ln\left| tg\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$;

2) $y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1$.

3. Проинтегрировать уравнения, допускающие понижение порядка (пункт 5.4, пример 2):
   1) $xy''' + y'' - x - 1 = 0$;
   2) $y''' = 2(y'' - 1)ctgx$.

Ответы:

1) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2 x + C_3 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{12}$;

2) $y = C_1\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{\cos 2x}{8}\right) + C_2 x + C_3 + \dfrac{x^2}{2}$.

6. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (23)$$

с помощью метода вариации произвольных постоянных всегда может быть проинтегрировано в квадратурах от элементарных функций, т.к. соответствующее ему однородное уравнение (18) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций.

6.1 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. Метод неопределенных коэффициентов

Общее решение неоднородного уравнения (23), согласно теореме 1 (пункт 5) определяется по формуле: $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ - общее решение соответствующего ему однородного уравнения (18), а y^* - одно из частных решений уравнения (23), которое может быть найдено методом неопределенных коэффициентов, если правая часть уравнения (23), т.е. функция $f(x)$ имеет специальный вид.

Укажем эти случаи и соответствующие им *виды частных решений*.

1). $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n.

Если число α не является корнем характеристического уравнения (19), то $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если α есть корень характеристического уравнения (19) кратности r, то $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$.

2). $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, где $P_n(x), Q_m(x)$ - многочлены соответственно n-й и m–й степени.

Если число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения (19), то $y^* = e^{\alpha x}\left(P_S(x)\cos\beta x + Q_S(x)\sin\beta x\right)$, где - $P_S(x), Q_S(x)$ - многочлены степени $s=\max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами.

Если $\alpha+\beta i$ есть корень характеристического уравнения кратности r, то

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(P_S(x)\cos\beta x + Q_S(x)\sin\beta x\right).$$

Неопределенные коэффициенты находят из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного уравнения после подстановки в него y^* вместо y.

Для этого находят y^* с неопределенными коэффициентами, затем y^*, $(y^*)', (y^*)'', \ldots, (y^*)^{(n)}$ подставляют в уравнение (23) и, приравняв соответствующие коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях равенства, находят неопределенные коэффициенты.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = \left(x^2 + x\right)e^{3x}$.
Составим соответствующее линейное однородное уравнение: $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = 2$. Следовательно, ФСР имеет вид: $y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$, а общее решение однородного уравнения есть $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Правая часть уравнения $f(x) = \left(x^2 + x\right)e^{3x}$ - функция специального вида (случай 2), где $P(x) = x^2 + x,\quad \alpha = 3$. Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение будем искать в виде $y^* = e^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$.
Найдя производные $\left(y^*\right)', \left(y^*\right)''$ и подставив их в исходное уравнение вместе с y^*, получим (после сокращения на e^{3x}): $2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \equiv x^2 + x$.
Сравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получим систему уравнений для определения неизвестных A, B, C:

$$\begin{cases} 2A + 3B + 2C = 0, \\ 6A + 2B = 1, \\ 2A = 1, \end{cases}$$

откуда $A = \dfrac{1}{2},\ B = -1,\ C = 1$.

Итак, $y^* = e^{3x}\left(\dfrac{1}{2}x^2 - x + 1\right) = \dfrac{e^{3x}}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$, тогда общее решение исходного уравнения примет вид $y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{e^{3x}}{2}\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

Пример 2. Решить задачу Коши: $y'' - 7y' + 6y = e^x(x - 2);\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

Так как характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$ имеет корни $k_1=1, k_2=6$, то общим решением соответствующего однородного уравнения является $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$. Правая часть уравнения - функция специального вида (случай 2), где $P(x)=x-2,\ \alpha=1$. Т.к. $\alpha=1$ является корнем характеристического уравнения кратности $r=1$, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*=xe^x(Ax+B)$. Найдя производные $(y^*)', (y^*)''$ и подставив их в исходное уравнение вместе с y^*, получим (после сокращения на e^x): $-10Ax+(2A-5B)=x-2$.

Отсюда $A=-\dfrac{1}{10},\quad B=\dfrac{9}{25}$. Тогда $y^*=e^x\left(-\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{9x}{25}\right)$.

