МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА «ИНФОРМАТИКА»

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания
к проведению лабораторных занятий
для студентов направления 280000
специальности 280101

КУРГАН 2007

Кафедра: «Информатика»

Дисциплины: «Теория системного анализа и принятия решений», «Системный анализ и моделирование процессов в техносфере»

(направление 280000; специальность 280101)

Составила: доцент Котликова В. Я.

Утверждены на заседании кафедры « 2 » июля 2007 г.

Рекомендованы методическим советом университета
« 20 » августа 2007 г.

Введение

Задачами линейного программирования называются оптимизационные задачи, в которых показатель эффективности (целевая функция) представляет собой линейную функцию от управляющих переменных, а ограничения, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств и (или) неравенств. Методы линейного программирования широко используются для решения различных технических, экономических и организационных задач.

1. Постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.1)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = \overline{1, m_1}); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, (i = \overline{m_1 + 1, m_2}); \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, (i = \overline{m_2 + 1, m}), \end{cases} \qquad (1.2)$$

где x_j, $j=\overline{1, n}$, управляющие переменные или решения задачи (1.1) – (2.2), c_j, b_i, a_{ij}, $i=\overline{1, m}$, $j=\overline{1, n}$ фиксированные параметры,

f – целевая функция или критерий эффективности задачи.

Функция (1.1) – линейная, ограничения (1.2) линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования – значит найти значения управляющих переменных x_j, $j=\overline{1, n}$, удовлетворяющих ограничениям (1.2), при которых целевая функция (1.1) принимает минимальное или максимальное значение.

Совокупность чисел $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,.., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям (1.2), называется допустимым решением или планом. План $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*, x_2^*,.., x_n^*)$, при котором целевая функция (1.1) принимает свое экстремальное значение, называется оптимальным.

2. Примеры построения математических моделей задач линейного программирования

Для практического решения задачи математическими методами следует построить её математическую модель. Процесс формирования математической модели состоит из нескольких этапов:

1) определение цели, т.е. чего хотят добиться, решая поставленную задачу;

2) выбор некоторого числа переменных величин (управляющих переменных), изменяя значения которых можно приближаться к поставленной цели; значения управляющих переменных являются решениями задачи;

3) определение области допустимых решений, т.е. формирование ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные;

4) выражение цели через управляющие переменные и неконтролируемые фиксированные параметры, значения которых известны и не подлежат изменениям, т.е. построение целевой функции задачи.

Приведем несколько примеров построения математических моделей задач линейного программирования.

2..1. Планирование производства

Пусть предприятие производит n видов продукции, располагая m видами ресурсов, запасы которых известны:

$$b_1,\ b_2,\ \ldots, b_i, \ldots,\ b_m.$$

Известна экономическая выгода производства продукции каждого вида (допустим, прибыль от реализации единицы продукции):

$$c_1,\ c_2,\ \ldots, c_j, \ldots,\ c_n.$$

Известно также необходимое количество каждого ресурса на производство одной единицы продукции каждого вида:

$$a_{11},\ a_{12},\ \ldots, a_{ij}, \ldots,\ a_{mn}.$$

Число a_{ij} – это количество единиц ресурса с номером i (i=1, 2, …, m), необходимое для производства одной единицы продукции с номером j (j=1, 2, …, n).

Требуется составить план производства $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, т.е. найти, сколько единиц продукции каждого вида $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ надо получить, чтобы был обеспечен наибольший суммарный доход.

Цель в задаче планирования производства – получение максимальной прибыли. В качестве управляющих переменных примем количество единиц продукции каждого вида $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$.

Составим систему ограничений, т.е. сформулируем те условия, которым должны удовлетворять компоненты x_j искомого плана $\boldsymbol{x}$. Для этого найдем количество ресурсов каждого вида, которое будет израсходовано для производства продукции.

Для производства x_1 единиц продукции первого вида будет израсходовано первого ресурса $a_{11}x_1$ единиц; для производства x_2 единиц второго продукта первого ресурса потребуется $a_{12}x_2$ единиц т.д. Общий расход первого ресурса составит

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n.$$

Однако общий расход ресурса не должен превышать его наличия, поэтому найденное выражение может быть только меньше или, в крайнем случае, равно запасу первого ресурса b_1:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \le b_1.$$

Аналогичные условия нужно составить и по всем остальным ресурсам. Таким образом, можно записать:

$$\begin{gathered}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \le b_m.
\end{gathered}$$

Чтобы план был допустимым, его компоненты x_j должны удовлетворять этим неравенствам.

Однако экономический смысл искомых величин накладывает на них еще одно условие: они не могут быть отрицательными числами. Следовательно, к полученным выше неравенствам надо добавить в данном случае условия неотрицательности искомых переменных:

$$\begin{gathered}
x_1 \ge 0, \\
x_2 \ge 0, \\
... \\
x_j \ge 0, \\
... \\
x_n \ge 0.
\end{gathered}$$

Эти две группы неравенства в совокупности и образуют систему ограничений данной задачи:

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i (i = 1,2,...,m); \\
x_j \ge 0 (j = 1,2,..,n).
\end{gathered}$$

Построим целевую функцию, для чего выразим доход через искомые величины. Одна единица продукции первого вида дает c_1 единиц дохода; по плану продукция первого вида будет произведена в количестве x_1 единиц, что дает доход в сумме c_1x_2. Аналогично, планируемая к выпуску продукция второго вида в количестве x_2 единиц обеспечит доход c_2x_2 и т.д. Общий доход (обозначим его через z) составит

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n.$$

Это выражение и будет целевой функцией задачи.

Более компактная форма записи целевой функции имеет вид:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом: найти такие компоненты x_j плана $\boldsymbol{x}$, которые удовлетворяли бы всем неравенствам и доставляли бы функции z наибольшее значение. Так как система ограничений и целевая функция линейны относительно неизвестных, то мы имеем задачу линейного программирования.

2.2. Формирование минимальной потребительской продовольственной корзины

Имеется n продуктов, каждый из которых содержит m различных питательных веществ (белки, жиры, углеводы, витамины и т.д.). В одной единице j-го продукта содержится a_{ij} единиц питательного вещества с номером i . Известен требуемый человеку минимум питательных веществ каждого вида - b_i (i = 1, 2,…, m), а также стоимость одной единицы j-го продукта - c_j (j = 1, 2,…, n). (Таблица 1)

Таблица 1

№	Питательные вещества	Норма	Продукты			
			$П_1$	$П_2$	…	$П_n$
1	Белки	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
2	Жиры	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
3	Углеводы	b_3	a_{31}	a_{32}	…	a_{3n}
4	Витамин А	b_4	a_{41}	a_{42}	…	a_{4n}
	⋮	⋮				
m	вода	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}
	стоимость		c_1	c_2		c_n

Необходимо определить требуемую потребительскую продовольственную корзину, имеющую минимальную стоимость. Построим математическую модель задачи.

Цель задачи – минимизация стоимости *потребительской продовольственной корзины.*

Управляющие переменные x_j - это количество j-го продукта, входящего в потребительскую корзину, (j=1, 2, …, n).

Условия, накладываемые на переменные, должны быть следующими. Возьмем первое питательное вещество; во всех продуктах оно содержится в количестве:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n$$

единиц, и это количество должно быть не меньше необходимого минимума b_1:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n \geq b_1.$$

Аналогичные условия запишем и по всем остальным питательным веществам:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n \geq b_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \geq b_i,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n \geq b_m,$$

Кроме того, количество каждого продукта не может быть отрицательной величиной, следовательно:

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 0,$$

$$. \; . \; .$$

$$x_j \geq 0,$$

$$. \; . \; .$$

$$x_n \geq 0.$$

Все эти неравенства в совокупности образуют систему ограничений.

Целевая функция F выражается через искомые величины x_{j} следующим образом:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_jx_j + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Поскольку целевая функция и система ограничений линейны, это – задача линейного программирования.

2.3. Транспортная задача

Пусть имеются два пункта отправления A_1 и A_2, в которых сосредоточен однородный груз в количествах соответственно a_1 и a_2 (рис.2.1). Указанный груз надо перевезти в пункты назначения B_1, B_2, B_3 в количествах соответственно b_1, b_2, b_3. Будем считать при этом, что запасы груза равны его потребностям, т.е.

