МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра экономической теории и моделирования экономических процессов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания
к выполнению практических и самостоятельных заданий
для студентов направления 080100 «Экономика»
очной формы обучения

Курган 2013

Кафедра: «Экономическая теория и моделирование экономических процессов»

Дисциплина: «Теория вероятностей и математическая статистика» (направление 080100).

Составила: канд. техн. наук, доц. Л.А. Трофимова.

Утверждены на заседании кафедры «18» июня 2013 г.

Рекомендованы методическим советом университета «20» августа 2013 г.

Содержание

Введение

Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет теории вероятностей.

Математическая статистика - раздел математики, посвященный математическим методам сбора, систематизации, обработки и интерпретации статистических данных. Правила и процедуры математической статистики опираются на теорию вероятностей, позволяющую оценить точность и надежность выводов, получаемых в каждой задаче на основании имеющегося статистического материала.

Теория вероятностей и математическая статистика – основа вероятностно-статистических методов принятия решений, состоящая из трех этапов:

- переход от экономической, управленческой реальности к абстрактной математико-статистической схеме;
- проведение расчетов и получение выводов чисто математическими средствами в рамках вероятностной модели;
- интерпретация математико-статистических выводов применительно к реальной ситуации и принятие соответствующего решения.

Методические указания «Теория вероятностей и математическая статистика» к выполнению практических и самостоятельных заданий предназначены для студентов направления 080100 «Экономика» очной формы обучения.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения (формулы, термины) по основным темам курса теории вероятностей и математической статистики, примеры решения типовых задач с ответами и задачи для самостоятельного решения, что позволяет использовать данные методические указания для практических занятий и самостоятельной работы студентов.

1 Основные понятия теории вероятностей

Сферы применения вероятностно-статистических методов. Дискретное вероятностное пространство. Случайные события и операции над ними. Вероятностное пространство. Вероятности и правила действий с ними. Независимость событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема испытаний Бернулли. Непрерывное вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.

Перестановки $P_n = n!$, размещения $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, сочетания $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Классическое определение вероятности: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Формула полной вероятности: $P\left(A\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A \middle| H_i\right)$.

Формула Байеса: $P\left(H_i \middle| A\right) = \dfrac{P\left(H_i\right) \cdot P\left(A \middle| H_i\right)}{\sum\limits_{i} P\left(H_i\right) \cdot P\left(A \middle| H_i\right)}$.

Формула Бернулли: $P_n\left(k\right) = C_n^k \cdot P^k \cdot q^{n-k}$.

Локальная формула Лапласа: $P_n\left(k\right) \simeq \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(x\right)$,

где $\varphi\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, $\quad x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

$\varphi\left(x\right)$ - функция четная, т.е. $\varphi\left(-x\right) = \varphi\left(x\right)$.

Интегральная формула Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Пример на перестановку

Пример Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5, 2, 7, если каждая цифра входит в число один раз?

Решение $P_3 = n!\Big|_{n=3} = 3! = 6.$ Ответ: 6.

Пример на размещение

Пример Сколько сигналов можно составить из 6 букв (A, B, C, D, E, F) по 2 элемента?

Ответ: 30.

Пример на сочетание

Пример Сколькими способами можно выбрать 2 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Решение $C_{10}^{2} = \dfrac{10!}{2!\cdot 8!} = 45.$ Ответ: 45.

Примеры на классическое определение вероятности

Пример 1 Колода из 32 карт тщательно перетасована. Найти вероятность того, что все четыре туза лежат в колоде один за другим, не перемежаясь другими картами.

Решение Число всех возможных способов расположения карт в колоде равно 32! Чтобы подсчитать число благоприятных исходов, сначала представим себе, что четыре туза располагаются каким-то образом один за другим и склеиваются между собой так, что они составляют одну карту (неважно, что она оказалась толще, чем все остальные).

В полученной колоде стало (32 – 4 + 1 = 29) карт. Карты в этой колоде можно расположить числом способов, равным 29! Количество всех благоприятных исходов получается, если это число умножить на 4! – число возможных способов упорядочения четырёх тузов. Отсюда получаем ответ задачи: $\dfrac{29!4!}{32!} = \dfrac{1}{35960}.$ Ответ: 1/35960.

Пример 2 Между двумя игроками проводится n партий, причем каждая партия кончается или выигрышем, или проигрышем, и всевозможные исходы партий равновероятны. Найти вероятность того, что определённый игрок выиграет ровно m партий, $0 \le m \le n$.

Ответ: $\dfrac{C_n^m}{2^n}.$

Пример 3 Бросается n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одинаковое количество очков.

Ответ: $\dfrac{1}{6^{n-1}}.$

Пример 4 Из разрезной азбуки 10 букв (А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т) произвольным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «МАТЕМАТИКА»?

Ответ: 3!2!2!/10!.

Пример 5 Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятность того, что выпала хотя бы одна «6».

Решение Общее число исходов здесь равно 6^{10}. К благоприятным исходам следует отнести выпадение одной, двух, трёх и т.д. шестёрок. Проще подсчитать число неблагоприятных исходов, т.е. исходов, когда не выпало ни одной шестёрки. Их, очевидно, 5^{10}, и число благоприятных исходов равно ($6^{10} - 5^{10}$). Искомая вероятность равна: $1-\dfrac{5^{10}}{6^{10}}$.

Ответ: $1-\dfrac{5^{10}}{6^{10}}$.

Пример 6 В мешке находятся 10 различных пар обуви. Из мешка наугад извлекаются 6 единиц обуви. Найти вероятность того, что в выборку не попадёт двух единиц обуви, составляющих одну пару.

Ответ: $\dfrac{C_{10}^{6}2^{6}}{C_{20}^{6}}$.

Пример 7 Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий равны: $p_1 = 0,8;$ $p_2 = 0,7;$ $p_3 = 0,9.$ Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Ответ: 0,994.

Пример 8 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попал в цель хотя бы один раз.

Ответ: $n \geq 4,5;$ $n \geq 5$.

Пример 9 Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0,7,$ $p_2 = 0,8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из двух орудий) хотя бы одним из орудий.

Ответ: 0,94.

Пример 10 Студент перед экзаменом выучил из 30 билетов билеты с номерами с 1 по 5 и с 26 по 30. Известно, что студент на экзамене вытащил билет с номером, не превышающим 20. Какова вероятность, что студент вытащил выученный билет?

Ответ: решение задачи определяется формулой $P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B)$.

Пример 11 Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шаров, наудачу один за другим извлекают (без возвращения) два шара. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй - черным?

Решение Пусть X - событие, состоящее в извлечении первым белого шара, а Y - событие, состоящее в извлечении вторым черного шара. Тогда $X\cap Y$ - событие, заключающееся в том, что первый шар будет белым, а второй - черным. $P(Y/X)$ =3/9 =1/3 - условная вероятность извлечения вторым черного шара, если первым был извлечен белый. Учитывая, что $P(X)$ = 7/10, по формуле умножения вероятностей получаем: $P(X\cap Y)$ = 7/30.

Ответ: $P(X\cap Y)$ = 7/30.

