МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курганский государственный университет»

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

МАТЕМАТИКА

Контрольные задания для студентов первого курса заочного отделения
факультета ПВС направления 030300.62 «Психология»

Курган 2013

Кафедра алгебры, геометрии и методики преподавания математики

Дисциплина: «Математика» (направление 030300.62 «Психология»)

Составил: старший преподаватель С.М. Коростелева

Утверждены на заседании кафедры «1» ноября 2012 г.

Рекомендованы методическим советом университета «14» декабря 2012 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

1. Теоретическая справка 5

1.1 Элементы теории множеств 5

1.2 Элементы математической логики 7

1.3 Элементы теории функций многих переменных.

Метод наименьших квадратов 13

1.4 Элементы теории вероятностей 14

1.5 Элементы математической статистики 18

2. Примеры расчетных задач 26

2.1 Задача № 1 26

2.2 Задача № 2 26

2.3 Задача № 3 27

2.4 Задача № 4 28

2.5 Задача № 5 29

3. Контрольная работа 31

4. Вопросы к экзамену 41

5. Тестовые задания на проверку теоретических знаний 42

6. Темы рефератов 46

Список литературы 48

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено студентам заочного отделения, изучающим курс «Математика» и обучающимся по направлению 030300.62 «Психология».

Пособие включает в себя краткую теоретическую справку по основным разделам математики: элементы теории множеств, математической логики, теории функций нескольких переменных, теории вероятностей и математической статистики, что соответствует требованиям ГОС ВПО.

Приведенные справочные материалы содержат не только основные теоретические факты, но и примеры задач по всем основным разделам. Поэтому перед выполнением заданий контрольной работы необходимо изучить приведенные материалы. Более подробно изучить материал можно, воспользовавшись учебниками из списка основной литературы, который находится в конце методического пособия.

Также в пособии содержатся варианты контрольных заданий и образцы их выполнения. Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки студента. Правильное выполнение всех заданий контрольной работы и ее защита (решение аналогичной задачи из любого раздела на выбор студента) соответствует выполнению минимума требований, предъявляемых к студенту по успешному усвоению предмета, т.е. оценке «удовлетворительно».

Для получения более высокого балла студент может написать реферат или ответить на вопросы билета. Тему реферата студент может предложить сам или выбрать из числа предложенных в методическом пособии. При подготовке реферата можно воспользоваться книгами из списка дополнительной литературы, интернет-ресурсами. Защита реферата проходит во время экзамена. Это заменяет или дополняет ответ на экзаменационный билет. Билеты составлены в виде тестов. В методическом пособии имеется перечень экзаменационных вопросов и примеры тестовых заданий для проверки теоретических знаний по предмету.

1. Теоретическая справка

1.1. Элементы теории множеств

Основоположником теории множеств принято считать Г. Кантора, который в 1872 году ввел понятие «множество».

Множеством называется группа, совокупность, класс и т.д. некоторых объектов, собранных вместе по некоторому правилу или закону. Объекты, входящие во множество, называются его **элементами**. Общее свойство элементов множеств – **характеристическое свойство.**

A; B; C;.. – множества

a; в; c; ... или a_1; a_2; a_3; … – элементы множества

Множество можно задать или простым перечислением его элементов (конечные множества с небольшим количеством элементов), или через характеристическое свойство.

A = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}

A = {a| a ∈ [0;9], a ∈ Z}

Виды множеств:

1. Конечные множества (элементы которых можно пересчитать).
2. Бесконечные множества (элементы которых нельзя пересчитать).
3. Пустые множества (не содержат ни одного элемента).
4. Числовые множества (элементы – числа).

N (натуральные числа) 1, 2, 3,…

N⊂ Z⊂ Q; J⊂ R⊂ C

Z (целые числа): ..,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..

Q (рациональные): $\{p/q \mid p \in Z, q \in N\}$

J (иррациональные): $\pi, e, \sqrt{2}$

R (действительные): все точки координатной прямой

C (комплексные): все точки координатной плоскости

[a; b] = {x| a≤x≤b}

[a; b) = {x| a≤x<b}

(a; b] = {x| a<x≤b}

(a; b) = {x| a<x<b}

[a; ∞) = {x|x≥a}

(a; ∞) = {x| x> a}

(-∞; b) = {x| x<b}

5. Подмножества (множество A называется подмножеством множества B, если все элементы A принадлежат B): A⊂ B ⇔ ∀ a∈ A, a∈ B.

6. Равные множества (состоят из одних и тех же элементов).

ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1. **Пересечение**

Пересечением двух множеств называется такое новое множество, элементы которого принадлежат одновременно каждому из данных множеств.

A∩B = C = {c| c∈A, c ∈B}

Пересечение – общая часть множеств.

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $A \cap B = \{2; 4\}$.

Для наглядной иллюстрации операций над множествами используют диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1).

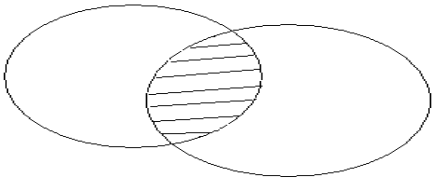


Рис. 1. Пересечение множеств

2. Объединение

Объединением двух множеств называется такое новое множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из данных множеств (рис. 2).

$A \cup B = C = \{c|\ c \in A$ или $c \in B\}$

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$

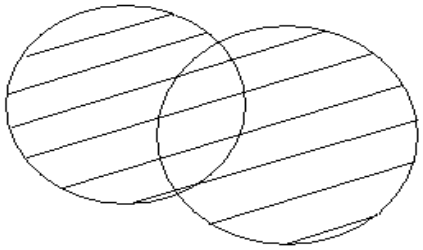


Рис. 2. Объединение множеств

3. Разность (вычитание)

Разностью двух множеств называется такое новое множество, элементы которого принадлежат первому множеству и не принадлежат второму (рис. 3).