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Известна стоимость доставки одной единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Обозначим эту стоимость c_{11}, c_{12}, …, c_{ij} . Сведем все данные в таблице 2, которая носит название *матрицы стоимости.*

Таблица 2

Пункты назначения / Пункты отправления	B_1	B_2	B_3	Запасы груза
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
Потребности в грузе	b_1	b_2	b_3	$\sum a_j = \sum b_j$

Требуется составить план (программу) перевозок: сколько единиц груза надо доставить из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения. Этот план в данном случае будет состоять из шести чисел

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}).$$

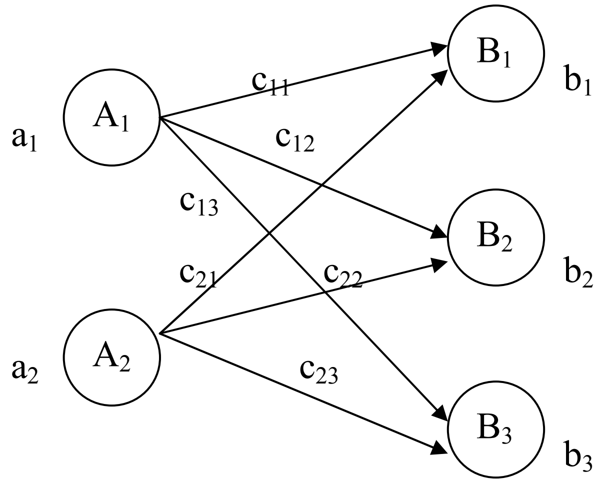

Рис.2.1

Например, неизвестная x_{23} обозначает объем груза, который надо будет перевезти из второго пункта отправления в третий пункт назначения. Аналогичный смысл имеют и прочие числа x_{ij}. Вписав их в соответствующие клетки маршрутов, получим *матрицу перевозок*. В нашем примере эти две матрицы (стоимости и перевозок) соединены в одну (см. табл. 2).

Числа плана должны удовлетворять:

1) условиям доставки необходимого количества грузов в пункты назначения:

$$x_{11}+x_{21}=b_1,$$
$$x_{12}+x_{22}=b_2,$$
$$x_{13}+x_{23}=b_3;$$

2) условиям вывозки всего груза из каждого пункта отправления:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2;$$

3) условиям неотрицательности:

$$x_{ij}\geq 0.$$

Все эти условия, рассматриваемые совместно, образуют систему ограничений. Любые шесть чисел, удовлетворяющие этой системе, будут допустимым планом.

Допустимый план нетрудно найти простым подбором. Однако при этом надо выдержать следующий критерий: стоимость перевозок должна быть минимальной. План, обеспечивающий минимум стоимости, и будет оптимальным.

Вычислим стоимость перевозок z:

$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}$$

или, короче,

$$z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}.$$

Надо найти наименьшее значение функции z при выполнении всех указанных выше ограничений.

При общей формулировке транспортной задачи (m пунктов отправления и n пунктов назначения) в задаче будет $m \cdot n$ неизвестных. Закон построения системы ограничений и целевой функции останется тем же. В итоге получится задача линейного программирования.

Математические модели всех рассмотренных задач имеют следующие общие свойства:

а) требуется отыскать максимум или минимум линейной функции искомых величин x_j, x_{ij};

б) переменные должны удовлетворять ограничениям, заданным в виде линейных неравенств или уравнений, а также условиям неотрицательности.

Аналогично приведенным формулируются и многие другие экономические задачи (составление различных смесей, размещение предприятий, раскрой материалов и т.д.).

3. Основная задача линейного программирования

В произвольной форме модель задачи линейного программирования имеет вид (1.1) – (1.2).

Для применения алгебраических методов решения задачу линейного программирования следует записать в канонической форме:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max. \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{3.2}$$

Задачу линейного программирования будем считать приведенной к каноническому виду, если

1) требуется найти максимум целевой функции;
2) система ограничений содержит только равенства;
3) правые части системы ограничений неотрицательны;
4) все переменные неотрицательны.

Переход к канонической форме записи производится следующим образом:

1) если в задаче требуется найти минимум целевой функции, то необходимо ввести новую целевую функцию $f_1 = -f$, тогда $\max f_1 = -\min f$;

2) чтобы перейти от неравенства к равенству в системе ограничений, надо прибавить (либо вычесть) дополнительную неотрицательную переменную к (от) левой части неравенства;

3) если в правой части системы ограничений имеются отрицательные числа, то необходимо умножить на -1 обе части каждого равенства, в котором в правой части стоит отрицательное число;

4) если в задаче какая-либо из переменных произвольна, то от неё избавляются, заменяя её разностью двух других неотрицательных переменных. Например, для произвольной переменной x_k, $x_k = x_k' - x_k''$, где $x_k' \geq 0$, $x_k'' \geq 0$.

Задачу линейного программирования в канонической форме называют основной задачей.

Пример

Записать в канонической форме задачу

$f = 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq -10 \\ x_1 - 8x_1 - 3x_3 \leq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение

Введем в рассмотрение новую целевую функцию

$f_1 = -f = -7x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max$.

Умножим обе части первого неравенства на -1, тогда число в правой части ограничения станем положительным, а первое неравенство примет вид:

$3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 10$.

Вычтем дополнительную неотрицательную величину x_4 из левой части полученного неравенства, преобразуя данное неравенство в уравнение. Добавив дополнительную неотрицательную переменную x_5 к левой части второго неравенства, перейдем к уравнению. Произвольную переменную x_3 заменим разностью двух неотрицательных переменных x_6 и x_7:

$x_3 = x_6 - x_7$, $x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$.

Т.о., задача в канонической форме имеет следующий вид:

$-7x_1 - 4x_2 + 3x_6 - 3x_7 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_6 - x_7 - x_4 = 10 \\ x_1 - 8x_2 - 3x_6 + 3x_7 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_6 + 8x_7 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Основная задача линейного программирования (ОЗЛП) не всегда имеет решение. Уравнения (3.2) могут оказаться несовместными; может оказаться, что уравнения (3.2) имеют решение, но не в области неотрицательных значений x_1,

x_2, …, x_n. Также возможен вариант, когда допустимые решения существуют, но среди них нет оптимального, т.к. целевая функция не ограничена в области допустимых решений.

Предположим, что уравнения (3.2) линейно независимы. Если число уравнений в системе ограничений (3.2) равно числу переменных, т.е. $m=n$, то система уравнений основной задачи линейного программирования имеет единственное решение. Если все величины x_1, x_2, …,x_n неотрицательны, то полученное решение является допустимым и оптимальным. Задача максимизации целевой функции в этом случае не имеет смысла.

Поэтому далее будем рассматривать только случай, когда $m < n$. Тогда, если система (3.2) совместна, у неё существует бесчисленное множество решений. При этом $n - m$ переменным можно придавать произвольные значения (эти переменные называют **свободными**), а остальные m переменных выразятся через них (эти m переменных называют **базисными**).

Вообще, если число линейно независимых уравнений, входящих в систему ограничений, равно m, то всегда можно выразить какие-то m базисных переменных через $n - m$ остальных (свободных) и, придавая свободным переменным любые значения, получить бесчисленное множество решений системы.

В дальнейшем, записывая уравнения ОЗЛП, мы будем считать их линейно независимыми. Итак, если число уравнений ОЗЛП m меньше, чем число переменных n, то система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений, т. е. совокупностей значений x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющих уравнениям-ограничениям (3. 2). Если среди этих решений нет ни одного, для которого все x_1, x_2, ..., x_n неотрицательны, то это значит, что ОЗЛП не имеет допустимого решения. Если же существуют какие-то решения системы (3.2), для которых все x_1, x_2, ..., x_n неотрицательны, то каждое из них допустимо. Возникает задача — найти среди допустимых решений оптимальное, т. е. такое решение x_1, x_2, ..., x_n, для которого линейная функция

$$\boldsymbol{f=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n}$$

обращается в максимум.

4. Графический метод решения задачи линейного программирования

Если число независимых переменных в задаче линейного программирования равно двум, то задачу можно решить графическим методом. На практике задачи с двумя независимыми переменными встречаются редко, но графический метод хорошо иллюстрирует основные свойства задач линейного программирования, используемые при решении задач большой размерности.

Задача линейного программирования с двумя независимыми переменными ставится следующим образом:

Максимизировать (минимизировать) целевую функцию

$$f = c_1x_1 + c_2x_2. \tag{4.1}$$

При ограничениях

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \ i = \overline{1, m_1} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Для решения задачи линейного программирования графическим методом необходимо построить на плоскости X_1OX_2 область допустимых решений, определенную системой неравенств (4.2).