Пример 12 Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, но с одним дополнительным условием: вытащив первый шар, запоминаем его цвет и возвращаем шар в урну, после чего все шары перемешиваем. В данном случае результат второго извлечения никак не зависит от того, какой шар - черный или белый - появился при первом извлечении.

Ответ: 21/100.

Пример 13 Имеется в ящике 5 деталей первого сорта, 4 детали второго сорта и 3 детали третьего сорта. Испытания заключаются в том, что каждый раз вынимают по одной детали, не возвращая ее в ящик. Найти вероятность того, что при первом испытании появится деталь первого сорта, при втором – второго сорта, при третьем – третьего сорта.

Ответ: 1/22.

Примеры на формулу полной вероятности

Пример 1 Имеются 2 набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь, из наудачу взятого набора, стандартна.

Ответ: 0,85.

Пример 2 В первом наборе находится 20 деталей, 18 из них стандартны. Во втором наборе - 10 деталей и 9 - стандартны. Из второго набора наудачу взята деталь и переложена в первый. Найти вероятность того, что деталь, наудачу извлеченная из первого набора, будет стандартна.

Решение Введем обозначения для событий: A – из первого набора извлечена стандартная деталь, H_1 – из второго набора извлечена стандартная деталь, H_2 – из второго набора извлечена нестандартная деталь. Можно ли H_1 и H_2 - считать гипотезами?

$$P(H_1)=\frac{9}{10},\ P(H_2)=\frac{1}{10},\ P(A\,|\,H_1)=\frac{19}{21},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{18}{21}\Rightarrow$$

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)+P(H_2)\cdot P(A\,|\,H_2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0,9.$$

Ответ: 0,9.

Пример на Формулу Байеса

Пример Детали, изготовленные цехом, попадают для проверки на стандартность к одному из контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером – 0,94, а вторым – 0,98 (второй имеет лучшую квалификацию). Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что годную деталь проверил первый контролер.

Решение Введем обозначения: A – деталь признана стандартной (событие произошло); гипотезы: H_1 - деталь проверил первый контролер, H_2 – деталь проверил второй контролер: $P(H_1)=0,6;$ $P(H_2)=0,4.$ Условные вероятности: $P(A/H_1)=0,94;$ $P(A/H_2)=0,98.$

$$P(H_1/A)=\frac{0,6\cdot 0,94}{0,6\cdot 0,94+0,4\cdot 0,98}=0,59.$$

Сравним априорную и апостериорную вероятности гипотез:

$P\left(H_1\right)=0,6;\quad P\left(H_1|A\right)=0,59\Rightarrow P\left(H_1\right)\neq P\left(H_1|A\right).$

Ответ: 0,59.

Примеры на формулу Бернулли

Пример 1 Вероятность того, что операционные расходы фирмы в течение 1 месяца не превысят установленный бюджет, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 месяцев операционные расходы в течение 4 месяцев из них не превысят норму.

Ответ: 0,30.

Пример 2 Игральная кость брошена 6 раз. Найти вероятность того, что ровно 3 раза выпадет «шестерка».

Решение Шестикратное бросание кости можно рассматривать как последовательность независимых испытаний с вероятностью успеха («шестерки»), равной 1/6, и вероятностью неудачи - 5/6. Искомую вероятность вычисляем по формуле: $P_6(3)=C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3=0,053$.

Ответ: $P_6(3)=0,053.$

Пример 3 Монета бросается 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не более чем 2 раза.

Ответ: $P(A)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)=0,344$.

Пример 4 Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что среди 4 фирм-нарушителей будет выявлено больше половины.

Ответ: $P(A)=P_4(3)+P_4(4)=0,9477$.

Примеры на локальную формулу Лапласа

Пример 1 Найти вероятность того, что событие A появится ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность события в каждом испытании равна 0,2.

Решение $p = 0{,}2;\ n = 400;\ k = 80;\ P_{400}(80) - ? \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 08}} = 0,\ P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot 0{,}3989 = 0{,}04986.$$

Ответ: 0,04986.

Пример 2 Вероятность покупки при посещении клиентом магазина составляет p = 0,75. Найти вероятность того, что при 100 посещениях клиент совершит покупку ровно 80 раз.

Ответ: $P_{100}(80) = 0{,}047$.

Примеры на интегральную формулу Лапласа

Пример 1 В страховой компании 10 000 клиентов. Страховой взнос составляет 2 000 р. Вероятность страхового случая $p = 0{,}005$. Страховая выплата – 200 000 р. Определить размер прибыли страховой компании с вероятностью $p = 0{,}9$.

Ответ: 8.

Пример 2 Страховая компания заключила 40 000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.

Решение По условию задачи n = 40 000, p = 0,02. Находим np = 800, $\sqrt{npq} = 28$. Для вычисления $P\ (m \le 870)$ воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$P\ (0 < m \le 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$,

где $x_1 = \dfrac{0 - 800}{28} = -28{,}57$ и $x_2 = \dfrac{870 - 800}{28} = 2{,}5$.

Находим по таблице значений функции Лапласа:

$P\ (0 < \mathrm{m} \le 870) = \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1) = \Phi_0(2{,}5) - \Phi_0(-28{,}57) = 0{,}4938 + 0{,}5 =$
$= 0{,}9938$.

Ответ: $P\ (0 < m \le 870) = 0{,}9938$.

Примеры по темам: теоремы сложения и умножения вероятностей, независимость событий, условная вероятность

Пример 1 Три стрелка стреляют по одной мишени, и каждый попадает или промахивается независимо от результатов выстрелов других стрелков. Вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны: 0,8; 0,7; 0,5. Определить вероятности следующих событий:

а) все три стрелка попали в мишень; Ответ: 0,28.
б) хотя бы один стрелок попал в мишень; Ответ: 0,5.
в) в мишень попали два стрелка. Ответ: 0,47.

Пример 2 Брошено три игральных кости. Найти вероятности следующих событий:

а) выпало три шестёрки; Ответ: $\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

б) выпало три шестёрки, если известно, что на одной из костей выпала шестёрка. Ответ: $\frac{1}{91}$.

Пример 3 Из 20 студентов, находящихся в аудитории, 8 человек курят, 12 носят очки, а 6 - и курят, и носят очки. Одного из студентов вызвали к доске. Определим события A и B следующим образом: A = {вызванный студент курит}, B = {вызванный студент носит очки}.

Установить, зависимы события A и B или нет. Сделать предположение о характере влияния курения на зрение.

Решение Так как $P(AB)=\frac{6}{20}\neq P(A)P(B)=\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{20}$, то условие независимости не выполняется, следовательно, события A и B зависимы.

Найдем условную вероятность того, что студент носит очки, при условии, что он курит: $P(B/A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{6/20}{8/20}=\frac{3}{4}$. Безусловная вероятность того, что студент носит очки, равна $P(B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$. Так как $P(B/A)>P(B)$, то делаем вывод: курение способствует ухудшению зрения.

Ответ: События A и B зависимы. Вывод: курение способствует ухудшению зрения.