$A \backslash B = C = \{c|\ c \in A$ и $c \notin B\}$

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $A \backslash B = \{1; 3; 5\}$; $B \backslash A = \{0; 6; 8\}$

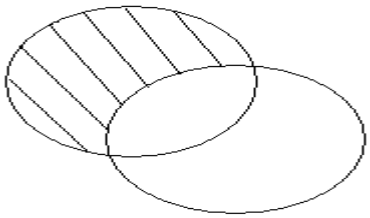


Рис. 3. Разность множеств

1.2. Элементы математической логики

Слово «логика» происходит от греческого *logos*, что, с одной стороны, означает «слово», а с другой – «мысль, рассуждение». Логика изучает акты мышления, зафиксированные в языке в виде слов, предложений и их совокупностей. Логика как наука сформировалась очень давно – в IV в. до н.э. Ее создал древнегреческий ученый Аристотель. В XVII в. великий немецкий ученый Готфрид Лейбниц (1646-1716) задумал создать новую логику, которая была бы «искусством исчисления». В этой логике, по мысли Лейбница, каждому понятию соответствовал бы символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эта идея Лейбница, не встретив понимания современников, не получила в то время распространения и развития. Только в середине XIX в. ирландский математик и логик Джордж Буль (1815-1864) частично воплотил в жизнь идею Лейбница. Им была создана алгебра логики, в которой действуют законы, схожие с законами обычной алгебры, но буквами обозначаются не числа, а предложения. На языке булевой алгебры можно описывать рассуждения и «вычислять» их результаты; однако, ею охватываются далеко не всякие рассуждения, а лишь определенный тип их, в некотором смысле – простейший. Алгебра логики Буля явилась зародышем новой науки – математической логики. В отличие от нее логику, восходящую к Аристотелю, называют традиционной, или классической формальной логикой. Таким образом, математическая логика – это логика, использующая язык и методы математики.

ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

***Высказывание* – это повествовательное предложение (утверждение), о котором можно говорить, что оно истинно или ложно.**

Высказывания обозначают большими или маленькими латинскими буквами. Предложение, которое содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием при подстановке вместо всех переменных их значений, называется высказывательной формой.

Пример

А: «Москва – столица России» – истинное высказывание. b = «Волга впадает в Черное море» – ложное высказывание.

Значения истинности высказываний обозначаются буквами **И** – «истина» и **Л** – «ложь» или цифрами **1** – «истина» и **0** – «ложь». Т.е. $A = 1$(И), $b = 0$(Л).

Союзы «и», «или», «если, то», «тогда и только тогда, когда», а также частицу «не» (словосочетание «неверно, что») называют ***логическими связками***.

Предложения, образованные из других предложений с помощью логических связок, называют ***составными,*** или ***сложными***. Предложения, которые не содержат логических связок, называют ***элементарными,*** или ***простыми***.

Процесс получения составных высказываний с помощью логических связок называется ***логической операцией***.

По числу логических связок выделяют пять логических операций.

1. Негация (отрицание) – единственная операция, которая может применяться к одному высказыванию.

Негацией высказывания называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда само высказывание ложно и ложно, когда само высказывание истинно.

Негация обозначается $\overline{A}$, или $\neg b$, читается: «не А» или «неверно, что А».

Например, высказывание A = «Луна – спутник Марса» – ложное, а высказывание $\overline{A}$ = «Неверно, что Луна – спутник Марса» – истинное.

Для произвольного высказывания A определение удобно записывать с помощью так называемой *таблицы истинности*:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

2. Конъюнкция (логическое умножение) – от латинского *conjunctio – соединение.*

Конъюнкцией двух высказываний называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

Конъюнкция обозначается $A \wedge B$ или $A\&B$; читается: «A ***и*** B».

Таблица истинности для конъюнкции выглядит следующим образом:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример

Определить значение истинности высказываний «Париж расположен на Сене и 2 + 3 = 5»; «1 – простое число и 2 – простое число»; «Число 3 – четное и медведи живут в Африке».

Решение:

Первое высказывание является конъюнкцией двух высказываний A = «Париж расположен на Сене» и B = «2 + 3 = 5». Значение истинности высказывания $A = 1$ и значение истинности высказывания $B = 1$. Следовательно, $A \wedge B = 1$.

Второе высказывание является конъюнкцией высказываний A = «1 – простое число» ($A = 0$) и B = «2 – простое число» ($B = 1$). Следовательно, $A \wedge B = 0$.

Третье высказывание является конъюнкцией двух ложных высказываний, следовательно, $A \wedge B = 0$.

3. Дизъюнкция (логическое сложение) – от латинского *disjunction – разделение*.

Дизъюнкцией двух высказываний является новое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Дизъюнкция обозначается $A \vee B$ и читается «A ***или*** B».

Таблица истинности для дизъюнкции выглядит следующим образом:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример

Определить значение истинности высказываний «Париж расположен на Сене или 2 + 3 = 5»; «1 – простое число или 2 – простое число»; «Число 3 – четное или медведи живут в Африке».

Решение:

Первое высказывание является дизъюнкцией двух высказываний A = «Париж расположен на Сене» и B = «2 + 3 = 5». Значение истинности высказывания $A = 1$ и значение истинности высказывания $B = 1$. Следовательно, $A \vee B = 1$.

Второе высказывание является дизъюнкцией высказываний A = «1 – простое число» ($A = 0$) и B = «2 – простое число» ($B = 1$). Следовательно, $A \vee B = 1$.

Третье высказывание является дизъюнкцией двух ложных высказываний, следовательно, $A \wedge B = 0$.

4. Импликация (логическое следствие).

Импликацией двух высказываний называется новое высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда первое высказывание истинно, а второе – ложно.

Импликация обозначается $A \to B$ или $A \Rightarrow B$, читается «Если A, то B».

Таблица истинности импликации выглядит так:

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример

Чтобы запомнить правило нахождения значения истинности импликации, удобно воспользоваться следующими высказываниями: «Дождь идет», «Асфальт мокрый», «Дождь не идет», «Асфальт сухой».

1) $A \to B$ = «Если дождь идет, то асфальт мокрый» = 1;

2) $A \to B$ = «Если дождь идет, то асфальт сухой» = 0;

3) $A \to B$ = «Если дождь не идет, то асфальт мокрый» = 1 (прошла поливальная машина или растаял снег);

4) $A \to B$ = «Если дождь не идет, то асфальт сухой» = 1.

Принятое определение импликации соответствует употреблению союза «если…, то…» не только в математике, но и в обыденной, повседневной речи. Так, например, обращение приятеля «Если будет хорошая погода, то я приду к тебе в гости» вы расцените как ложь в том и только в том случае, если погода будет хорошая, а приятель к вам в гости не придет.