Множество решений неравенства с двумя переменными

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$$

представляет собой одну из двух полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \tag{4.3}$$

следовательно, необходимо построить прямую (4.3), которая является границей полуплоскости. Для определения искомой полуплоскости надо задать произвольную контрольную точку, не лежащую на построенной прямой. Если неравенство выполняется в контрольной точке, то оно выполняется во всех точках полуплоскости, содержащей контрольную точку, в противном случае искомая полуплоскость находится с противоположной стороны от прямой. Найденную полуплоскость можно выделить штриховкой.

Область допустимых решений определяется как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи и представляет собой выпуклую многоугольную область.

В допустимой области содержится бесконечное число допустимых точек. Необходимо найти допустимую точку с наибольшим (наименьшим) значением целевой функции

$$f = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Рассмотрим линию уровня функции f:

$$f = h_1,$$

где h_1 – некоторая постоянная величина.
Уравнение

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h_1 \tag{4.4}$$

является уравнением прямой линии с угловым коэффициентом $-c_1/c_2$; отрезок, отсекаемый прямой (4.4) на оси OX_2, равен h_1/c_2.

Если заменить постоянную h_1 на h_2, угловой коэффициент прямой не изменится, изменится только отрезок, отсекаемый прямой на оси OX_2, т.е. прямая переместится параллельно самой себе в новое положение. При параллельном смещении линии уровня в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую – только убывает. Для определения направления возрастания можно изобразить две линии уровня

$$c_1x_1 + c_2x_2 = h_1$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 = h_2$$

и по их расположению определить направление возрастания (убывания) целевой функции.

Возможен другой способ определения направления возрастания (убывания) целевой функции. Известно, что вектор-градиент функции $f = c_1x_1 +$

c_2x_2 направлен по нормали к линии уровня в сторону наибольшего возрастания функции. Поскольку целевая функция линейна, вектор

$$\vec{n} = gradf = (c_1, c_2). \qquad (4.5)$$

Далее перемещая линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$ определяем граничную точку (или точки) области допустимых решений, в которой целевая функция принимает максимальное или минимальное значение. На заключительном этапе определяем координаты граничной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится точка, и определяем значение целевой функции в этой точке.

Задача 4.1

Предприятие производит изделия двух моделей А и В. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 штуки однотипных деталей, а для изделия модели В – 4 штуки. Предприятие может получить от своих поставщиков 1700 деталей в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели В – 30 минут. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени. Рынок сбыта изделий ограничен; за неделю можно реализовать не более 500 изделий модели А, а недельный спрос на модель В не превосходит спроса на модель А более, чем на 100 штук.

Сколько изделий каждой модели следует выпускать в неделю, если каждое изделия модели А приносит 2 усл.ед. прибыли, а для изделия модели В – 4 усл.ед. прибыли?

Решение

Обозначим через x_1 количество выпущенных за неделю изделий модели А, а через x_2 – количество выпущенных за неделю изделий модели В. Математическая модель задачи имеет вид

$$f = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \qquad (4.6)$$

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2 \le 1700; \\ 2x_1+5x_2 \le 1600; \\ x_1 \le 500; \\ x_2 - x_1 \le 100; \\ x_1 \ge 0; \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (4.7)$$

Построим в плоскости X_1OX_2 область допустимых решений. Условия неотрицательности переменных x_1 и x_2 позволяют ограничиться рассмотрением положительного квадранта. Каждое неравенство системы (4.7) определяет в плоскости X_1OX_2 полуплоскость, лежащую выше или ниже прямой, определяемой соответствующим уравнением. Построим прямые

$$3x_1+4x_2=1700;$$
$$2x_1+5x_2=1600;$$
$$x_1=500;$$
$$x_2 - x_1=100.$$

Рассмотрим точку с координатами $x_1=0$; $x_2=0$. Подставив их в первое неравенство, получаем $0\le1700$. Неравенство верное, следовательно, искомая полуплоскость лежит ниже прямой $3x_1+4x_2=1700$; другие полуплоскости определяются аналогичным образом.

Область OABCDE – область решения задачи (рис.4.1).

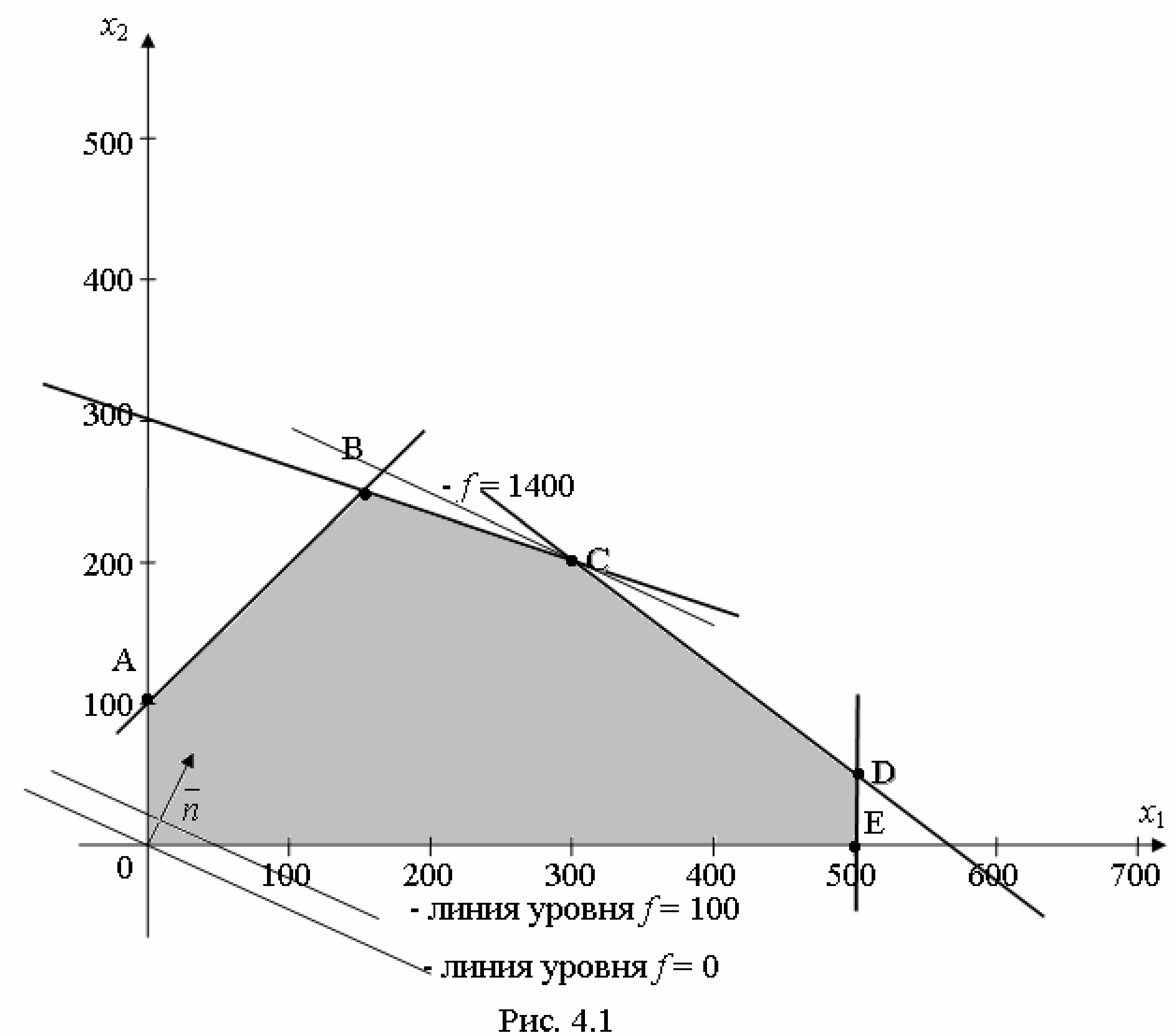

Рис. 4.1

Для нахождения максимального значения f построим две линии уровня, произвольно выбрав постоянные h_1 на h_2 (например, пусть $h_1 = 0$, а $h_2 = 100$):

$$2x_1+4x_2=0;$$

$$2x_1+4x_2=100.$$

Функция f возрастает в направлении вектора-нормали $\overline{n}=(2,4)$. Максимальное значение целевой функции определяем, передвигая линию уровня в направлении вектора n параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна её точка будет принадлежать области допустимых решений. В данном случае это точка C, образованная пересечением прямых $3x_1+4x_2=1700$, $2x_1+5x_2=1600$.

Решая совместно два линейных уравнения с двумя неизвестными, получим координаты точки C: $x_1=300$ $x_2=200$.