Пример 4 Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачёт сдан, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 вопросов в билете. Взглянув на первый вопрос, студент обнаружил, что знает его. Какова вероятность, что студент сдаст зачёт?

Ответ: 228/253.

Пример 5 Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,99 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превышала ε.

Ответ: $\varepsilon = 0{,}0516$.

Примеры для самостоятельного решения

1 $\dfrac{P_6\left(C_7^5+C_7^4\right)}{A_{10}^7}=?$ Ответ: 1/15.

2 $12\cdot C_{n+3}^{n-1}=55\cdot A_{n+1}^2;\quad n=?$ Ответ: n = 8.

3 Решить неравенство $C_{10}^{x-1}>2\cdot C_{10}^{x}$. Ответ: $x\in(\dfrac{22}{3};\,11)$.

4 Ящик содержит 90 годных и 10 дефектных шурупов. Если использовать 10 шурупов, какова вероятность того, что ни один из них не окажется дефектным? Какова вероятность того, что среди них окажется 4 дефектных шурупа?

5 Из букв разрезной азбуки составлено слово «СТАТИСТИКА». Затем из этих букв случайным образом без возвращения отобрано 5 букв. Найти вероятность того, что из отобранных букв можно составить слово «ТАКСИ». Ответ: 2/21.

6 Брошено 10 игральных костей. Найти вероятность событий: а) выпало ровно 3 шестёрки, б) выпало хотя бы две шестёрки.

7 Студент знает 20 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит 4 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает только 1 вопрос.

8 В коллекции из 20 горных пород 5 пород осадочного происхождения. Вычислить вероятность того, что из наудачу извлеченных 3 пород 1 порода будет осадочного происхождения.

9 Из выращенной рассады приживаются 40 корешков из 60. Наудачу высаживают 5 корешков. Найти вероятность того, что приживутся только 2 корешка.

10 Из 100 книг на полке наиболее часто вызывают интерес 42. Наудачу выбирают 4 книги. Найти вероятность того, что только 2 из отобранных книг пользуются популярностью.

11 Студенты сдают отчет о проделанной лабораторной работе. С первого раза сдают 13 человек из 25. Задают вопрос: «Сдал отчет?» - любым 3 студентам. Найти вероятность того, что только 2 человека сдали отчет.

12 В трех ящиках находится по 40 предметов: ложек и вилок. Число ложек в первом ящике 18 , во втором - 10, в третьем - 8. Из наудачу выбранного ящика взята ложка. Найти вероятность того, что ложка взята из 3 ящика.

13 В трех институтах отсев студентов первого курса составляет соответственно 8%, 5%, 6% от числа поступивших. Интервьюируют одного из студентов второго курса. Найти вероятность того, что это студент вуза, где отсев первокурсников составляет 6%.

14 На конкурс студенческих работ представлены работы: из КГУ - 20, из КСХА - 30. Комиссия присваивает первые места 5 работам из КГУ и 3 работам из КСХА. Наудачу просматривается работа, занявшая

1 место, выбранная случайным образом. Найти вероятность того, что эта работа выполнена студентом КГУ.

15 В трех аудиториях находятся по 20 студентов: девушек и юношей. Число юношей в первой аудитории 8, во второй - 10, в третьей - 5. Из наудачу выбранной аудитории вызывается студент в деканат. Найти вероятность того, что в деканат вызвана девушка из аудитории.

16 На сборку агрегата поступают детали с двух конвейеров. С первого конвейера поступает 6% брака, со второго - 8% брака. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, взятой с наудачу выбранного конвейера.

2 Случайные величины и случайные вектора

Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Функция плотности. Понятие о случайном векторе. Совместное распределение нескольких случайных величин. Независимость случайных величин. Маргинальные распределения. Условное распределение.

Биноминальное распределение (схема испытаний Бернулли):

$$P_n(k) = C_n^k \cdot P^k \cdot q^{n-k}.$$

Распределение Пуассона: $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$.

Функция (интегральный закон) распределения случайной величины:

$$F(x) \cdot P(X < x) : F(x) = P(X < x).$$

Функция плотности: $f(x) = F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$.

Пусть двумерная случайная величина задана двумерной функцией и рядом распределения:

$$(X, Y) \Rightarrow \begin{cases} P(X < x;\ Y < y) = F(x, y), \\ P(X = x_i;\ Y = y_j) = P_{ij}. \end{cases}$$

Плотность распределения и функция распределения находятся по формулам:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{dxdy}; \qquad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv,$$

где $f(x, y)$ – поверхность, $f(x, y) \geq 0$; $F(x, y)$ – неубывающая функция двух переменных, поверхность.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = f_2(y);$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = f_1(y)$ – получение одномерных плотностей.

$f\left(y|x\right) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)} = \dfrac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$ – условные вероятности двумерной случайной величины.

Пример 1 В связке из 3 ключей только один ключ подходит к двери. Ключи перебирают до тех пор, пока не отыщется подходящий ключ. Построить закон распределения для случайной величины ξ – числа опробованных ключей.

Решение Число опробованных ключей может равняться 1, 2 или 3. Если испытали только один ключ, это означает, что этот первый ключ сразу подошел к двери, а вероятность такого события равна 1/3. Итак, $P(\xi = 1) = 1/3$. Далее, если опробованных ключей было 2, т.е. ξ = 2, это значит, что первый ключ не подошел, а второй – подошел. Вероятность этого события равна $2/3 \cdot 1/2$ = 1/3. То есть $P(\xi = 2) = 1/3$. Аналогично вычисляется вероятность $P(\xi = 3) = 1/3$. В результате получается следующий ряд распределения:

ξ	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

Ответ:

ξ	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

Пример 2 Построить функцию распределения $F_\xi\ (x)$ для случайной величины ξ из примера 1.

Ответ: $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 2/3, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$

Пример 3 Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан с помощью таблицы 1.

Таблица 1 - Совместный закон распределения случайных величин ξ и η

$\eta \backslash \xi$	1	2
–1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Вычислить частные законы распределения составляющих величин ξ и η. Определить, зависимы ли они. Вычислить вероятность $P(\xi+\eta \ge 2)$.

Решение Частное распределение для величины ξ получается суммированием вероятностей в строках:

$P(\xi=-1)=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=-1,\eta=2)=1/16+3/16=1/4$;

$P(\xi=0)=P(\xi=0,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=2)=1/16+3/16=1/4$;

$P(\xi=1)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=2)=1/8+3/8=1/2$.

Аналогично получается частное распределение для величины η:

$P(\eta=1)=1/16+1/16+1/8=1/4$;

$P(\eta=2)=3/16+3/16+3/8=3/4$.

Полученные вероятности можно записать в ту же таблицу (таблица 2) напротив соответствующих значений случайных величин.