Вместе с тем определение импликации вынуждает считать истинными высказываниями такие предложения, как «Если 2×2 = 4, то Москва – столица России» или «Если 2×2 = 5, то существуют ведьмы». Эти предложения, вероятно, кажутся бессмысленными. Дело в том, что мы привыкли соединять союзом «если…, то…» (так же, как и другими союзами) предложения, связанные по смыслу. Но определениями логических операций смысл составляющих высказываний никак не учитывается; они рассматриваются как объекты, обладающие единственным свойством – быть истинными либо ложными. Поэтому не стоит

смущаться «бессмысленностью» некоторых составных высказываний, их смысл не входит в предмет нашего рассмотрения.

5. Эквиваленция (логическая равносильность).

Эквиваленцией двух высказываний называется новое высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны либо ложны.

Эквиваленция обозначается $A \leftrightarrow B$ или $A \Leftrightarrow B$, читается «*A* тогда и только тогда, когда *B*».

Таблица истинности для эквиваленции выглядит так:

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

В форме эквиваленции, как правило, формулируются определения (например, определения логических операций).

Пример

Пусть через *A* обозначено высказывание «9 делится на 3», а через *B* – высказывание «10 делится на 3». Составьте высказывания, имеющие логическую структуру: а) $A \to B$; б) $B \to A$; в) $A \leftrightarrow B$; г) $B \leftrightarrow A$; д) $\overline{A} \to B$; е) $A \leftrightarrow \overline{B}$ и определите их значения истинности.

Решение:

а) $A \to B$ = «Если 9 делится на 3, то 10 делится на 3» = 0, т.к. *A* = 1, а *B* = 0. б) $B \to A$ = «Если 10 делится на 3, то 9 делится на 3» = 1. в) $A \leftrightarrow B$ = «9 делится на 3 тогда и только тогда, когда 10 делится на 3» = 0. г) $B \leftrightarrow A$ = «10 делится на 3 тогда и только тогда, когда 9 делится на 3» = 0. д) $\overline{A} \to B$ = «Если 9 не делится на 3, то 10 делится на 3» = 1 (т.к. *A* = 1, то $\overline{A}$ = 0 и *B* = 0, следовательно, $\overline{A} \to B$=1). е) $A \leftrightarrow \overline{B}$ = «9 делится на 3 тогда и только тогда, когда 10 не делится на 3» = 1 (*A* = 1 и $\overline{B}$ = 1, тогда $A \leftrightarrow \overline{B}$ = 1).

В логике высказываний – первом и основном разделе математической логики – элементарные высказывания рассматриваются как нерасчленяемые «атомы», а составные высказывания – как молекулы, образованные из «атомов» применением к ним логических операций. Логика высказываний интересуется единственным свойством элементарных высказываний – их значением истинности; составные же высказывания изучаются ею со стороны их логической структуры, отражающей способ, которым они образованы. Структура составных высказываний определяет зависимость их значений истинности от значений истинности составляющих элементарных высказываний.

Так как смысл высказываний математическую логику не интересует, их вполне можно заменить переменными.

Пусть $X, Y, \ldots, Z, \ldots, X_i, Y_i, \ldots, Z_i$ – переменные, вместо которых можно подставить любые элементарные высказывания (или их значения истинности). Такие переменные называют *пропозициональными,* или *высказывательными переменными*. С помощью высказывательных переменных и символов логических

операций любое высказывание можно *формализовать*, т.е. заменить *формулой*, отражающей его логическую структуру. Вычислить значение логического выражения – значит найти значение истинности этого выражения при заданных значениях истинности составляющих его переменных.

При вычислении значения формулы логические операции (если нет скобок) вычисляются в определенном порядке: 1) негация (отрицание); 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция; 4) импликация; 5) эквиваленция.

Алгоритм построения таблицы истинности сложного высказывания:

1. Вычислить количество строк и столбцов в таблице истинности.

Пусть в формуле n различных переменных и k операций. Переменные считаем каждую только один раз, а символы операций – все, сколько есть. Тогда число строк в таблице равно $2^n + 1$ (число наборов значений переменных плюс строка заголовка), а число столбцов в таблице равно $n + k$.

2. Начертить таблицу.

3. Заполнить строку заголовка.

В строке заголовка записываем промежуточные формулы, начиная с элементарных и учитывая порядок выполнения операций. Вместо промежуточных формул, если они большие, можно записывать их порядковые номера (из порядка выполнения операций).

4. Заполнить оставшиеся строки таблицы, начиная с первого столбца.

При вычислении значений промежуточных формул надо помнить, что в каждой операции участвует не более двух формул (может быть, и не элементарных).

Формулы, принимающие значение «истина» при всех наборах значений входящих в нее переменных, называются тождественно истинными, или ***тавтологиями.***

Одна из задач математической логики состоит в поиске формул, являющихся тавтологиями и ***противоречиями*** (тождественно ложными, т.е. *принимающими при всех наборах значений переменных значение «ложь»*). Способы рассуждений, формализующиеся тавтологиями, затем применяются при доказательстве утверждений.

Формулы, принимающие при некоторых наборах переменных значение «истина», а при некоторых – значение «ложь», называются ***выполнимыми (опровержимыми)***.

С помощью таблиц истинности можно установить, при каких наборах значений истинности входящих переменных формула будет принимать истинное или ложное значение (а также высказывание, имеющее соответствующую логическую структуру), какие формулы будут тавтологиями или противоречиями, а также установить, являются ли две данные формулы *равносильными.*

В логике говорят, что два предложения равносильны, если они одновременно истинны либо одновременно ложны.

Формулы F_1 и F_2 называются равносильными, если их эквиваленция $F_1 \leftrightarrow F_2$ – тавтология.

Равносильность двух формул записывается так: $F_1 \equiv F_2$ (читается: формула F_1 равносильна формуле F_2).

Проверить, равносильны ли формулы, можно двумя способами: 1) составить их эквиваленцию и с помощью таблицы истинности проверить, не является ли она тавтологией; 2) для каждой формулы составить таблицу истинности и сравнить итоговые результаты; если в итоговых столбцах при одинаковых наборах значений переменных значения истинности обеих формул будут равны, то формулы являются равносильными.

Пример

Проверить, являются ли формулы $F = \overline{X \vee Y}$ и $H = \overline{X} \wedge \overline{Y}$ равносильными.

Решение:

1. Составим таблицу истинности для формулы *F*:

X	Y	$X \vee Y$	$\overline{X \vee Y}$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	0	1	0
0	0	0	1

2. Составим таблицу истинности для формулы *H*:

X	Y	$\overline{\tilde{O}}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \wedge \overline{Y}$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

2. Так как итоговые столбцы в обеих таблицах совпадают (совпадают значения формул для одинаковых наборов значений переменных), значит, формулы равносильны, т.е., $F \equiv H$.