Общим решением первоначального уравнения является функция:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{6x}+e^x\left(-\frac{x^2}{10}+\frac{9x}{25}\right).$$

Для того чтобы решить задачу Коши, находим y':

$$y'=C_1e^x+6C_2e^{6x}+e^x\left(-\frac{x^2}{10}+\frac{9x}{25}\right)+e^x\left(-\frac{x}{5}+\frac{9}{25}\right).$$

Используя начальные условия, получаем линейную систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2=1, \\ y'(0)=C_1+6C_2+\dfrac{9}{25}=3, \end{cases}$$

откуда находим: $C_1=\dfrac{84}{125}, C_2=\dfrac{41}{125}$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y^*=\dfrac{84}{125}e^x+\dfrac{41}{125}e^{6x}+e^x\left(-\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{9x}{25}\right)$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''+4y=4(\sin 2x+\cos 2x)$.

Так как характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 2i$, то общим решением соответствующего однородного уравнения будет - $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Правая часть уравнения – функция специального вида (случай 3), где $P_1(x)=4, P_2(x)=4$ (многочлены нулевой степени), $\alpha=0, \beta=2$. Т.к. $\alpha+\beta i=2i$ - корень характеристического уравнения кратности $r=1$, то частное решение исходного уравнения имеет форму $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$. Найдя $(y^*)', (y^*)''$ и подставив их в исходное уравнение вместе с y^*, получим:

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x\equiv 4\sin 2x+4\cos 2x,$$

откуда $A=-1,\quad B=1$ и, следовательно, $y^*=x(\sin 2x-\cos 2x)$.

Общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x(\sin 2x-\cos 2x).$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = xe^x + 2e^{-x}$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 2 \pm 3i$, следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения представимо в виде $\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Правая часть $f(x)$ исходного уравнения представляет собой сумму двух функций специального вида: $f_1(x) = xe^x$ и $f_2(x) = 2e^{-x}$ (обе относятся к случаю 2). Поэтому частное решение y^* будем искать согласно принципу наложения решений (теорема 2), т.е. в виде $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* - частное решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = xe^x$, а y_2^* - частное решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 2e^{-x}$. Структура функции $f_1(x)$ такова, что $P(x) = x, \alpha = 1$, причем $\alpha = 1$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, y_1^* будем искать в виде

$$y_1^* = e^x(Ax + B). \qquad \left(y_1^*\right)' = e^x(Ax + A + B), \quad \left(y_1^*\right)'' = e^x(Ax + 2A + B).$$

Подставив $\left(y_1^*\right)'', \left(y_1^*\right)'$ и y_1^* в уравнение $y'' - 4y' + 13y = xe^x$, получим (после сокращения на e^x): $10Ax - 2A + 10B \equiv x$. Отсюда $10A = 1, -2A + 10B = 0$, т.е. $A = \frac{1}{10}, B = \frac{1}{50}$, тогда $y_1^* = e^x\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right)$. Что касается $f_2(x)$, то здесь $P(x) = 2, \alpha = -1$. При этом $\alpha = -1$ также не является корнем характеристического уравнения, поэтому y_2^* будет иметь вид: $y_2^* = Ae^{-x}$.

Аналогично, подставляя $y_2^*, \left(y_2^*\right)' = -Ae^{-x}$ и $\left(y_2^*\right)'' = Ae^{-x}$ в уравнение $y'' - 4y' + 13y = 2e^{-x}$ и деля обе части на e^{-x}, получим: $18A = 2$, т.е. $A = \frac{1}{9}$.

Тогда $y_2^* = \frac{1}{9}e^{-x}$, а частное решение исходного уравнения $y^* = e^x\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right) + \frac{1}{9}e^{-x}$.

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^x\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{50}\right) + \frac{1}{9}e^{-x}.$$

6.2 Задачи для самостоятельной работы

1. Указана правая часть линейного неоднородного уравнения и корни характеристического уравнения соответствующего ему однородного уравнения. Определить вид частного решения неоднородного уравнения:

1) $k_1 = -1, k_2 = 3, \quad f(x) = e^{2x}(5x + 4)$;
2) $k_1 = 3, k_2 = 0, k_{3,4} = 2, \quad f(x) = 3e^{2x}$;
3) $k_1 = -4, k_2 = 1, \quad f(x) = e^{2x}(x^2 + 1)$;
4) $k_1 = 2, k_{2,3} = \pm 3i, k_4 = 3, \quad f(x) = e^{3x}(2x^2 - 4)$;
5) $k_1 = -2, k_{2,3} = \pm 4i, \quad f(x) = e^x(2\sin 5x - 3\cos 5x)$;

6) $k_{1,2} = 1 \pm i, \quad f(x) = e^x \sin 2x$;

7) $k_{1,2} = 1,\ k_{3,4} = \pm 2i, \quad f(x) = \sin x + \cos x$;