Таблица 2 – Значения полученных вероятностей

$\eta \backslash \xi$	1	2	p_ξ
–1	1/16	3/16	1/4
0	1/16	3/16	1/4
1	1/8	3/8	1/2
p_η	1/4	3/4	1

Теперь ответим на вопрос о независимости случайных величин ξ и η. С этой целью для каждой клетки совместного распределения вычислим произведение $P(\xi=x_i)\cdot P(\eta=y_j)$ (т.е. сумм по соответствующей строке и столбцу) и сравним его со значением вероятности $P(\xi=x_i,\eta=y_j)$ в этой клетке. Например, в клетке для значений $\xi=-1$ и $\eta=1$ стоит вероятность 1/16, а произведение соответствующих частных вероятностей (1/4×1/4) равно 1/16, т.е. совпадает с совместной вероятностью. Это условие так же проверяется в оставшихся пяти клетках, и оно оказывается верным во всех. Следовательно, случайные величины ξ и η независимы.

Заметим, что если бы наше условие нарушалось хотя бы в одной клетке, то величины следовало бы признать зависимыми.

Для вычисления вероятности $P(\xi+\eta\geq 2)$ отметим клетки, для которых выполнено условие $\xi+\eta\geq 2$. Таких клеток всего три, и соответствующие вероятности в этих клетках равны 1/8, 3/16, 3/8. Их сумма равна 11/16, это и есть искомая вероятность. Вычисление этой вероятности можно записать так:

$$P(\xi+\eta\geq 2)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=0,\eta=2)+P(\xi=1,\eta=2)=$$
$$=1/8+3/16+3/8=11/16.$$

Ответ: 1) случайные величины ξ и η независимы;

2) $P(\xi+\eta\geq 2)=11/16$.

$\eta \backslash \xi$	1	2	p_ξ
–1	1/16	3/16	1/4
0	1/16	3/16	1/4
1	1/8	3/8	1/2
p_η	1/4	3/4	1

Пример 4 В денежной лотерее выпущены 100 билетов. При этом могут быть 1 выигрыш по 50 р., 10 выигрышей по 1 р. Найти закон распределения.

Ответ:

x	0	1	50
p	0,89	0,1	0,01

Пример 5 Поставщик отправил дистрибьютору 5000 товаров. Вероятность, что единица товара выйдет из строя 0,0002. Найти вероятность того, что у дистрибьютора выйдут из строя 3 единицы товара.

Ответ: 0,06.

Пример 6 Случайная величина X – годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Плотность распределения этой случайной величины имеет вид: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^{\alpha+1}} & при\ \ x\geq x_0,\\ 0 & при\ \ x<x_0,\end{cases}$

где A – неизвестный параметр, а величины x_0 и α заданы и равны соответственно 1 и 2,5.

Требуется:

1) определить значение параметра A; Ответ: 2,5.

2) найти функцию распределения $F(x)$; Ответ: $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{2,5}}, & при\ \ x\ge 1,\\ 0, & при\ \ x<1.\end{cases}$

3) определить математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение σ_x; Ответ: $m_x=\dfrac{5}{3}$; $\sigma_x=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

4) определить размер годового дохода x, не ниже которого с вероятностью 0,5 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика.

Ответ: $x_1 \approx e^{0,28}=1,32$.

Пример 7 Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η, заданные совместным распределением:

	0	8
1	0,1	0,1
2	0,1	0,2
3	0,2	0,3

Ответ: величины ξ и η зависимы.

Пример 8 Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η, заданные совместным распределением:

	0	8
1	0,08	0,12
2	0,12	0,18
3	0,20	0,30

Ответ: величины ξ и η независимы.

Пример 9 Пусть двумерная случайная величина (ξ,η) имеет распределение:

	3	5	10	11
1	0,01	0,01	0,17	0,01
7	0,1	0,2	0,1	0,2
8	0,02	0,05	0,09	0,04

Найти распределение каждой компоненты, проверить их независимость и найти условное распределение величины η, при условии, что величина ξ приняла значение 8.

Ответ: $p(\eta)_{\xi=8} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 & 11 \\ 0,1 & 0,25 & 0,45 & 0,2 \end{pmatrix}$. Случайные величины ξ и η зависимы.

Пример 10 Распределение координат дискретного случайного вектора. Две случайные величины ξ и η заданы совместным распределением:

	0	8
1	0,1	0,1
2	0,1	0,2
3	0,2	0,3

Найти распределения ξ и η.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.

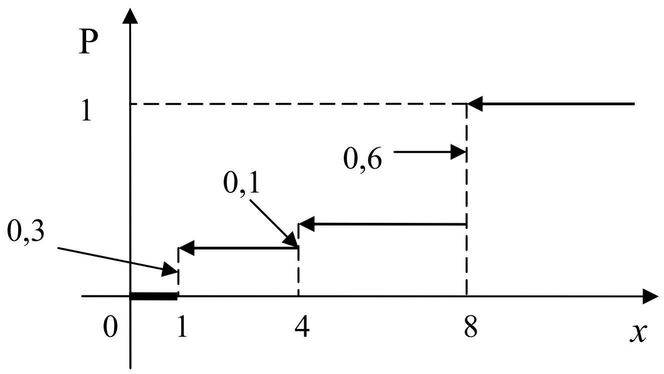
Пример 11 Монета брошена 2 раза. Определить закон распределения числа выпадения герба.

Ответ: $P_2(0) = 0,25$; $P_2(1) = 0,5$; $P_2(2) = 0,25$.

Пример 12 Пусть случайная величина X задана следующим распределением (т.е. X – дискретная случайная величина):

x	1	4	8
p	0,3	0,1	0,6

Записать функцию распределения.



Ответ: $F(x) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ 0,3; & x < 4, \\ 0,4; & x < 8, \\ 1; & x < 9, \\ 1; & x < 10. \end{cases}$

Пример 13 Найти функцию распределения случайной величины с законом распределения:

ξ	-1	0	2	2,5
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0; & x \le -1, \\ 0,2; & -1 < x \le 0, \\ 0,5; & 0 < x \le 2, \\ 0,9; & 2 < x \le 2,5, \\ 1; & x \ge 2,5. \end{cases}$

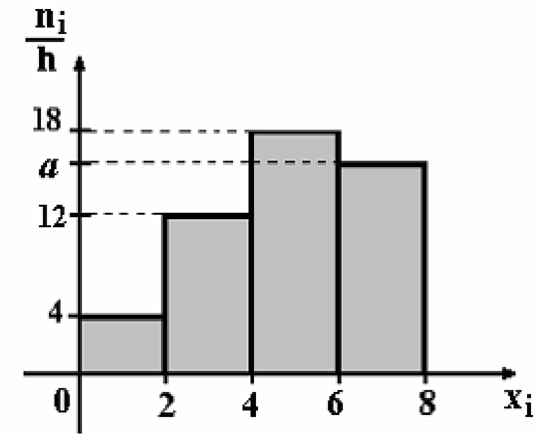
Примеры для самостоятельного решения

Пример 1 Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей: $F(x)=\begin{cases} 0; & при \quad x \le 0, \\ 2x; & при \quad 0 < x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1; & при \quad x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид…

Пример 2 В партии из 10 деталей имеется 14 стандартных. Наудачу отбирают 2 детали. Составьте закон распределения случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

Пример 3 По выборке объема n = 100 построена гистограмма частот:



Тогда значение величины a равно…

3 Характеристики распределений случайных величин и случайных векторов

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины и их свойства. Математическое ожидание и ковариационная матрица случайного вектора. Коэффициент корреляции. Условное математическое ожидание.