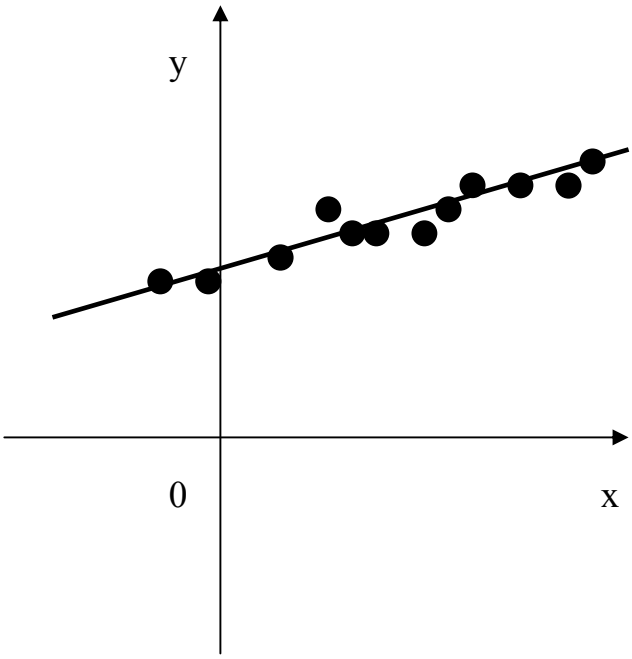
1.3. Элементы теории функций многих переменных. Метод наименьших квадратов

В естествознании приходится пользоваться эмпирическими формулами, составленными на основе опыта и наблюдений. Один из лучших способов получения таких формул – это ***метод наименьших квадратов***.

Рассмотрим идею этого способа на примере линейной зависимости двух величин.

Пусть требуется установить зависимость между двумя величинами x и y (например, температурой и удлинением металлического стержня). Производим соответствующие измерения (например, n измерений) и результаты полученных измерений сводим в таблицу:

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$\mathbf{y_i}$	y_1	y_2	y_3	…	y_n



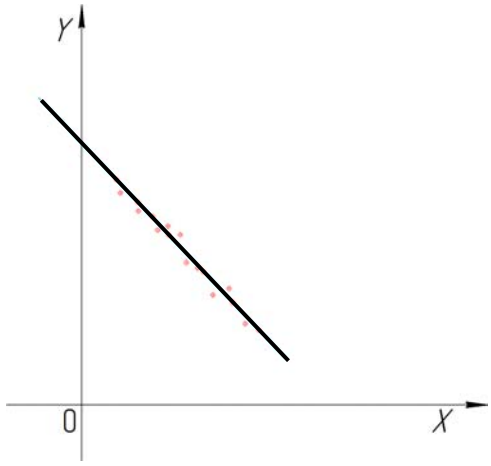


Рис. 4. Графическое изображение эмпирических данных

Будем рассматривать *x* и *y* как прямоугольные координаты точек на плоскости. Предположим, что точки $(x_k; y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ группируются вдоль некоторой прямой линии (рис. 4). Естественно в этом случае считать, что между x и y существует приближённая линейная зависимость, т. е. $y = ax + b$ (1).

Назовём *уклонением* (или *отклонением*) разность между точным значением функции (1) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы: $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$. Сумма квадратов уклонений – это функция величин a и b:

$$U(a;b) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(ax_k + b - y_k\right)^2 .$$

В методе наименьших квадратов на величины a и b накладывается условие – они должны доставлять минимум сумме квадратов уклонений $U(a;b)$. Требуется найти a и b , удовлетворяющие этому условию. Для этого необходимо, чтобы: $\dfrac{\partial U}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k + b - y_k\right)x_k = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k - 2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0,$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k + b - y_k\right) = 2a\sum_{k=1}^{n} x_k + 2bn - 2\sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{cases} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + bn = \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \qquad (2)$$

Это окончательный вид так называемой нормальной системы метода наименьших квадратов. Пусть $a = a_0$ и $b = b_0$ – решение системы (2). Можно доказать, что a_0 и b_0 доставляют величине U(a; b) минимум. Функция (1) при $a = a_0$ и $b = b_0$ даёт эмпирическую формулу $y = a_0 x + b_0$.

1.4. Элементы теории вероятностей

Раздел математики, посвященный исследованию количественных оценок случайных событий, законов, которым подчиняются случайные события, называется теорией вероятностей.

Ее основателями считают Пьера Ферма и Блеза Паскаля. Эти французские ученые XVII в. первыми нашли ключ к составлению количественной оценки вероятности события. Они использовали метод, который позже был назван комбинаторным анализом, или, проще, комбинаторикой.

Случайные события и их вероятности

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть *испытанием*.

Например, многократное подбрасывание монеты, процесс изготовления какой-либо детали представляют собой испытания.

Результат этого действия или наблюдения будем называть *событием*.

Например, появление цифры при подбрасывании монеты, попадание в мишень при выстреле являются событиями.

Если нас интересует какое-либо определенное событие из всех возможных, то будем называть его *искомым*.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита.

Во многих играх используют игральный кубик. У кубика 6 граней, на каждой грани отмечено различное количество точек – от 1 до 6. Играющий бросает кубик и смотрит, сколько точек имеется на выпавшей грани (на той грани, которая располагается сверху). Довольно часто точки на грани кубика заменяют соответствующим числом, и тогда говорят о выпадении 1, 2 или 6. Бросание кубика можно считать опытом, экспериментом, испытанием, а полученный результат – исходом испытания, или элементарным событием. Людям интересно угадывать наступление того или иного события, предсказывать его исход. Какие предсказания они могут сделать, когда бросают игральный кубик? Например, такие:

1) событие *A* — выпадет цифра 1, 2, 3, 4, 5 или 6;

2) событие *B* — выпадет цифра 7, 8 или 9;

3) событие *C* — выпадет цифра 1.

Событие *A,* предсказанное в первом случае, обязательно наступит. Вообще, событие, которое в данном опыте обязательно наступит, называют *достоверным событием.*

Событие В, предсказанное во втором случае, никогда не наступит, это просто невозможно. Вообще, событие, которое в данном опыте наступить не может, называют *невозможным событием*.