При этом f= 2*300+4*200=1400.

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 1400 усл. ед. надо производить 300 изделий модели А и 200 изделий модели В.

Задача решена.

При решении задачи линейного программирования графическим методом возможны варианты, схематично показанные на рис. 4.2-4.4:

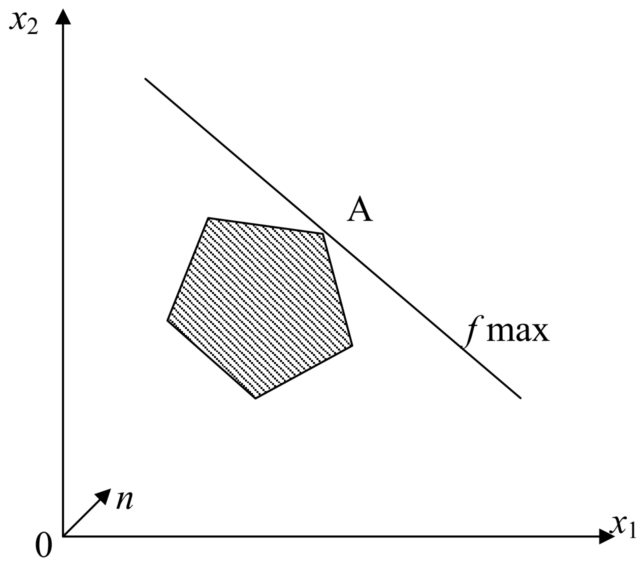

Рис. 4.2

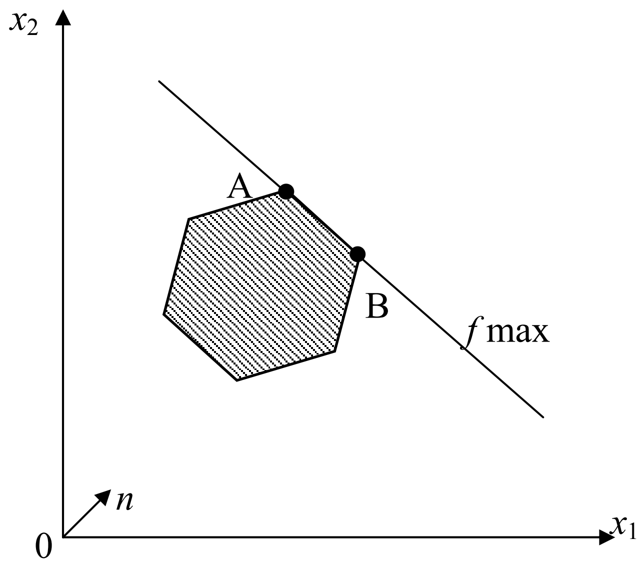

Рис. 4.3

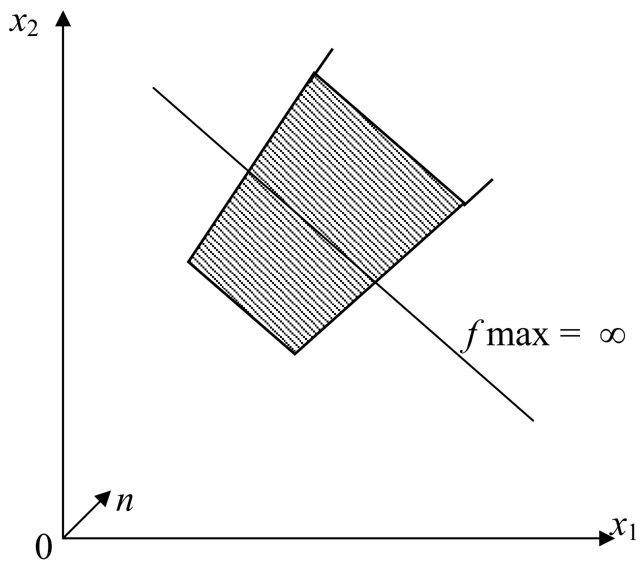

Рис. 4.4

На рисунке 4.2 показан случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке А. Рисунок 4.3 иллюстрирует случай, когда максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка АВ. На рисунке 4.4 изображен вариант, при котором целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений.

Несмотря на то, что рассмотренная выше задача 4.1 представляет частный случай задачи линейного программирования, можно сделать несколько обобщений.

1. Область допустимых решений всегда является выпуклым многоугольником, даже в случае, когда она не ограничена.

2. Оптимальное решение задачи линейного программирования, если оно существует, не может лежать внутри области допустимых решений, а всегда достигается в вершинах допустимой области.

5. Свойства задач линейного программирования

Графический метод удобен для двумерных задач, но его невозможно применить к задачам с размерностью больше трёх. В трехмерном случае линейные ограничения являются плоскостями, а не прямыми, допустимая область является выпуклым многогранником, а не выпуклым многоугольником. Оптимальному решению задачи будет соответствовать вершина этого многогранника, поверхностями уровня целевой функции будут плоскости вместо прямых. Для ***n***-переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, подобный симплексу. Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника.

Для применения аналитических методов решения необходимо выяснить основные свойства задач линейного программирования. Анализ задачи 4.1 позволит наглядно продемонстрировать эти свойства.

Запишем эту задачу в канонической форме.

Максимизировать функцию

$$f = 2x_1 + 4x_2.$$

При ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1700; \\ 2x_1+5x_2+x_4=1600; \\ x_1+x_5=500; \\ -x_1+x_2+x_6=100; \\ x_1\geq0;\ x_2\geq0;\ x_3\geq0; \\ x_4\geq0;\ x_5\geq0;\ x_6\geq0. \end{cases}$$

Система ограничений состоит из четырех уравнений с шестью неизвестными. Любое неотрицательное решение при этих ограничениях является допустимым решением. Имея четыре уравнения с шестью неизвестными, можно получить решение (хотя не всегда допустимое), придавая двум неизвестным (**свободным переменным**) произвольные значения и разрешая уравнения относительно четырех других (**базисных**) неизвестных.

Особенно интересны решения такого типа, когда свободные переменные приравниваются нулю. Если такое решение единственно, то оно называется **базисным решением**. Если оно к тому же допустимо, то называется **базисным допустимым решением**.

Для задачи линейного программирования с n переменными, подчиненными m ограничениям $(m< n)$, базисные решения могут быть получены, если приравнять нулю $n - m$ переменных и решить m уравнений относительно оставшихся m переменных; предполагается, что эти уравнения имеют единственное решение.

В рассмотренной выше задаче можно выбрать две свободные (небазисные) переменные

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ способами.}$$

Каждое базисное решение соответствует паре небазисных переменных: (x_1,x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4) и т.д. Из этих пятнадцати базисных решений только шесть, приведенных в таблице 3, допустимы и соответствуют вершинам допустимой области (см.рис. 4.1).

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Точка ОДР
0	0	1700	1600	500	100	O
0	100	1300	1100	500	0	A
$157\frac{1}{7}$	$257\frac{1}{7}$	200	0	$342\frac{6}{7}$	0	B
300	200	0	0	200	200	C
500	50	0	350	0	550	D
500	0	200	600	0	600	E

Действительно, каждую точку ОДР можно определить с помощью переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6. Если какая-либо из дополнительных x_3, x_4, x_5, x_6 переменных становится равной нулю, то соответствующее ограничение представляет прямую, содержащую ребро ОДР. Например, при x_3=0 первое ограничение принимает вид:

$$3x_1+4x_2=1700$$

и соответствует ребру CD (см. рис.4.1). При x_4=0 второе ограничение принимает вид равенства $2x_1+5x_2=1600$ и представляет ребро BC допустимой области. Таким образом, для точки C, удовлетворяющей двум равенствам

$$3x_1+4x_2=1700,$$
$$2x_1+5x_2=1600,$$

переменные x_3=0 и x_4=0.

Рассмотрев геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования приведем несколько утверждений, определяющих свойства задач линейного программирования при любых значениях числа переменных n и числа ограничений m ($m<n$).

Утверждение 1

Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.

Утверждение 2

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное (минимальное) значение более чем в одной угловой точке, то она принимает его на ребре (грани) многогранника решений.

Утверждение 3

Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка многогранника решений, и наоборот, каждой угловой точке многогранника решений соответствует допустимое базисное решение.

6. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Для нахождения решения задачи линейного программирования в общем случае (при произвольном числе свободных переменных) применяются не геометрические, а вычислительные методы. Наиболее универсальным является так называемый с и м п л е к с -м е т о д.