8) $k_{1,2} = \pm i,\ k_3 = 0,\ k_{4,5} = \pm 4i,\ k_{6,7} = \pm 4i, \quad f(x) = \cos 4x$;

9) $k_{1,2} = 1 \pm 3i,\ k_{3,4} = 2 \pm 6i, \quad f(x) = e^{2x}(2x \sin 6x + \cos 6x)$;

10) $k_{1,2,3} = 1, \quad f(x) = 4x^3 + 4$;

11) $k_{1,2} = 1 \pm 2i,\ k_{3,4} = 1 \pm 2i, \quad f(x) = e^{-x}\left((x^2+4)\sin 2x - 3x\cos 2x\right)$;

12) $k_1 = 7,\ k_2 = -1,\ k_3 = 0,\ k_{4,5} = \pm 4i, \quad f(x) = 4x + \sin 4x$;

13) $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm 4i, \quad f(x) = 2e^{3x} - \cos x$;

14) $k_1 = 5,\ k_2 = -1,\ k_{3,4} = 2 \pm 5i, \quad f(x) = e^{-x}(2x+5) + \sin 5x - 3\cos 5x$;

15) $k_{1,2} = 0, \quad f(x) = 8 + 3\cos x$;

16) $k_{1,2} = \pm 6i,\ k_{3,4} = \pm 6i,\ k_{5,6} = \pm 12i, \quad f(x) = \sin 3x + \cos 6x$.

Ответы:

1) $y^* = e^{2x}(Ax + B)$;

2) $y^* = x^2 e^{2x} A$;

3) $y^* = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$;

4) $y^* = xe^{3x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)$;

5) $y^* = e^x(A\cos 5x + B\sin 5x)$;

6) $y^* = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$;

7) $y^* = A\cos x + B\sin x$;

8) $y^* = x^2(A\cos 4x + B\sin 4x)$;

9) $y^* = xe^{2x}((Ax + B)\cos 6x + (Cx + D)\sin 6x)$;

10) $y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

11) $y^* = e^{-x}\left(\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 2x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 2x\right)$;

12) $y^* = y_1^* + y_2^* = x(Ax + B) + x(C\cos 4x + D\sin 4x)$;

13) $y^* = y_1^* + y_2^* = Ae^{3x} + (B\cos x + C\sin x)$;

14) $y^* = y_1^* + y_2^* = xe^{-x}(Ax + B) + (C\cos 5x + D\sin 5x)$;

15) $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax^2 + (B\cos x + C\sin x)$;

16) $y^* = y_1^* + y_2^* = (A\cos 3x + B\sin 3x) + x^2(C\cos 6x + D\sin 6x)$.

2. Найти общее решение уравнения, используя метод подбора частного решения:

1) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$;

2) $y'' + y' = 3$;

3) $y'' - y = 4e^x$;

4) $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$;

5) $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$;

6) $y'' - y' + y = -13\sin 2x$;

7) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$;

8) $y'' + y = e^x + \cos x$;

9) $y'' + y = \cos x + \cos 2x$;

10) $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x$;

11) $y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$;

12) $y^{(4)} - y = 4\sin x - 8e^{-x} + 1$.

Ответы:

1) $y = C_1 + C_2 e^{4x} + x^3 + x$;
2) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + 3x$;
3) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + 2xe^{-x}$;
4) $y = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{4x} + e^{4x}\left(-\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}\right)$;
5) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + 2\cos x - \sin x$;
6) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - 2\cos 2x + 3\sin 2x$;
7) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + \dfrac{7}{2}$;
8) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2}\left(e^{x} + x\sin x\right)$;
9) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x + \dfrac{1}{2}x\sin x$;
10) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 \sin x$;
11) $y = e^{x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + x^2 e^{x}\cos x$;
12) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + x\cos x + 2xe^{-x} - 1$.

3. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

1) $y'' + 4y = \sin 2x + 1; \quad y(0) = \dfrac{1}{4},\ y'(0) = 0$;
2) $y'' - 4y' + 8y = 61e^{2x}\sin x; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 4$.

Ответы:

1) $y = \dfrac{1}{8}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\left(x\cos 2x - 1\right)$; 2) $y = e^{2x}\left(5\cos 2x - \sin 2x + 6\sin x - 5\cos x\right)$.

7. Применение дифференциальных уравнений в экономике

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят ещё и от тенденции ценообразования и от темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и ее производных:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3P'' - P' - 2P + 18, \\ S(t) &= 4P'' + P' + 3P + 3. \end{aligned} \tag{24}$$

Поясним это.