Математическое ожидание: $M(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$. $M\left[x\right]=m_x=\begin{cases}\sum_i x_i p_i, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.\end{cases}$

Дисперсия: $D_x=D\left[x\right]=\begin{cases}\sum_i (x_i-m_x)^2\cdot P_i, \\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2\cdot f(x)dx.\end{cases}$

$D[x]=M[(x-m_x)^2]=M[x^2]-m_x^2,$

где $k_в=\frac{\sigma_x}{m_x}$ - коэффициент вариации (изменчивости) (в относительных единицах).

Корреляционным моментом (ковариацией) случайных величин X и T называют число $K\left(X;Y\right)=Cov\left(X;Y\right)=M\left(X\cdot Y\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)$.
$\mu_{11}[X\cdot Y]=M[X\cdot Y]-m_x\cdot m_y=K_{xy}=\sigma_{xy}$.

Коэффициент корреляции: $r\left(X;Y\right)=\frac{M\left(XY\right)-M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)\cdot D\left(Y\right)}}$.

$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y};\quad -1\le r_{xy}\le 1.$

Условное математическое ожидание (регрессии):

$$M[Y\,|\,x]=\begin{cases}\sum_j y_j P(y_j\,|\,x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} yf(y\,|\,x)dy,\end{cases}\qquad P(y_j\,|\,x)=\frac{P(y_j,x)}{P(x)}=\frac{P(y_j,x)}{\sum_j P(x,y_j)};$$

$$M[X\mid y]=\begin{cases}\sum\limits_i x_i p(x_i\mid y)\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x\mid y)dx\end{cases}.$$

Пример 1 Пусть случайная величина ξ имеет следующий закон распределения:

ξ	–1	0	2
P	1/4	1/4	1/2

Вычислить математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и среднеквадратическое отклонение σ.

Ответ: $M\xi=1/4$; $D\xi=19/16$; $\sigma=\sqrt{19}/4$.

Пример 2 Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан с помощью таблицы 3.

Таблица 3 - Совместный закон распределения случайных величин ξ и η

η \ ξ	1	2
–1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Вычислить $M(\xi\eta)$.

Решение Воспользуемся формулой $M(\xi\eta)=\sum\limits_{i,j} x_i y_j p_{ij}$. А именно, в каждой клетке таблицы выполняем умножение соответствующих значений x_i и y_i , результат умножаем на вероятность p_{ij}, и все это суммируем по всем клеткам таблицы. В итоге получаем:

$$M(\xi\eta)=-1\cdot 1\cdot 1/16+(-1)\cdot 2\cdot 3/16+0\cdot 1\cdot 1/16+0\cdot 2\cdot 3/16+1\cdot 1\cdot 1/8+1\cdot 2\cdot 3/8=$$
$$=-1/16-3/8+1/8+3/4=7/16.$$

Ответ: $M(\xi\eta)=7/16$.

Пример 3 Совместный закон распределения случайных величин ξ и η задан с помощью таблицы 4.

Таблица 4 - Совместный закон распределения случайных величин ξ и η

$\eta \backslash \xi$	1	2
–1	1/16	3/16
0	1/16	3/16
1	1/8	3/8

Вычислить ковариацию - $cov(\xi,\ \eta)$.

Решение В предыдущей задаче уже было вычислено математическое ожидание $M\xi\eta = 19/16$. Осталось вычислить $M\xi$ и $M\eta$.

Частное распределение для величины ξ получается суммированием вероятностей в строках:

$$P(\xi = -1) = P(\xi = -1, \eta = 1) + P(\xi = -1, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4;$$
$$P(\xi = 0) = P(\xi = 0, \eta = 1) + P(\xi = 0, \eta = 2) = 1/16 + 3/16 = 1/4;$$
$$P(\xi = 1) = P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 1, \eta = 2) = 1/8 + 3/8 = 1/2.$$

Аналогично получается частное распределение для величины η:

$$P(\eta = 1) = 1/16 + 1/16 + 1/8 = 1/4;$$
$$P(\eta = 2) = 3/16 + 3/16 + 3/8 = 3/4.$$

Тогда $M\xi = -1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 = 1/4$, $M\eta = 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 3/4 = 7/4$, значит, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta = 7/16 - 1/4 \cdot 7/4 = 0$, чего и следовало ожидать вследствие независимости случайных величин.

Ответ: $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.

Пример 4 Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$ принимает значения (0,0), (1,0), (–1,0), (0,1) и (0,–1) равновероятно. Вычислить ковариацию случайных величин ξ и η. Показать, что они зависимы.

Ответ: $cov\ (\xi,\ \eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta = 0$. ξ и η - зависимы.

Пример 5 Случайные приращения цен акций двух компаний за день ξ и η имеют совместное распределение, заданное таблицей 5.

Таблица 5 - Совместный закон распределения случайных величин ξ и η

$\eta \backslash \xi$	–1	+1
–1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение Прежде всего вычисляем $M\xi\eta$ = 0,3 – 0,2 – 0,1 + 0,4 = 0,4. Далее находим частные законы распределения ξ и η:

η \ ξ	–1	+1	p_ξ
–1	0,3	0,2	0,5
+1	0,1	0,4	0,5
p_η	0,4	0,6	

Определяем $M\xi$ = 0,5 – 0,5 = 0; $M\eta$ = 0,6 – 0,4 = 0,2; $D\xi$ = 1; $D\eta$ = 1 – 0,2^2 = 0,96; $cov(\xi,\eta)$ = 0,4. Получаем: $\rho = \dfrac{0,4}{\sqrt{1}\sqrt{0,96}} \approx 0,408$.

Ответ: 0,408.

Пример 6 Случайные приращения цен акций двух компаний за день имеют дисперсии $D\xi$ = 1 и $D\eta$ = 2, а коэффициент их корреляции ρ = 0,7. Найти дисперсию приращения цены портфеля из 5 акций первой компании и 3 акций второй компании.

Ответ: $D(5\xi + 3\eta) \approx 72,7$.

Пример *7* Распределение двумерной случайной величины задано таблицей 6.

Таблица 6 – Распределение двумерной случайной величины

η \ ξ	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти условное распределение и условное математическое ожидание η при ξ = 1.

Ответ: $P_{\xi|\eta}(y_1 \mid x_1) = \dfrac{1}{3}$, $P_{\xi|\eta}(y_2 \mid x_1) = \dfrac{2}{3}$, $M(\eta \mid \xi = 1) = 5$.

Пример 8 Функция распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины *X* изображена на рисунке 1.