Изложим идею симплекс-метода. Пусть в задаче линейного программирования имеется n переменных и m независимых линейных ограничений, заданных в форме уравнений. Оптимальное решение (если оно существует) достигается в одной из опорных точек (вершин ОДР), где по крайней мере $k = n - m$ из переменных равны нулю. Выберем какие-то k переменных в качестве свободных и выразим через них остальные m базисных переменных. Пусть, например, в качестве свободных выбраны первые k переменных x_1, x_2, ... x_k, а остальные m выражены через них:

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,k}x_k + b_{k+1} \\ x_{k+2} = a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,k}x_k + b_{k+2} \\ \vdots \\ x_n = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,k}x_k + b_n. \end{cases} \qquad (6.1)$$

Положим все свободные переменные $x_1, x_2, \ldots x_k$ равными нулю: $x_1=0, x_2=0, \ldots x_k=0$.

При этом базисные переменные примут следующие значения:

$x_{k+1} = b_{k+1}$, $x_{k+2} = b_{k+2}, \ldots, x_n=b_n$.

Полученное решение допустимо, если все свободные члены b_{k+1}, $b_{k+2}, \ldots$, b_n неотрицательны. Предположим, что это условие выполнено. Тогда мы получили допустимое базисное решение. Чтобы проверить, является ли это решение оптимальным, выразим максимизируемую линейную функцию f через свободные переменные $x_1, x_2, \ldots x_k$:

$$f= c_0+c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_kx_k \qquad (6.2)$$

Очевидно, что при $x_1 =x_2 = \ldots =x_k = 0$, $f = c_0$.

Если все коэффициенты c_1, $c_2,\ldots$, c_n в формуле (6.2) отрицательны, то получено оптимальное решение, поскольку увеличивая любую из свободных переменных $x_1, x_2, \ldots x_k$ мы будем только уменьшать значение целевой функции, что не соответствует нашей цели. Если же среди коэффициентов в формуле (6.2) есть положительные, то, увеличивая некоторые из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а именно — те, коэффициенты при которых положительны, мы можем улучшить решение, т. е. увеличить f.

Пусть, например, коэффициент c_1 в формуле (6.2) положителен. Следовательно, стоит увеличить x_1, т. е. перейти от данного допустимого базисного решения к другому, в котором переменная x_1 не равна нулю, а вместо нее равна нулю какая-то другая переменная. Увеличение x_1 приводит к увеличению целевой функции f, но от x_1 зависят базисные переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$. Если переменная x_1 входит в уравнение для какой-либо базисной переменной с положительным коэффициентом, то увеличение x_1 не сделает эту базисную переменную отрицательной. Если же переменная x_1 имеет отрицательный коэффициент в выражении базисной переменной, то увеличение x_1 может привести к тому, что соответствующая базисная переменная станет отрицательной.

Увеличивать x_1 можно только до тех пор, пока не станет равной нулю одна из базисных переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$. Пусть переменная x_1 имеет отрицательный коэффициент a_{p1} в выражении какой-либо из базисных переменных x_p:

$$x_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pk}x_k + b_p.$$

Учитывая, что свободный член $b_p \geq 0$ и $x_2 = \ldots =x_k = 0$, переменную x_1 можно увеличивать только до значения, равного — b_p/a_{p1}.

Выберем ту из переменных $x_{k+1}, \ldots x_n$, которая раньше всех обратится в нуль при увеличении x_1, т. е. ту, для которой величина — b_p/a_{p1} меньше всего. Пусть это будет переменная x_r.

Далее следует вывести из числа свободных переменную x_l и перевести ее в базисные переменные, а вместо x_l ввести в состав свободных переменную x_r. Таким образом, образуется новый набор базисных и свободных переменных, при котором происходит увеличение целевой функции. Выразив новый состав базисных переменных через свободные получим очередное допустимое базисное решение.

Чтобы определить, является ли полученное решение оптимальным, следует проанализировать целевую функцию, выраженную через новый набор свободных переменных. Если все коэффициенты при переменных в полученной формуле отрицательны, то оптимальное решение найдено, поскольку увеличение любой свободной переменной приведет к ухудшению целевой функции. Если среди коэффициентов при свободных переменных есть положительные, то необходимо продолжить процедуру улучшения решения.

Проследим описанную процедуру постепенного улучшения решения ОЗЛП на конкретном примере. Рассмотрим задачу 4.1 из раздела 4.

Напомним, что в каноническом виде задача выглядит следующим образом:

Максимизировать функцию

$$f = 2x_1 + 4x_2 \tag{6.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=1700; \\ 2x_1+5x_2+x_4=1600; \\ x_1+x_5=500; \\ -x_1+x_2+x_6=100; \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0; \\ x_4\ge 0;\ x_5\ge 0;\ x_6\ge 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Нетрудно убедиться, что система (6.4) совместна. Ее ранг r=4, значит, число свободных неизвестных k=6—4=2. В качестве свободных переменных выберем x_1 и x_2. Базисные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6 (каждая из базисных переменных входит в одно из уравнений с коэффициентом 1, а в остальные уравнения с коэффициентом 0). Выразив базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные получим:

$$\begin{cases} x_3 = 1700 - 3x_1 - 4x_2; \\ x_4 = 1600 - 2x_1 - 5x_2; \\ x_5 = 500 - x_1; \\ x_6 = 100 + x_1 - x_2. \end{cases} \tag{6.5}$$

$$f = 2x_1 + 4x_2. \tag{6.6}$$

При x_1=0 и x_2 =0 базисные переменные принимают следующие значения: x_3=1700, x_4=1600, x_5=500, x_6=100.

Все базисные переменные неотрицательны (положительны), следовательно получено допустимое базисное решение. Это решение соответствует точке О на рисунке 4.1.

При найденном решении целевая функция имеет значение f=0.

Мы приняли в качестве свободных переменных x_1 и x_2 , но этот выбор, вообще говоря, ничем не оправдан. Посмотрим, нельзя ли за счет увеличения значений x_1 или x_2 улучшить значение целевой функции. Из выражения (6.6) видно, что увеличивая значение любой из свободных переменных, можно увеличить значение целевой функции. Будем увеличивать переменную x_2, переменную x_1 оставим пока свободной.

Переменную x_2 нельзя увеличивать неограниченно, т.к. увеличение x_2 вызовет соответствующие изменения базисных переменных. Эти изменения могут оказаться такими, что базисные переменные станут отрицательными, т.е. мы придем к недопустимым решениям. Если принять x_2>100, то переменная x_6 станет отрицательной (x_3, x_4, x_5 останутся положительными). Таким образом, следует придать x_2 значение 100 (x_2=100). При x_2=100 и x_1=0 получаем новое допустимое базисное решение:

$$\mathbf{x}=(x_1=0, x_2=100, x_3=1300, x_4=1100, x_5=500, x_6=0).$$

Целевая функция f=400; это решение соответствует точке А (см. рис. 4.1).

Сравним два решения. В каждом из них по две переменные имеют нулевые значения: x_1, x_2 и x_1, x_6 . Мы перешли из точки О в точку А с увеличением значения целевой функции.

Итак, теперь свободные переменные x_1 и x_6. Выразим базисные переменные x_2, x_3, x_4, x_5 и целевую функцию f через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_2 = 100 + x_1 - x_6; \\ x_3 = 1300 - 7x_1 + 4x_6; \\ x_4 = 1100 - 7x_1 + 5x_6; \\ x_5 = 500 - x_1. \end{cases} \qquad (6.7)$$

$$f = 400 + 6x_1 - 4x_6. \qquad (6.8)$$

Проанализируем выражение (6.8) целевой функции. Увеличение переменной x_6 вызовет уменьшение функции F , увеличение переменной x_1 позволит увеличить целевую функцию. Следовательно, имеет смысл увеличить переменную x_1 .

Анализ системы ограничений (6.7) позволяет сделать следующие заключения: переменная x_2 нечувствительна к увеличению переменной x_1 , т.к. переменная x_1 имеет положительный коэффициент (+1) в выражении для x_2; базисная переменная x_3 обращается в нуль при x_1 = 1300/7; x_4 становится равной нулю при x_1 = 1100/7, а x_5 = 0 при x_1 = 500. Среди значений 1300/7, 1100/7, 500 необходимо выбрать наименьшее значение с тем, чтобы вновь получаемое решение оставалось допустимым. Увеличим x_1 до значения $1100/7=157\frac{1}{7}$, тогда x_4 станет равной нулю (x_4 = 0), а остальные базисные переменные останутся положительными. Таким образом, получим новый набор базисных и свободных переменных. Свободные: x_4 и x_6 . Базисные: x_1 , x_2 , x_3 , x_5 .