А как вы думаете, событие *C,* предсказанное в третьем случае, наступит или не наступит? На этот вопрос мы с полной уверенностью ответить не в состоянии, поскольку 1 может выпасть, а может и не выпасть. Событие, которое в данном опыте может как наступить, так и не наступить, называют *случайным событием.*

Классическое определение вероятности события

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа (m) исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу (n) всех равновозможных между собой исходов этого испытания.

1) *вероятность достоверного события считается равной* 1;

2) *вероятность невозможного события считается равной* 0;

3) *вероятность случайного события – число из промежутка (0; 1).*

Принято вероятность события *A* обозначать: *P(A).* Объяснение такого обозначения очень простое: слово «вероятность» по-французски – *probabilite,* по-английски – *probability.* В обозначении используется первая буква слова.

Используя это обозначение, вероятность события *A* по классической схеме можно найти с помощью формулы $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример

Из 50 точек 17 закрашены в синий цвет, а 13 – в оранжевый цвет. Найти вероятность того, что случайным образом выбранная точка окажется закрашенной.

Решение:

Всего закрашено 30 точек из 50. Значит, вероятность равна $\frac{30}{50} = 0{,}6$

Ответ: 0,6.

Иногда для нахождения значений m и n используют формулы комбинаторных соединений.

Всякое упорядоченное подмножество, содержащее m элементов из данных n элементов, называется **размещением** из n элементов по m элементов. Обозначаются A_n^m. Число размещений вычисляется по формуле: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

n! = 1·2·3·…·(n – 2)·(n – 1)·n – произведение последовательных натуральных чисел, читается «эн-факториал»)

Если элементы в подмножествах повторяются, то размещения называются размещениями с повторениями. Обозначаются $\overline{A}_n^m$. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле: $\overline{A}_n^m = n^m$.

Всякое расположение n элементов в некотором определенном порядке называется **перестановкой** из n элементов. Обозначаются перестановки P_n. Число перестановок вычисляется по формуле: $P_n = n!$

Если среди данных элементов есть одинаковые, то перестановки называются перестановками с повторениями:

$$P_n(k, k_2, ..., k_{m1}) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}, \quad k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

Всякое подмножество, содержащее m элементов из данных n элементов, называется **сочетанием** из n элементов по m элементов. Обозначаются C_n^m. Число сочетаний вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$.

Если элементы в подмножествах повторяются, то сочетания называются сочетаниями с повторениями. Обозначаются $\overline{C}_n^m$. Число размещений с повторениями вычисляется по формуле: $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Операции с вероятностями

Между событиями, происходящими в результате некоторого опыта, и между вероятностями этих событий могут быть какие-то соотношения, зависимости, связи и т.п.

Определение 1. Событие *B* называют **противоположным событию** *A* и обозначают $B = \overline{A}$, если событие *B* происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие А.

Символ $\overline{A}$ можно читать так: «А с чертой».

Определение 2. События А и В называют **несовместными,** если они не могут происходить одновременно в одном и том же испытании. В противном случае события называются **совместными.**

Определение 3. Суммой событий *A* и *B* называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из двух данных событий *A* и *B*. Такое событие обозначают *A + B*.

Определение 4. Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет.

Определение 5. Событие *A* называется **независимым** от события *B*, если наступление события *B* не влияет на вероятность наступления события *A*.

ТЕОРЕМА 1. Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

ТЕОРЕМА 2. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Если *A* и *B* несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность суммы любого числа попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

ТЕОРЕМА 3. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

ТЕОРЕМА 4. Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A).$$

Пусть A и B – два случайных события одного и того же испытания. Тогда *условной вероятностью* события A или вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$. Обозначают P(A/B) или $P_B(A)$.

ТЕОРЕМА 5. Вероятность произведения двух совместных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Пример. Из колоды в 36 карт *поочередно* достают две карты. Найти вероятность того, что вторым вынут червовый король, если первая карта – король черной масти.

Решение:

Событие A состоит в одновременном наступлении двух совместных событий: A_2 – вынут король червей и A_1 – вынут король черной масти. При этом наступление события A_2 зависит от наступления события A_1. Найдем вероятности каждого из событий A_1 и A_2.

$N_{A_1} = 36$ (т.к. в колоде всего 36 карт и мы берем 1 карту). $N(A_1) = 2$ (т.к. в колоде 2 короля черной масти). Тогда $P(A_1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

$N_{A_2} = 35$ (т.к. мы одну карту из колоды вынули). $N(A_2) = 1$ (т.к. в колоде 1 король червей и мы вынули не его). Тогда $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{35}$.

Теперь найдем вероятность события A: $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{35} = \frac{1}{630}$.

Пример. В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй – 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Решение:

Пусть A_1 – из первой урны извлечен белый шар; A_2 – из второй урны также извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 – независимы. $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{7}{12}$.

По теореме: $P(A_1 \cdot A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$.

Пример. В урне находятся 6 красных, 5 синих и 4 белых шара. Из урны извлекают один шар. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

Решение:

Пусть событие А – из урны извлечен цветной шар, В – шар синий, С – шар красный. По условию задачи А = В + С, так как цветной шар - это либо красный, либо синий. События В и С несовместны, так как один и тот же шар не может быть одновременно и синим, и красным. Поэтому получаем: Р(А) = Р(В + С) = Р(В) +Р(С) = $\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$.

Пример. Игральный кубик подбрасывается один раз. Найти вероятность того, что выпадет «6» очков или четное число очков.

Решение:

Пусть событие А – выпало число 6 или четное число, В – выпало «6», С – выпало четное число. По условию задачи: А = В + С. В и С совместимые события, так как число 6 является четным. Поэтому получаем: Р(А) = Р(В + С) = Р(В) + Р(С) – Р(В·С) = $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

1.5. Элементы математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, который занимается изучением научно обоснованных методов сбора и обработки информации.

Математика применяется в двух направлениях:

1. Для обработки результатов, полученных наблюдением, и получения эмпирических законов.
2. Применение математического моделирования для выявления внутренней структуры наблюдаемых явлений, для их прогнозирования и управления различными процессами.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно считать любую совокупность объектов и связывающих их операций.

Структура математического моделирования представлена на рис. 5.