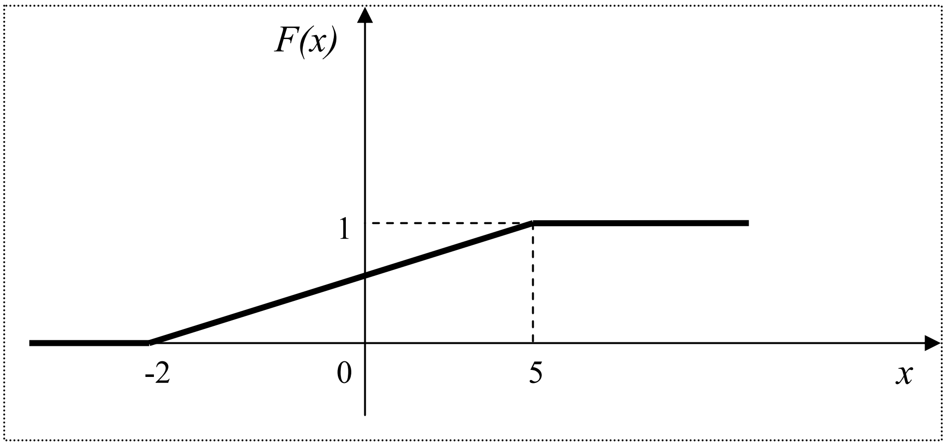


Рисунок 1 - Функция распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины *X*

Тогда ее дисперсия равна...

Ответ: $D(x) = \dfrac{49}{12}$.

Пример 9 Дискретная двумерная случайная величина задана таблицей распределения (таблица 7).

Таблица 7 – Распределение дискретной двумерной случайной величины

	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2=6$	0,3	0,1	0,03	0,07

Найти условное математическое ожидание случайной величины *Y* при значении случайной величины *X*=1, т.е. $M\left[Y\middle|x_1=1\right]$.

Ответ:

$$P[x_1] = \sum_{j=1}^{2} P(x_1, y_j) = 0,45; \quad P(y_1 \mid x_1) = \frac{P(x_1, y_1)}{P(x_1)} = \frac{1}{3};$$

$$P(y_2 \mid x_1) = \frac{P(x_1, y_2)}{P(x_1)} = \frac{2}{3}; \quad M[Y \mid x_1 = 1] = \sum_{j=1}^{2} y_j P(Y_j \mid x_1) = 5.$$

Пример 10 Имеем $r_{yx_1} = 0,8;$ $r_{yx_2} = 0,65;$ $r_{x_1x_2} = 0,88$. Какой фактор можно не включать в уравнение регрессии?

Решение Не рекомендуется включать в уравнение регрессии факторы, слабо связанные с показателем Y (в качестве критерия можно использовать неравенство $r_{xy}|\le 0{,}5$), но тесно связанные с другими факторами. Фактор x_2 включать не следует, т.к. он тесно связан (коллинеарен) с фактором x_1: $x_1 = ax_2 \quad (a = 0{,}88)$.

Ответ: фактор x_2 включать не следует.

Пример 11 Для случайной величины ξ, заданной таблицей 8, в опыте с равновероятными исходами E_k вычислить $M(\xi)$.

Таблица 8 – Значения случайной величины ξ

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ	-3	10	0	5	-3	-1	-3	5	1	-3

Ответ: $M(\xi)$=0,8.

Пример 12 Подсчитать коэффициент корреляции для случайных величин ξ и η, заданных таблицей 9.

Таблица 9 – Значения случайных величин ξ и η

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ	7	-2	1	-5	3	-2	1	-2	0	1
η	5	-1	-7	0	10	4	-1	0	5	3

Решение $M(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $r(\xi;\eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta)}{\sqrt{D(\xi)\cdot D(\eta)}}$.

Найдем: $M(\xi) = \frac{1}{10}(7-2+1-5+3-2+1-2+0+1) = 0{,}2$;

$$M(\eta) = \frac{1}{10}(5-1-7+0+10+4-1+0+5+3) = 1{,}8.$$

Вычислим: $M\left(\xi^2\right)$, $M\left(\eta^2\right)$, $M(\xi\cdot\eta)$. Для этого заполним таблицу 10.

Таблица 10 – Таблица значений ξ^2, η^2, $\xi\cdot\eta$

Исходы	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
ξ^2	49	4	1	25	9	4	1	4	0	1
η^2	25	1	49	0	100	16	1	0	25	9
$\xi\cdot\eta$	35	4	-7	0	30	-8	-1	0	0	3

$$M\left(\xi^2\right)=\frac{1}{10}\left(49+4+1+25+9+4+1+4+0+1\right)=9,7;$$

$$M\left(\eta^2\right)=\frac{1}{10}\left(25+1+49+0+100+16+1+0+25+9\right)=22,6;$$

$$M\left(\xi\cdot\eta\right)=\frac{1}{10}\left(35+2-7+0+30-8-1+0+0+3\right)=5,4;$$

$$D(\xi)=M\left(\xi^2\right)-\left(M(\xi)\right)^2=9,76,\ \ D(\eta)=M\left(\eta^2\right)-\left(M(\eta)\right)^2=19,36;$$

$$Cov(\xi;\eta)=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=5,04,\ \ r(\xi;\eta)=\frac{Cov(\xi;\eta)}{\sqrt{D(\xi)\cdot D(\eta)}}=0,37.$$

Ответ: $r(\xi;\eta)=0,37$.

Пример 13 Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ, заданной плотностью вероятности $p(x)=1$ на отрезке $[0,1]$.

Ответ: $M(\xi)=\frac{1}{2}$, $D(\xi)=\frac{1}{12}$, $\sigma(\xi)\approx 0,289$.

Пример 14 Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей 11.

Таблица 11 – Значения дискретной двумерной случайной величины

Y	X			
	$x1$=1	$x2$=3	$x3$=4	$x4$=8
y_1=3	0,15	0,06	0,25	0,04
$y2$=6	0,30	0,10	0,03	0,07

Решение

$p(x_1)$ = 0,15 + 0,30 = 0,45,
$p(y_1/x_1) = p(x_1,y_1)/p(x_1)$ = 0,15/0,45 = 1/3,
$p(y_2/x_1) = p(x_1,y_2)/p(x_1)$ = 0,30/0,45 = 2/3.

Условное математическое ожидание:

$$M(Y/X=x_1)=\sum_{j=1}^{2} y_j\,p(y_j/x_1)=y_1\,p(y_1/x_1)+y_2\,p(y_2/x_1)=2/3+12/3=5.$$

Ответ: $M(Y/X=x_1)=5$.

Примеры для самостоятельного решения

Пример 1 Случайная величина задана законом распределения:

X	2	3	4
P	0,2	0,5	0,3

Найти $M(x)$ = ?, $D(x)$ = ?

Пример 2 Проводятся два выстрела с вероятностью попадания в цель $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$. Найти закон распределения общего числа попаданий в цель и математическое ожидание.

Пример 3 Дисперсия случайной величины равна 5.
Найти дисперсию: а) $X + 25$, б) $-3X + 70$, в) $11X$.

Пример 4 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	2	4
P	0,2	p_2	0,3

Тогда ее математическое ожидание равно...