Выразим базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = 157\frac{1}{7} + \frac{5}{7}x_6 - \frac{x_4}{7}; \\ x_2 = 257\frac{1}{7} - \frac{2}{7}x_6 - \frac{x_4}{7}; \\ x_3 = 200 - x_6 + x_4; \\ x_5 = 342\frac{6}{7} - \frac{5}{7}x_6 + \frac{x_4}{7}. \end{cases} \qquad (6.9)$$

$$f = 1342\frac{6}{7} + \frac{2}{7}x_6 - \frac{6}{7}x_4. \qquad (6.10)$$

Новое допустимое базисное решение:

$\boldsymbol{x}$=(x_1= $157\frac{1}{7}$, x_2=$257\frac{1}{7}$, x_3=200, x_4=0, x_5= $342\frac{6}{7}$, x_6=0) соответствует точке В на рисунке 4.1. Значение целевой функции $f = 1342\frac{6}{7}$ увеличилось по сравнению с предыдущей точкой.

Анализ выражения целевой функции (6.10) позволяет сделать следующие выводы: увеличение переменной x_4 приводит к уменьшению значения целевой функции, увеличение переменной x_6 дает возможность увеличить значение F. Следовательно, будем увеличивать переменную x_6 . Переменную x_6 можно увеличивать до значения 200, при $x_6 = 200$ переменная x_3 обращается в ноль и переходит из базисных в свободные. Таким образом, базисными переменными становятся x_1, x_2, x_5, x_6, а свободными − x_3 и x_4 . Выразив базисные переменные и целевую функцию F через свободные переменные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 300 - \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4; \\ x_2 = 200 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4; \\ x_5 = 200 + \frac{5}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4; \\ x_6 = 200 - x_3 + x_4; \end{cases} \qquad (6.11)$$

$$f = 1400 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4. \qquad (6.12)$$

Новое допустимое базисное решение:

$\boldsymbol{x}$=(x_1= 300, x_2=200, x_3=0, x_4= 0, x_5=200, x_6= 200) соответствует точке С на рисунке 4.1.

Свободные неизвестные входят в выражение (6.12) для целевой функции F с отрицательными коэффициентами. Если их увеличивать, то функция F будет уменьшаться. Следовательно, полученное базисное решение и является оптимальным: наибольшее значение функции $f = 1400$.

7. Алгоритм симплекс-метода

Симплекс-метод заключается в переходе от одного допустимого базисного решения к другому, причем каждое следующее решение улучшает значение целевой функции.

Прежде чем применять симплекс-метод к общей задаче линейного программирования, задачу следует привести к каноническому виду.

Симплекс-метод включает два этапа:

1) определение начального базисного решения;
2) последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи.

Система (3.2) содержит m линейно независимых уравнений, и их число меньше числа неизвестных, входящих в систему, следовательно, систему (3.2.) можно разрешить относительно m неизвестных, например x_1, x_2,… x_m, выразив их через остальные неизвестные

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

(коэффициенты a_{ij}, b_i, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ в полученной системе, естественно, отличны от коэффициентов системы (3.2.), но для простоты обозначены той же буквой).

После указанных преобразований задача (3.1) – (3.2) запишется в следующем виде:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{7.2}$$

Форма записи (7.1) – (7.2) называется стандартной.

Алгоритм решения системы (7.1) – (7.2) симплекс-методом

Шаг 1. Получение начального решения.

1-й способ

Начальное базисное решение в симплекс-методе определяется по следующему правилу: за начальные базисные переменные берутся те m переменных, которые входят в одно из уравнений системы ограничений с коэффициентом 1, а в остальные с коэффициентом 0.

Такой ситуации можно добиться, используя преобразования Гаусса-Жордана, приводя систему (3.2) к виду (7.2).

Остальные $n - m$ переменные объявляют свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные равны правым частям соответствующих ограничений системы (7.2).

Пусть m базисных переменных – это переменные x_1, x_2, …, x_m (в противном случае переменные всегда можно перенумеровать). Тогда начальное решение X_0 имеет следующий вид:

$X_0 = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0\}$.

Если все $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 2.

2-й способ

В случае, когда нет «очевидных» базисных переменных, задачу (3.1)-(3.2), следует записать в расширенной форме и применить метод искусственного базиса, изложенный в разделе 8.

Шаг 2. выражение функции f только через свободные переменные.

$$f = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j .$$

(значение коэффициентов c_j, j = $\overline{m+1,n}$, естественно отличаются от значений коэффициентов в формуле (7.1), но для простоты обозначены той же буквой).

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Составляется симплекс-таблица (табл. 4).

Таблица 4

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных								Свободные члены b_i	θ
	x_1	x_2	…	x_m	…	x_p	…	x_n		
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	…	a_{1p}	…	a_{1n}	b_1	
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	…	a_{2p}	…	a_{2n}	b_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_q	a_{q1}	a_{q2}	…	a_{qm}	…	a_{qp}	…	a_{qn}	b_q	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mm}	…	a_{mp}	…	a_{mn}	b_m	
f	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	…	$-c_p$	…	$-c_n$	0	

В левой колонке симплекс-таблицы находятся базисные переменные, в колонке свободных членов – правые части соответствующих ограничений. В i-й строке, j-м столбце стоит коэффициент при j-й переменной в i-м ограничении (7.2), $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. В последней строке ($f$ – строке) стоит коэффициент с противоположным знаком при j-й переменной в целевой функции f. В предпоследнем столбце последней строки стоит значение свободного члена, входящего в целевую функцию.

Для проверки решения на оптимальность просматривается последняя f-строка. Если коэффициенты, стоящие при свободных переменных, неотрицательны, то полученное решение оптимально. Полученное решение единственно, если все эти коэффициенты положительны. Если среди неотрицательных коэффициентов, соответствующие свободным переменным, встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений. Если в последней строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а в соответствующем этому коэффициенту столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция f не ограничена на области допустимых решений. Если хотя бы один из коэффициентов, стоящих при свободных переменных, отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено. Переход к шагу 4.

Шаг 4. Получение нового решения.

Шаг 4.1. Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Просматривается последняя строка симплекс-таблицы. Среди элементов этой строки выбирается максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Столбец, в котором стоит этот элемент, называется **разрешающим**. Пусть, например, это p-й столбец. Переменная x_p, стоящая в этом столбце, вводится в список базисных переменных.

Шаг 4.2. Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Находят отношение элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца. При делении на отрицательный элемент и 0 результат полагают равным $+\infty$. Результаты записывают в последний столбец симплекс-таблицы. Среди этих отношений находят минимальное. Строка, соответствующая минимальному отношению, называется **разрешающей.** Пусть, например, это q-я строка. Базисная переменная x_q, стоящая в этой строке, выводится из списка базисных переменных. Элемент симплекс-таблицы a_{qp}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется **разрешающим** элементом.

Шаг 4.3. выполнение симплекс-преобразования и переход к новой симплекс-таблице.

Элемент a_{ij} новой симплекс-таблицы вычисляется с помощью следующего симплекс-преобразования:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{qj} / a_{qp}, i = q; & (7.3) \\ a_{ij} - a_{ip} a_{qj} / a_{qp}, i \neq q; & (7.4) \\ i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n+1}; \\ a_{m+1\,j} = -c_j; \\ a_{in+1} = b_j. \end{cases}$$

Таким образом, при переходе к новой симплекс-таблице все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент в соответствии с (7.3), а все остальные элементы симплекс-таблицы, включая коэффициенты целевой функции и свободные члены, пересчитываются по формуле (7.4).

Новое решение имеет следующий вид: все свободные переменные в нем полагаются равными 0, а все базисные переменные – свободным членам, стоящим в одной строке с ними.

После построения новой симплекс-таблицы следует перейти к шагу 3.

Последовательное выполнение вычислений шагов 3, 4 составляет одну итерацию симплекс-метода. Итерации повторяются до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или установлено отсутствие решения задачи.

Поясним на примере задачи 4.1, рассмотренной в разделах 4 и 6 шаги алгоритма симплекс-метода.

Максимизировать функцию

$$f= 2x_1+4x_2.$$

При ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+ x_3=1700; \\ 2x_1+5x_2+ x_4=1600; \\ x_1+ x_5=500; \\ -x_1+x_2+ x_6=100; \\ x_1\geq 0;\ x_2\geq 0;\ x_3\geq 0; \\ x_4\geq 0;\ x_5\geq 0;\ x_6\geq 0. \end{cases}$$

Решение

Шаг 1. Получение начального решения.