1). Спрос “подогревается” темпом изменения цены. Если темп растет $(P'' > 0)$, то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус;

2). Предложение в еще большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P', входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений (24). После приведения подобных получаем линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:
$$P'' + 2P' + 5P = 15. \quad (25)$$

Как было отмечено в пункте 6, общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения $P'' + 2P' + 5P = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, следовательно, общее решение однородного уравнения запишется в виде:
$$\overline{P}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$
где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения возьмем решение $P = P_{st}$ - постоянную величину как *установившуюся* цену. Подстановка в уравнение (25) дает значение P_{st} =3. Таким образом, общее решение уравнения (25) имеет вид:
$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (26)$$

Нетрудно увидеть, что $P(t) \to P_{st} = 3$ при $t \to \infty$, т.е. все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около неё. Это означает, что все цены стремятся к установившейся цене P_{st} с колебаниями около неё, причем амплитуда этих колебаний затухает со временем.

Приведём частные решения этой задачи в двух вариантах: задача Коши и смешанная задача.

1. **Задача Коши.** Пусть в начальный момент времени известна цена, а также тенденция её изменения: $t = 0;\quad P = 4;\quad P' = 1$.

Подставляя первое условие в формулу (26), получаем $P(0) = C_1 + 3 = 4$, откуда $C_1 = 1$, тогда
$$P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t). \quad (27)$$
Дифференцируя последнее равенство, имеем $P'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t]$. Теперь используем второе условие задачи Коши: $P'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, откуда $C_2 = 1$. Окончательно получаем, что решение задачи Коши имеет вид: $P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t)$.

2. **Смешанная задача.** Пусть в начальный момент времени известны цена и спрос: $t = 0;\quad P = 4;\quad D = 16$. Поскольку первое начальное условие такое

же, как и в предыдущем случае, то и здесь имеем решение (27). Тогда производные функции $P(t)$ выражаются формулами:

$$P'(t) = e^{-t}\left[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t\right],$$

$$P''(t) = -e^{-t}\left[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t\right].$$

Отсюда $P'(0) = 2C_2 - 1$ и $P''(0) = -4C_2 - 3$. Подставляя эти равенства во второе условие задачи, т.е. $D(0) = 16$, имеем с учетом вида $D(t)$ из первой формулы (24): $C_2 = -1$. Итак, решение данной задачи имеет вид: $P(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$.

Задача. Определить динамику цены P на товар, если прогноз спроса и предложения описывается следующими соотношениями:

1) $D(t) = P'' - 2P' - 2P + 10, \quad S(t) = 2P'' + 2P' + 4P + 4$;

2) $D(t) = P'' - 2P' - 6P + 36, \quad S(t) = 2P'' + 4P' + 4P + 6$;

3) $D(t) = P'' + 4P' + 2P + 8, \quad S(t) = 2P'' + 2P' + 3P + 6$.

Определить, какой из трёх случаев описывает паническое состояние на рынке, и объяснить причины такого состояния.

Ответы:

1) $P(t) = e^{-2t}\left(C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t\right) + 1$, цена со временем стремится к равновесному значению $P_0 = 1$ с колебаниями около него;

2) $P(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3$, цена со временем стремится к равновесному значению $P_0 = 3$ с колебаниями около него;

3) $P(t) = e^{t}(C_1 t + C_2) + 2$, цена резко изменяется во времени: при $C_1 > 0$ она увеличивается, при $C_1 < 0$ - снижается.

Случай 3) описывает паническое состояние рынка, т.к. спрос растет с ценой и её ростом.

Литература

1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.:Наука, 1984.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов втузов. Ч.2. -М.: Высшая школа, 1986.
3. Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -СПб.: Спецлит, 1996.
4. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Учебное пособие. -СПб.: Лань, 2002.
5. Сборник задач по математике для втузов: Учебное пособие. Ч.2./ Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. -М.:Наука, 1986.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Учебное пособие. Ч.2./ Под ред. А.П. Рябушко. -М.: Высшая школа, 1991.

Кузьмина Светлана Сергеевна

Плютова Анна Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий
по дисциплине “Математика”
для студентов экономических специальностей
080105(060400), 080109(060500), 080502(060800), 080507(061100),
080111(061500), 080115(350900), 080504(061000), 080301(351300)
всех форм обучения

Редактор Кокина Н.М.

Подписано к печати		Бумага тип. №1
Формат 60х84 1/16	Усл. печ. л. 2,5	Уч.-изд. л. 2,5
Заказ	Тираж 150	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета,
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25,
Курганский государственный университет, ризограф.