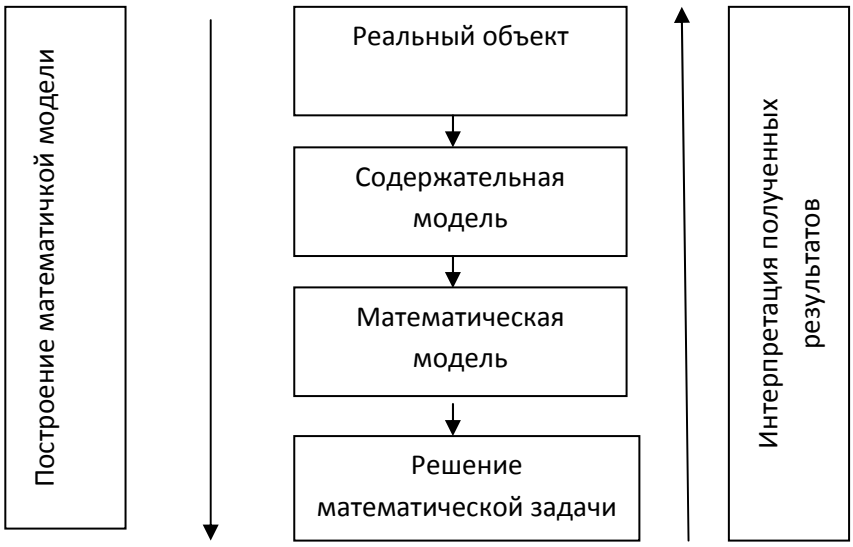


Рис. 5. Структура математического моделирования

Математические модели условно можно разделить по математическому аппарату, который применяется для их решения (исследования) и по целям построения этих моделей.

Классификация И.А. Полетаева.

1. ***Поисковые модели***, то есть построение моделей для объектов, о которых почти ничего неизвестно, и необходимо по типу реакции выяснить их структуру.
2. ***Портретные модели***, то есть модели, когда механизм объекта известен, но сам объект труднодоступен для наблюдения, поэтому изучение происходит через копирующую модель.
3. ***Исследовательские модели*** – это модели, которые составлены для изучения возможностей данного объекта и прогнозирования наблюдаемых процессов.

С математической точки зрения модели делятся на ***дискретные*** и ***непрерывные***.

Для построения и изучения дискретных моделей используются средства дискретной математики, то есть теории множеств, теории матриц и определителей; элементы теории графов и т.д.

Непрерывные модели. Для построения и изучения этих моделей применяются средства математического анализа: теория пределов, элементы дифференциального и интегрального исчисления, теория дифференциальных уравнений.

Статистические методы обработки данных

Пусть рассматривается некоторая совокупность объектов, которые являются однородными по структуре и изучаются по одному и тому же качественному или количественному признаку. Такая совокупность называется генеральной статистической совокупностью.

Для изучения свойств всей совокупности чаще всего выбирают лишь часть объектов. Это часть называется выборкой. Выборки делятся на повторные и бесповторные.

Количество объектов входящих в совокупность или выборку, называется объемом совокупности или объемом выборки соответственно.

N – объем совокупности

n – объем выборки

Если выделить некоторые количественные или качественные признаки для конкретной выборки и провести изучение выборки по выделенным признакам, то их значение принято называть вариантами. Перечень найденных вариант в порядке возрастания называется вариационным рядом.

Если количество наблюдаемых объектов или количество найденных вариант небольшое, то вариационный ряд является дискретным (от 7 до 13 единиц).

Если же количество объектов или найденных вариант достаточно большое, то составляется непрерывный вариационный ряд, где все найденные варианты делятся на интервалы определенной длины, и из них выбирают среднее значение (от 7 до 13 интервалов).

Количество объектов, обладающих определенным значением наблюдаемого признака, называется частотой.

Статистическим распределением выборки называется перечень найденных вариант и соответствующих им частот. В отдельных случаях вместо частот используют относительные частоты, т.е. отношение частот к объему выборки.

Если вариационный ряд является непрерывным, то в качестве частоты каждого интервала рассматривают количество всех объектов, которые в него попали.

Схема составления статистического распределения

1. Измерить и записать значения наблюдаемого признака x_i.
2. Из полученных данных отобрать самое маленькое и самое большое значение и рассчитать длину интервала распределения

   $$h = \frac{\Delta x}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n},$$

   где h – ширина интервала; Δx – размах вариации ($x_{max} - x_{min}$).
3. Составляется вариационный ряд

   x_i: $(x_1; x_2]$; $(x_2; x_3]$;…; $(x_{k-1}; x_k]$.

   $x_{min} \in (x_1; x_2]$, $x_{max} \in (x_{k-1}; x_k]$

   $x_1 = x_{min} - \frac{h}{2}$

   Составляется статистическое распределение выборки.

x_i	$(x_1; x_2]$	$(x_2; x_3]$	…	$(x_{k-1}; x_k]$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

4. К таблице статистического распределения добавляются строчки следующего вида

а) x_i' - середина каждого интервала

$x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2}$, для $(x_1; x_2]$

$x_2' = \frac{x_2 + x_3}{2}$, для $(x_2; x_3]$ и т.д.

На практике по указанной формуле находится x_1', а все последующие середины находятся на основе полученных прибавлением ширины интервала.

$x_2' = x_1' + h$; $x_3' = x_2' + h$ и т.д.

б) $p_i = \frac{n_i}{h}$ - относительные частоты.

в) $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{p_i}{h}$ - эта строчка добавляется, если необходимо построить графическое изображение статистического распределения.

Пример. Составить статистическое распределение по данным измерения длины плеча птенца мухоловки-пеструшки, в мм.

1.

13,6	14,2	10,2	12,9	12,9	11,9	17,2	13,3	12
10	13,9	11,2	16,2	11,6	12,8	12,3	14,9	14
13	16,2	11,5	17,1	13,4	13,1	11,2		

2.

$x_{\min} = 10$

$x_{\max} = 17.2$

$n = 25$

$\Delta x = R = x_{\max} - x_{\min} = 17{,}2 - 10 = 7{,}2$

$$h = \frac{\Delta x}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n}$$

$$h = \frac{7.2}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 25} \approx 1.275... \approx 1.3$$

3.