Базисные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6.

Свободные переменные: x_1, x_2.

Начальное решение:

$$\boldsymbol{x}_0 = \{x_1 = 0;\quad x_2 = 0;\quad x_3 = 1700;\quad x_4 = 1600;\quad x_5 = 500;\quad x_6 = 100\}.$$

Шаг 2. Функция $f= 2x_1+4x_2$ уже выражена через свободные переменные.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность. Составляем симплекс-таблицу (таблица 5).

Таблица 5

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены b_i	θ_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	3	4	1	0	0	0	1700	
x_4	2	5	0	1	0	0	1600	
x_5	1	0	0	0	1	0	500	
x_6	-1	1	0	0	0	1	100	
f	-2	-4	0	0	0	0	0	

Решение неоптимально, так как последняя строка содержит отрицательные числа.

Шаг 4. Получение нового решения.

Максимальное по абсолютной величине отрицательное число последней строки – это –4; следовательно, второй столбец является разрешающим, и переменная x_2 вводится в список базисных переменных. Определим переменную, выводимую из списка базисных переменных. Для этого подчитаем величины θ_i, равные отношениям элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца:

$\theta_1 = b_1 / a_{12} = 1700/4$; $\theta_2 = b_2 / a_{22} = 1600/5$; $\theta_4 = b_4 / a_{42} = 100/1$

и выберем среди них минимальное.

$$\min\left\{\frac{1700}{4};\frac{1600}{5};\frac{100}{1}\right\} = 100.$$

Следует помнить, что θ_i не вычисляется для $a_{i\,j} \le 0$.

В таблице 6 приведены результаты вычислений.

Таблица 6

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены b_i	θ_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	3	4	1	0	0	0	1700	$\frac{1700}{4}$
x_4	2	5	0	1	0	0	1600	$\frac{1600}{5}$
x_5	1	0	0	0	1	0	500	∞
x_6	-1	1	0	0	0	1	100	100
f	-2	-4	0	0	0	0	0	

Разрешающая строка определяется по номеру наименьшего числа θ_i и указывает, какая базисная переменная переходит в свободные.

Четвертая строка является разрешающей, и переменная x_6 должна быть выведена из списка базисных переменных. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент $a_{4\,2} = 1$.

Для новых базисных переменных составим новую симплекс-таблицу 7.3, которая получается из предыдущей таблицы. Вместо базисной переменной x_6 включена новая переменная x_2 . В соответствии с формулой (7.3) элементы разрешающей строки, включая свободный член, разделим на разрешающий элемент и результат запишем в новой симплекс-таблице. Далее преобразуем остальные строки таблицы в соответствии с формулой (7.4): новая строка получается, если из старой строки вычесть преобразованную разрешающую строку, умноженную на число, находящееся на пересечении старой строки и разрешающего столбца.

Новая симплекс-таблица имеет следующий вид (табл 7):

Таблица 7

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены b_i	θ_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	7	0	1	0	0	-4	1300	$\frac{1300}{7}$
x_4	7	0	0	1	0	-5	1100	$\frac{1100}{7}$

Окончание таблицы 7

x_5	1	0	0	0	1	0	500	$\frac{500}{1}$
x_2	-1	1	0	0	0	1	100	∞
f	-6	0	0	0	0	4	400	

Новое решение имеет вид

$$\boldsymbol{x}_1 = \{x_1 = 0;\ \ x_2 = 100;\ \ x_3 = 1300;\ \ x_4 = 1100;\ \ x_5 = 500;\ \ x_6 = 0\}.$$

$$f = 400.$$

Таким образом, прибыль увеличилась на 400 усл. ед.

Это решение неоптимально, так как последняя строка содержит отрицательное число.

Продолжаем оптимизацию.

Разрешающий столбец – первый, так как ему соответствует отрицательное число – 6.

Заполним θ – столбец

θ_1=1300/7; θ_2= 1100/7; θ_3=500/1

$$\min\left\{\frac{1300}{7};\frac{1100}{7};\frac{500}{1}\right\} = 1100/7.$$

Следовательно, вторая строка является разрешающей.

Разрешающий элемент: $a_{21} = 7$.

Перейдем к новой симплекс-таблице (табл. 8).

Таблица 8

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены b_i	θ_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_3	0	0	1	-1	0	1	200	200
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{1100}{7}$	∞
x_5	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{2400}{7}$	1200
x_2	0	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1800}{7}$	800
f	0	0	0	$\frac{6}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{9400}{7}$	

α

$$\boldsymbol{x}_2 = \left\{x_1 = \frac{1100}{7};\ x_2 = \frac{1800}{7};\ \ x_3 = 200;\ x_4 = 0;\ x_5 = \frac{2400}{7};\ x_6 = 0\right\}.$$

$$f = \frac{9400}{7} = 1342\frac{6}{7}.$$

Прибыль выросла, но решение $\boldsymbol{x}_2$ неоптимально, так как в последней строке еще осталось отрицательное число.

Получим новое решение.

Разрешающий столбец – шестой, следовательно, переменная x_6 вводится в список базисных переменных.

$$\min\{200;1200;800\} = 200.$$

Разрешающая строка – первая, и переменная x_3 выводится из списка базисных переменных.

Новая симплекс-таблица имеет следующий вид (табл. 9):

Таблица 9

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены b_i	θ_i
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_6	0	0	1	-1	0	1	200	
x_1	1	0	$\frac{5}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	0	300	
x_5	0	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	0	200	
x_2	0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	0	200	
f	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	0	1400	

Последнее решение является оптимальным, поскольку все числа, стоящие в последней строке, неотрицательны. Это решение единственно, так как все элементы последней строки, соответствующие свободным переменным x_3, x_4, строго положительны.

$$\boldsymbol{x}^* = \{x_1 = 300;\ \ x_2 = 200;\ \ x_3 = 0;\ \ x_4 = 0;\ \ x_5 = 200;\ \ x_6 = 200\}.$$

$$f = 1400$$

8. Методы искусственного базиса

Во многих практических задачах линейного программирования невозможно указать начальное допустимое базисное решение без предварительного преобразования системы ограничений.

Например, если исходное ограничение имеет знак ≥, то для преобразования к каноническому виду необходимо ввести в левую часть ограничения дополнительную переменную со знаком минус (- x) и возможна ситуация, когда в преобразованном выражении не будет «очевидной» начальной базисной переменной.

Покажем это на примере:

максимизировать

$f(x)= x_1-x_2$ (8.1)

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (8.2)$$

В канонической форме задача (8.1), (8.2) записывается следующим образом:
максимизировать

$$f(x) = x_1 - x_2 \qquad (8.3)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \qquad (8.4)$$

Система ограничений содержит два линейно независимых уравнения с четырьмя неизвестными, следовательно, необходимо выбрать две базисные и две свободные переменные.

Переменная x_4 входит во второе уравнение с коэффициентом 1, а в первое уравнение с коэффициентом 0 и может быть выбрана в качестве базисной. Вторую базисную переменную сразу выбрать не удается.

В подобных ситуациях, когда нельзя выделить базисные переменные, возможны следующие варианты поиска начального допустимого базисного решения.

1. Объявляем m любых переменных базисными и, преобразуя систему ограничений, выражаем базисные переменные через свободные. В этом случае полученное базисное решение, возможно, будет недопустимым, и тогда придется выбирать новый набор базисных переменных и повторять процедуру до получения допустимого базисного решения.

2. Преобразуем задачу, добавив в левую часть каждого из ограничений, не имеющих «очевидных» базисных переменных по одной неотрицательной искусственной переменной.

Искусственные переменные обеспечивают получение начального базиса, но не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, поэтому их введение допустимо только в том случае, если схема вычислений будет обеспечивать получение оптимального решения, в котором все искусственные переменные окажутся равными нулю.

Разработаны два метода получения начального базисного решения:

1. М-метод или метод больших штрафов.
2. Двухэтапный метод.

М – метод

За использование искусственных переменных на целевую функцию можно наложить штраф, вводя искусственные переменные в состав целевой функции с достаточно большим по абсолютной величине коэффициентом М.

В общем случае расширенная задача, называемая также М-задачей, формулируется следующим образом:

Максимизировать

$$f^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+k}. \qquad (8.5)$$

При ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m; \\ x_j \ge 0, j = \overline{1, n+k}, \end{cases} \qquad (8.6)$$

где М – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается.