4 Основные законы распределений случайных величин

Дискретные распределения: биномиальное, отрицательное биномиальное, гипергеометрическое, распределение Пуассона. Непрерывные распределения: равномерное, экспоненциальное, нормальное, логнормальное, «Хи-квадрат» распределение с m степенями свободы, распределение Стьюдента с m степенями свободы, распределение Фишера-Снедекора с m_1 и m_2 степенями свободы. Работа с таблицами распределений. Многомерное нормальное распределение

Биномиальное распределение: $P_n(m) = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$, $\quad C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

$\mu = np, \quad D = npq.$

Отрица́тельное биномиа́льное распределе́ние:

$$P_k = P\left\{X = k \right\} = C_{r+k-1}^{k} \cdot P^r (1-P)^{k-1},$$

где $0 < p < 1, \quad r > 0.$

Гипергеометрическое распределение: $P_m = P\{x = m\} = \dfrac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{(n-m)}}{C_N^n}$, где N, M и n - целые неотрицательные числа и $M < N$, $n < N$.

$$\mu = np, \quad D = \sigma^2 = npq + \frac{N-n}{N-1}.$$

Распределение Пуассона: $f(x) = \dfrac{\lambda^x e^{(-\lambda)}}{x!}$, $D = \lambda$ (дисперсия), асимметрия $\beta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$, эксцесс $\beta_2 = \dfrac{1}{\lambda}$.

Равномерное (равновероятное, прямоугольное) распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}; & a \le x \le b, \\ 0; & b < x < a. \end{cases}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}; & x \ge 0. \end{cases}$$

Распределения нормальной случайной величины задается соотношением:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}, \quad F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-m_t)^2/2\sigma_t^2} dt.$$

Правило 3-х сигм:

$$P(x \in [m_x - \sigma_x,\ m_x + \sigma_x]) = 0{,}68;$$
$$P(x \in [m_x - 2\sigma_x,\ m_x + 2\sigma_x]) = 0{,}95;$$
$$P(x \in [m_x - 3\sigma_x,\ m_x + 3\sigma_x]) = 0{,}99.$$

Функция Лапласа: $P(a \le x \le b) = \Phi\left(\dfrac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - m_x}{\sigma_x}\right)$.

Логнорма́льное распределе́ние: $f_\eta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma \cdot x} \cdot e^{-(\ln x - \ln a)^2/2\sigma^2}$.

Неравенство Чебышева. Центральная предельная теорема

Пример 1 В 400 испытаниях Бернулли вероятность успеха в каждом испытании равна 0,8. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что разница между числом успехов в этих испытаниях и средним числом успехов будет меньше 20.

Решение Число успехов в этих испытаниях распределено по закону Бернулли, поэтому среднее число успехов равно $M\xi = np$ = 400 × 0,8 = 320, а дисперсия $D\xi = npq$ = 400 × 0,8 × 0,2 = 64. Тогда в силу неравенства Чебышева имеем: $P\left(\left|\xi - 320\right| < 20\right) \geq 1 - \frac{D\xi}{20^2} = 1 - \frac{64}{400} = 0,84.$

Вычислим эту же вероятность с помощью приближенной (интегральной) формулы Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\xi - 320\right| < 20\right) = P\left(\left|\xi - np\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}} < \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{20}{\sqrt{64}}\right) = 2\Phi_0(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

Ответ: 0,9876.

Пример 2 В продукции цеха детали отличного качества составляют 50%. Детали укладываются в коробки по 200 шт. в каждой. Какова вероятность того, что число деталей отличного качества в коробке отличается от 100 не более чем на 5?

Решение Пусть ξ_i – случайное число деталей отличного качества в i-ой коробке, тогда при n = 200, $p = q$ = 1/2 получим:

$$P(95 \leq m \leq 105) = P\left(-\frac{5}{\sqrt{50}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{5}{\sqrt{50}}\right) \approx \Phi_0(0,71) - \Phi_0(-0,71) \approx 0,52.$$

Ответ: 0,52.

Пример 3 Используя условия задачи 2, указать, в каких границах с вероятностью 0,997 находится число деталей отличного качества в коробке.

Решение По таблице функции Лапласа при условии $P\left(\left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| \leq u\right) \approx 0,997$ находим u = 3, и, следовательно, S_n лежит в пределах $np \pm 3\sqrt{npq}$, т.е. число деталей отличного качества в коробке с вероятностью 0,997 находится в пределах 100 ± 21.

Ответ: с вероятностью 0,997 находится в пределах 100 ± 21.

Пример 4 Используя условия задачи 2, определить, сколько деталей надо взять, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, можно было утверждать, что число деталей отличного качества среди них не менее 100.

Решение Обозначим $u = \frac{100 - np}{\sqrt{npq}}$. Используя нормальное приближение, получаем: $P(m \geq 100) = P\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}} \geq u\right) \approx 1 - \Phi(u) = \frac{1}{2} - \Phi_0(u) \geq 0,99$.

Отсюда $\Phi_0(u) \le -0{,}49$, а из свойств функции Лапласа получаем неравенство $u \le -2{,}32$. Обозначив $x = \sqrt{n} > 0$, с учетом $p = q = 1/2$ приходим к квадратному неравенству $x^2 - 2{,}3x - 200 \ge 0$, решая которое, получаем $n \ge 236$.

Можно предложить и другой метод. А именно, пусть ξ_i – число деталей, которые пришлось перебрать, чтобы найти i-ую деталь отличного качества (включая ее саму). Случайные величины имеют геометрическое распределение с параметром $p = 1/2$. Можем вычислить $M\xi = 1/p = 2$, $D\xi = (1 - p)/p^2 = 2$. Используя ЦПТ, получаем неравенство:

$$P(S_{100} \le n) = \Phi\left(\frac{n - 100 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{100}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{n - 200}{14{,}14}\right) \ge 0{,}99,$$

откуда следует $n \ge 200 + 14{,}14 \cdot 2{,}32 = 232{,}8$ или, округляя, $n \ge 234$.

Результаты получаются близкие, но первый метод более точен и потому предпочтительней. Вторым методом лучше пользоваться, если нужно определить границы, в которых лежит неизвестное число деталей.

Ответ: $n \ge 236$; $n \ge 234$.

Пример 5 Доходы жителей города имеют математическое ожидание 10 тыс. р и среднее квадратическое отклонение 2 тыс. р (в месяц). Найти вероятность того, что средний доход 100 случайно выбранных жителей составит от 9,5 до 10,5 тыс. р.

Ответ: 0,9876.

Пример 6 Срок службы электрической лампы имеет показательное распределение с математическим ожиданием 1000 часов. Найти вероятность того, что средний срок службы для 100 ламп составит не менее 900 часов.

Ответ: 0,8413.

Нормальное распределение

Пример 1 В результате длительных наблюдений определено, что дивиденды X' и Y' по акциям фирм A и B являются нормальными с вероятностью: $X' \sim N(5, 5)$; $Y' \sim N(15, 15)$. Стоимость каждой акции равна 100\$. Инвестор хочет приобрести акции на сумму 1000 \$.

а) Какие законы распределения имеют доходы X, Y от вложения всей суммы в акции фирмы A или B?

б) Какой закон распределения имеет доход Z от покупки акций в пропорции 2/3?

в) Построить графики функций случайных величин X, Y, Z.

г) Какова вероятность того, что полученный доход Z от вложения будет находиться в пределах от 110\$ до 150\$?