а) Составим дискретное распределение

x_i	10	10,2	11,2	11,5	11,6	11,9	12	12,3	12,8	12,9	13
n_i	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1
x_i	13,1	13,3	13,4	13,6	13,9	14	14,2	14,9	16,2	17,1	17,2
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1

$n = 25$

б) Вычислим границы интервалов, их середины и относительные частоты.

$$x_1 = x_{\min} - \frac{h}{2} = 10 - \frac{1{,}3}{2} = 10 - 0{,}65 = 9{,}35 \approx 9{,}4$$

$x_2 = x_1 + h = 9{,}4 + 1{,}3 = 10{,}7$ и т.д.

$$x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9{,}4 + 10{,}7}{2} = \frac{20{,}1}{2} = 10{,}05 \approx 10{,}1$$

$x_2' = x_1' + h = 10{,}1 + 1{,}3 = 11{,}4$ и т.д.

x_i	(9,4;10,7]	(10,7;12]	(12;13,3]	(13,3;14,6]	(14,6;15,9]	(15,9;17,2]	Σ
n_i	2	6	7	5	1	4	$n = 25$
x_i'	10,1	11,4	12,7	14	15,3	16,6	
$\frac{n_i}{h}$	1,5	4,6	5,4	3,8	0,8	3,1	

Графическое изображение статистических распределений

1. ***<u>Полигон</u>*** – это ломаная, которая соединяет точки с координатами $(x_i; n_i)$ или $(x_i; p_i)$.

Если ряд непрерывный $x_i \to x_i'$, т.е. вместо значения x_i используется величина x_i', т.е. середины интервалов.

Построим полигон для приведенного выше примера (рис. 6).

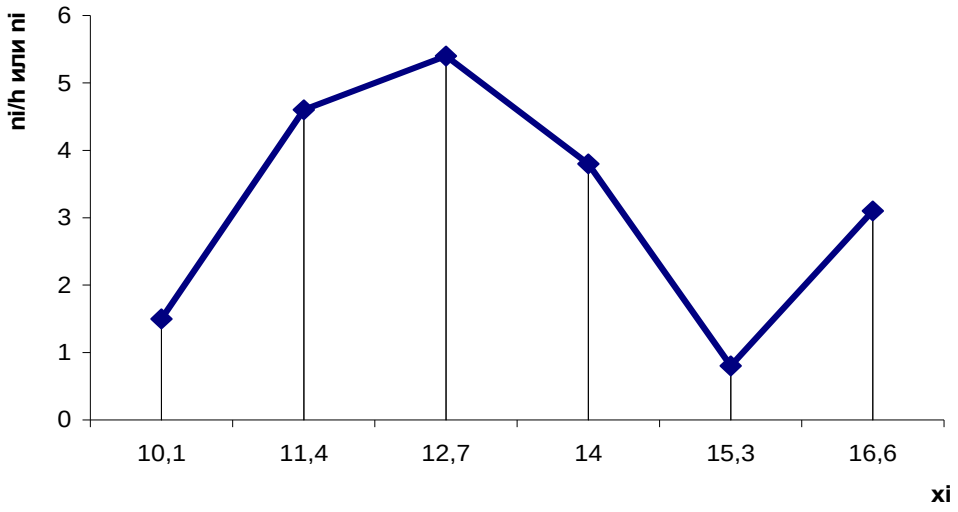


Рис. 6. Полигон

2. ***<u>Гистограмма</u>*** – это совокупность прямоугольников, основаниями которых являются интервалы, а высотой величина $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{p_i}{h}$ (рис. 7).

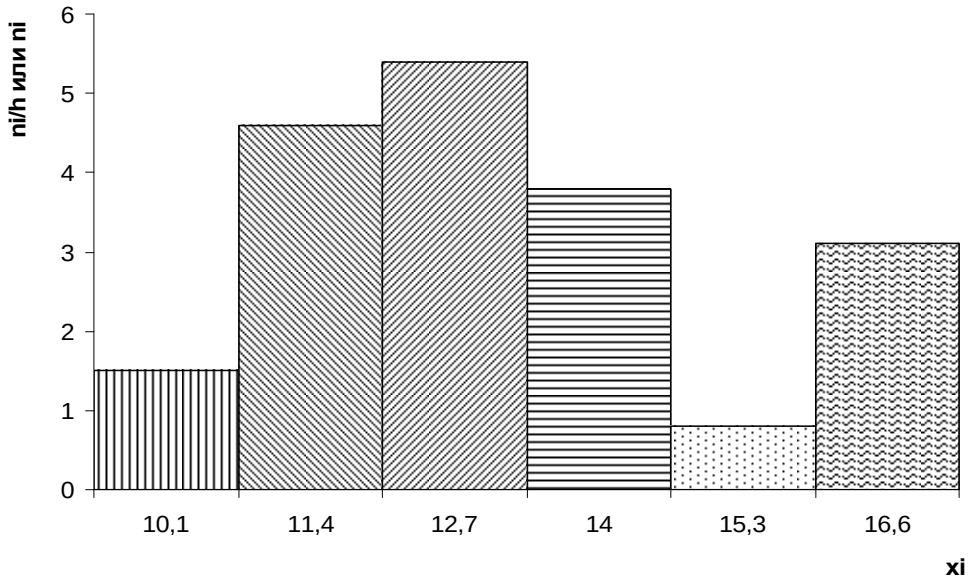


Рис. 7. Гистограмма

3. Э***мпирическая функция распределения*** $F^*(x)$

Эмпирической функцией статистического распределения, или функцией распределения выборки, называется функция, определяющая для каждого значения x величину события "$X < x$" и вычисляемая по формуле:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n - объём выборки,

n_x - число вариант, меньших x.

Свойства эмпирической функции распределения

1. Функция $F^*(x)$ - неубывающая.
2. Функция $F^*(x)$ принимает значения на отрезке $[0;1]$.
3. Если $x_1 = x_{\min}$, а $x_k = x_{\max}$, то для всех x, меньших x_1, эмпирическая функция:

$$\forall x \underset{(\le)}{<} x_1 \Rightarrow F^*(x) = 0;$$

$$\forall x \underset{(\ge)}{>} x_1 \Rightarrow F^*(x) = 1.$$

Построим функцию распределения выборки для приведенного выше примера. $F^*(x)$:

1) $x \le 10{,}1 \Rightarrow F^*(x) = 0$;

2) $10{,}1 < x \le 11{,}4 \Rightarrow F^*(x) = \frac{2}{25} = 0{,}08$;

3) $11{,}4 < x \le 12{,}7 \Rightarrow F^*(x) = \frac{2+6}{25} = \frac{8}{25} = 0{,}32$;

4) $12{,}7 < x \le 14 \Rightarrow F^*(x) = \frac{2+6+7}{25} = \frac{15}{25} = 0{,}6$;

5) $14 < x \le 15{,}3 \Rightarrow F^*(x) = \frac{2+6+7+5}{25} = \frac{20}{25} = 0{,}8$;

6) $15{,}3 < x \le 16{,}6 \Rightarrow F^*(x) = \frac{2+6+7+5+1}{25} = \frac{21}{25} = 0{,}84$;

7) $x > 16{,}6 \Rightarrow F^*(x) = \frac{25}{25} = 1$.