Переменные $x_{n+1},.., x_{n+m}$ называются искусственными.

Если в оптимальном плане расширенной задачи (8.5), (8.6) все искусственные переменные равны нулю, то полученное оптимальное решение является решением исходной задачи.

Если в оптимальном плане расширенной задачи (8.5), (8.6) хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, но исходная задача не имеет решения.

Рассмотрим в качестве примера линейную модель (8.3), (8.4).

Поскольку в первом уравнении нет базисных переменных, то перейдем к М-задаче. Для этого введем искусственную переменную x_5 и добавим ее в первое уравнение и к целевой функции с коэффициентом – М.

В результате получим задачу в расширенной форме:

$$f(x) = x_1 - x_2 - Mx_5 \to \max; \qquad (8.7)$$

$$\begin{cases} -1x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_4 + 0x_5 = 18; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; \\ x_4 \ge 0; \quad x_5 \ge 0. \end{cases} \qquad (8.8)$$

Поскольку необходимо получить максимум целевой функции, а переменной x_5 приписать большой по величине отрицательный коэффициент – М, то метод оптимизации, направленный на нахождение максимального значения $f(x)$, приведет к тому, что переменная x_5 в оптимальном решении обратится в ноль.

Будем решать задачу симплекс-методом.

Базисными переменными являются x_4 и x_5; свободными x_1, x_2, x_3.

Представим целевую функцию как функцию, зависящую от свободных переменных.

Из первого ограничения выразим x_5

$$x_5=6+x_1-2x_2+x_3 \qquad (8.9)$$

Подставив (8.9) в выражение для целевой функции $f(x)$, получим:

$f(x)$=-6M+x_1(1-M)+ x_2(2M-1)-Mx_3.

Заполним первую симплекс-таблицу.

Таблица 10

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_5	-1	$\boxed{2}$	-1	0	1	6	3
x_4	3	2	0	1	0	18	9
f	M-1	1-2M	M	0	0	-6M	

Начальное допустимое базисное решение.

$\boldsymbol{x_0}$=(x_1=0; x_2=0; x_3=0; x_4=18; x_5=6)

Значение целевой функции f=-6M

Проанализируем f-строку; коэффициент при переменной x_2 отрицательный, т.к. M – это большое число.

Следовательно, полученное решение не является оптимальным, свободная переменная x_2 должна быть введена в число базисных.

Далее найдем величины θ_i

$$\theta_1=\frac{b_1}{a_{12}}=\frac{6}{2}=3;$$

$$\theta_2=\frac{b_2}{a_{22}}=\frac{18}{2}=9;$$

Разрешающую строку определим по номеру наименьшего числа θ_i. Из числа базисных должна быть удалена переменная x_5.

Разрешающий элемент равен 2.

Переходим к новой симплекс-таблице.

Таблица 11

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	∞
x_4	$\boxed{4}$	0	1	1	-1	12	3
f	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$+M	-3	

Получено новое допустимое базисное решение

$\boldsymbol{x_1}$=(x_1=0; x_2=3; x_3=0; x_4=12; x_5=0)

Значение целевой функции

$f(x)$=-3

Проверим решение на оптимальность. Поскольку в f-строке присутствует отрицательный коэффициент ($-\frac{1}{2}$), решение не оптимальное.

Переходим к новой симплекс-таблице (табл. 8.3), выводя из базисных переменную x_4 и вводя в базис переменную x_1.

Таблица 12

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_2	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	4,5	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	3	
f	0	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$M-\frac{5}{8}$	-1,5	

Полученное решение

x_2=(x_1=3; x_2=4,5; x_3=0; x_4=0; x_5=0) является оптимальным, т.к. все коэффициенты в f-строке неотрицательны. Значение целевой функции f= -1,5. Задача решена.

Двухэтапный метод

Рассмотрим *вспомогательную* задачу:

$$\tilde{f} = -x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m} \end{cases}$$

Теперь к вспомогательной задаче можно применить симплекс-метод и найти ее решение.

Вспомогательная задача всегда разрешима. При этом $\max \tilde{f} \leq 0$. Если $\max \tilde{f} = 0$ и достигается на плане $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \ldots, \tilde{x}_{n+m})$, то вектор $x = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ является допустимым базисным решением исходной задачи. Если $\max \tilde{f} < 0$, то система ограничений исходной задачи несовместна.

Продолжая итерации симплекс-метода для модифицированной последней симплекс-таблицы вспомогательной задачи, найдем решение исходной задачи. Модификация симплекс-таблицы состоит в удалении искусственных переменных и замене коэффициентов целевой функции вспомогательной задачи на соответствующие коэффициенты исходной целевой функции.

Решим задачу (8.3) – (8.4) с помощью двухэтапного метода.

Вспомогательная задача имеет следующий вид:

$$\tilde{f} = -x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0; \\ x_4 \ge 0; x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Применим к вспомогательной задаче симплекс-метод, предварительно выразив целевую функцию $\tilde{f}$ через свободные переменные x_1, x_2, x_3

$\tilde{f} = -6 - x_1 + 2x_2 - x_3$ и заполним первую симплекс-таблицу (табл. 8.4).

Таблица 13

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_5	-1	$\boxed{2}$	-1	0	1	6	3
x_4	3	2	0	1	0	18	9
f	1	-2	1	0	0	-6	

Поскольку полученное решение $\mathbf{x}$=(x_1=0; x_2=0; x_3=0; x_4=18; x_5=6) неоптимально, вводим в базис переменную x_2, выводим из базиса переменную x_5 и переходим к новой симплекс-таблице (табл. 8.5).

Таблица 14

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
x_4	4	0	1	1	-1	12	
f	0	0	0	0	1	0	

В полученном решении все коэффициенты в f-строке неотрицательны, значение целевой функции f=0, искусственная переменная x_5 является свободной, следовательно, вспомогательная задача решена.

Модифицируем симплекс-таблицу 8.5, удаляя свободную переменную и заменяя коэффициенты целевой функции вспомогательной задачи на соответствующие коэффициенты исходной целевой функции (8.3), выраженной через свободные переменные x_1, x_3

$$f = x_1 - x_2 = -3 + \frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{2}$$

В результате модификации получаем таблицу 15

Таблица 15

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	θ_i
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	3	∞
x_4	4	0	1	1	2	3
f	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	-3	

Поскольку в f-строке присутствует отрицательный коэффициент, решение не является оптимальным. Переходим к новой симплекс-таблице (табл. 16), вводя в базисные переменную x_1, и выводя из базисных переменную x_4.

Таблица 16

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	θ_i
x_2	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	4,5	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3	
f	0	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	-1,5	

Полученное решение $\boldsymbol{x}=(x_1=3;\ x_2=4{,}5;\ x_3=0;\ x_4=0)$ является оптимальным. Значение целевой функции $f=-1{,}5$.

9. Варианты задач

Вариант 1

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -5x_1 - 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ x_1 \le 3{,}5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -4x_1 - 6x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \ge -4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 6

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 40, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -3x_1 - 15x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 17, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 14, \\ 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -x_1 - 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -2x_1 + x_2 \ge -10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \ge -24, \\ x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 6x_1 - 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 11

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1+3x_2\to\max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -5x_1-6x_2\to\min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 10x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 12

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1+5x_2\to\max$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 17, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 34, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -4x_1-x_2\to\min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4x_1 - 2x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 13

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -3x_1- x_2\to\min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \geq -24, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

.

Вариант 14

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -4x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ -x_2 \geq -4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 15

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 3x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \geq -17, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 34, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 16

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -5x_1 - 6x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 15x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 3x_2 \ge -3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 17

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -4x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \le 16, \\ -x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 18

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 2x_1 - 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \ge -20, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 19

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -5x_1 - 4x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 48, \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -5x_2 \ge -6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 20

1. Решить графическим методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \le 14, \\ 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования:

$$z = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -2x_1 + x_2 \ge -8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972.

2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2002. – 544с.

3. Таха Х. Введение в исследование операций. – М.: Мир, 1985.

4. Тюлюкин В.А. Исследование операций. – Екатеринбург: УрГЭУ, 2002.

5. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. – М.: БЕК, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Котликова Вера Яковлевна

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Методические указания
к проведению лабораторных занятий
для студентов направления 280000
специальности 280101

Редактор Т.В. Тимофеева

…………………………………………………………………………………

Подписано к печати	Формат 60*84 1/16.	Бумага типа N1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 3,0	Уч. – изд. л. 3,0
Заказ	Тираж: *Эл.вариант*	Цена свободная

………………………………………………………………………………….

РИЦ Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.