Ответ: а) $X = 10X' \Rightarrow X \sim 50)$ или $Y = 10Y' \Rightarrow Y \sim 150)$;

б) $Z = 4 \cdot X' + 6 \cdot Y' \Rightarrow Z \sim N(m_Z = 4 \cdot 5 + 6 \cdot 15 = 110,\ \sigma_Z = \sqrt{16 \cdot 25 + 36 \cdot 225} = 92{,}2)$;
г) $P(110 \le Z \le 150) = 0{,}16$.

Пример 2 На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием a = 950 кг и средним квадратическим отклонением σ = 150 кг.

Определить вероятность того, что вес случайно отобранной туши…

а) окажется больше 1250 кг;

б) окажется меньше 850 кг;

в) будет находиться между 800 кг и 1300 кг;

г) отклонится от математического ожидания меньше, чем на 50 кг;

д) отклонится от математического ожидания больше, чем на 50 кг.

Найдите границы, в которых отклонение веса случайно отобранной туши от своего математического ожидания не превысит утроенного среднего квадратического отклонения.

Решение (используем функцию Лапласа)

а) случайная величина (вес туши) $X \in (1250, +\infty)$. Тогда

$$P(1250 < X < +\infty) = \Phi(\frac{+\infty - 950}{150}) - \Phi(\frac{1250 - 950}{150}) = \Phi(+\infty) - \Phi(2) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}477 = 0{,}023...;$$

б) $\alpha = -\infty,\ \beta = 850,\ a = 950,\ \sigma = 150$.

$$P(-\infty < X < 850) = \Phi(\frac{850 - 950}{150}) - \Phi(\frac{-\infty - 950}{150}) = \Phi(\frac{-2}{3}) - \Phi(-\infty) =$$
$$= -\Phi(\frac{2}{3}) + \Phi(+\infty) = = -0{,}249 + 0{,}5 = 0{,}251...;$$

в) $$P(800 < X < 1300) = \Phi(\frac{1300 - 950}{150}) - \Phi(\frac{800 - 950}{150}) = \Phi(2{,}33) - \Phi(-1) =$$
$$= 0{,}49 + 0{,}34 = 0{,}83...;$$

г) $P(|X - 950| < 50) = 2\Phi(\frac{50}{150}) = 2\Phi(0{,}33) = 2 \cdot 0{,}129 = 0{,}258$;

д) $P(|X - 950| > 50) = 1 - P(|X - 950| < 50) = 1 - 0{,}259 = 0{,}741$.

Правило трех сигм: $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$. По условию задачи $(a - 3\sigma;\ a + 3\sigma) = (950 - 3 \cdot 150;\ 950 + 3 \cdot 150) = (500;\ 1400)$, т.е. вес туши не выйдет за эти пределы.

Ответ. а) 0,023; б) 0,251; в) $P(800 < X < 1300) = 0{,}83...$;

г) $P(|X - 950| < 50) = 0{,}258$;

д) $P(|X-950|>50)=0,741\cdot(a-3\sigma;\ a+3\sigma)=(500;\ 1400)$.

Т.е. вес туши не выйдет за эти пределы.

Теоремы Муавра-Лапласа

Пример 1 Для мастера определенной квалификации вероятность изготовить деталь отличного качества равна 0,75. За смену он изготовил 400 деталей. Найти вероятность того, что в их числе 280 деталей отличного качества.

Ответ: 0,0032.

Пример 2 В продукции некоторого производства брак составляет 15%. Изделия отправляются потребителям (без проверки) в коробках по 100 штук. Найти вероятности событий:

В – наудачу взятая коробка содержит 13 бракованных изделий;

С – число бракованных изделий в коробке не превосходит 20.

Ответ: *P(B)* = 0,095; *P(C)* = 0,919.

Пример 3 Небольшой город ежедневно посещают 100 туристов, которые днем идут обедать. Каждый из них выбирает для обеда один из двух городских ресторанов с равными вероятностями и независимо друг от друга. Владелец одного из ресторанов желает, чтобы с вероятностью приблизительно 0,99 все пришедшие в его ресторан туристы могли там одновременно пообедать. Сколько мест должно для этого быть в его ресторане?

Решение Будем считать, что событие A произошло, если турист пообедал у заинтересованного владельца. По условию задачи $p=P(A)=0,5$, $n=100$. Нас интересует такое наименьшее число посетителей m, что вероятность одновременного прихода не менее чем m туристов из числа $n=100$ с вероятностью успеха $p=0,5$ приблизительно равна вероятности переполнения ресторана, т.е. 1 - 0,99 = 0,01.

Таким образом, нас интересует такое наименьшее число m, что $P_{100}(m,100)\approx 0,01$. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа.

В нашем случае: m – неизвестно, $\sqrt{npq}=5$, $t_{m_1}=\dfrac{m-50}{5}=\dfrac{m}{5}-10$,

$t_{m_2}=\dfrac{100-50}{5}=10$. Тогда:

$$0,01\approx P_{100}(m,100)\approx\left(\Phi(10)-\Phi\left(\frac{m}{5}-10\right)\right)\approx 0,5-\Phi\left(\frac{m}{5}-10\right);\quad \Phi\left(\frac{m}{5}-10\right)\approx 0,49.$$

Используя таблицы для функции $\Phi(x)$, находим $\dfrac{m}{5}-10\approx 2,33$. Значит, $m\approx 2,33\cdot 5+10\approx 61,65$. Следовательно, в ресторане должно быть 62 места.

Ответ: в ресторане должно быть 62 места.

5 Предельные теоремы (Закон больших чисел и центральная предельная теорема)

Виды сходимости последовательности случайных величин. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствия. Особая роль нормального распределения: центральная предельная теорема. Теоремы Муавра-Лапласа (локальная и интегральная).

Теорема Чебышёва:

$$P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+...+X_k}{k}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_k)}{k}\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{C}{k\varepsilon^2}.$$

Теорема Бернулли: $P\left\{\left|\frac{m}{k}-P\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{P(1-P)}{k\varepsilon^2}.$

Локальная теорема Лапласа: $P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$

Интегральная теорема Лапласа: $P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right).$

Список литературы

1 Банк Задач.ру [Электронный ресурс]. URL: http://bankzadach.ru/

2 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2011. – 404 с. – Серия : Основы наук.

3 Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 2011. – 479 с.

4 Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573 с.

5 Лекции А. В. Степанова по математике [Электронный ресурс]. URL: http://www.limm.mgimo.ru/LIMM/math/sem2.html

6 Математическое бюро [Электронный ресурс]. URL: http://www.matburo.ru/

7 Теория вероятности и математическая статистика [Электронный ресурс]. URL: http://semenychev.ru/lectures.html

8 Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]. URL: http://iitam.omsk.net.ru/~klokov/probability/

Трофимова Лидия Ароновна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания
к выполнению практических и самостоятельных заданий
для студентов направления 080100 «Экономика»
очной формы обучения

Редактор О.Г. Арефьева

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать цифровая	Усл. печ. л. 2,25	Уч.-изд. л. 2,25
Заказ 150	Тираж 25	Цена свободная

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.