Эмпирическая функция распределения выборки получилась равна

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & при\ \ x \le 10{,}1; \\ 0{,}08, & при\ \ 10{,}1 < x \le 11{,}4; \\ 0{,}32, & при\ \ 11{,}4 < x \le 12{,}7; \\ 0{,}6, & при\ \ 12{,}7 < x \le 14; \\ 0{,}8, & при\ \ 14 < x \le 15{,}3; \\ 0{,}84, & при\ \ 15{,}3 < x \le 16{,}6; \\ 1, & при\ \ x > 16{,}6. \end{cases}$$

Изобразим график полученной функции распределения (рис. 8).

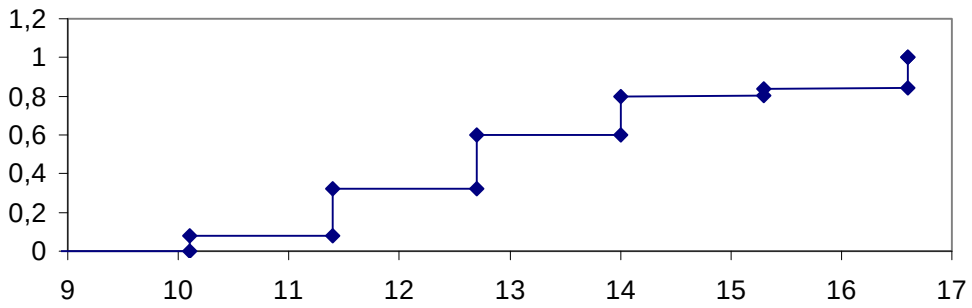


Рис. 8. Эмпирическая функция распределения

Основные математические характеристики статистических распределений

При изучении какого-либо признака на большом количестве однородных объектов всегда приходится сталкиваться с большей или меньшей изменчивостью значений этого признака у отдельных объектов. Поэтому для сравнения аналогичных результатов исследования для нескольких групп необходимо определить общую числовую характеристику наблюдаемого признака для каждой группы и сравнивать между собой эти общие результаты.

Типичными вспомогательными характеристиками для любой статистической совокупности является мода и медиана.

M_o – мода

M_e – медиана

M_o – это то значение наблюдаемого признака, который встречается чаще всего, т.е. обладает наибольшей частотой.

M_e – это то значение наблюдаемого признака, который находится посередине статистического распределения выборки или совокупности.

В случае если в распределении несколько вариант обладают наибольшей частотой, то в качестве моды берется их среднее арифметическое значение.

Если число интервалов или количество различных вариант статистического распределения является четным, то в качестве M_e выбирают среднее арифметическое двух средних значений в таблице.

Пример.

x_i	52	54	56	58	60	62	64
n_i	1	4	8	9	12	5	1

$n = 40$

$M_0 = 60$

$M_e = 58$

Наиболее полной (точной) характеристикой является **среднее арифметическое М**.

В случае дискретного распределения среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}.$$

Если каждое значение варианты в этом распределении не повторяется, то среднее арифметическое находится по формуле: $M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}$.

Если распределение интервальное, то для расчета среднего арифметического вместо значения вариант в указанной формуле используется значение середин интервалов ($x_i^{/}$).

Среднее арифметическое имеет то же значение, что и математическое ожидание. Различие между ними заключается в том, что М является характеристикой средней величины, найденное на основе опытного материала и является приближенной величиной математического ожидания.

Лишь при неограниченном увеличении числа обследованных объектов по закону больших чисел М стремится к математическому ожиданию ($M \to MO$).

Между собой три названные характеристики совпадают лишь в случае симметричного распределения.

Найдем среднее арифметическое для выше приведенного примера:

$$M = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i \cdot n_i,$$

$$M = \frac{1}{40} \cdot (52 \cdot 1 + 54 \cdot 4 + 56 \cdot 8 + 58 \cdot 9 + 60 \cdot 12 + 62 \cdot 5 + 64 \cdot 1) \approx 58.$$

Среднее квадратичное отклонение

Одного среднего арифметического для исчерпывающей характеристики статистического распределения недостаточно, так как для различных выборок его значение может совпадать, а разброс значений вариант внутри этих выборок может существенно отличаться друг от друга. Поэтому вводится характеристика, с помощью которой можно определить размах вариации в статистическом распределении. Такой характеристикой вариабельности изучаемого признака является среднее квадратичное отклонение, которое вводится как корень квадратный из дисперсии или из исправленной дисперсии.

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i-1}^{k} n_i (x_i - M)^2}, \quad (x_i \to x_i^{'})$$

или:

$$\sigma = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i-1}^{k} n_i (x_i - M)^2}.$$

$$D = \frac{1}{40} \cdot (1 \cdot (52-58)^2 + 4 \cdot (54-58)^2 + 8 \cdot (56-58)^2 + 9 \cdot (58-58)^2 + 12 \cdot (60-58)^2 + 5 \cdot (62-58)^2 + 1 \cdot (64-58)^2 =$$

$$= \frac{1}{40} \cdot (36 + 64 + 32 + 0 + 48 + 80 + 36) = \frac{296}{40} = 7{,}4.$$

$$\sigma = \sqrt{D} \approx 2{,}72.$$

2. Примеры расчетных задач

2.1. Задача № 1

Данная задача относится к разделу «Элементы теории множеств». Для данных числовых множеств необходимо найти пересечение, объединение и разность. Определения этих операций приведены в справочных материалах (1.1).

Дано: A = {10; 4; 3; 1; 2; 6}, B = {1; 2; 5; 6; 8}, C = {3; 8; 10}, D = {1; 3; 5; 7; 10}.

Найти: а) A∩D; б) B \ D; в) C∪B; г) (A∩B) ∪(D \ C).

Решение:

а) A∩D = {10; 4; 3; 1; 2; 6} ∩ {1; 3; 5; 7; 10} = {1; 3; 10}, так как это общие элементы данных множеств;

б) B \ D = {1; 2; 5; 6; 8} \ {1; 3; 5; 7; 10} = {2; 6; 8}, так как это те элементы множества B, которые не принадлежат множеству D;

в) C∪B = {3; 8; 10} ∪ {1; 2; 5; 6; 8} = {1; 2; 3; 5; 6; 8; 10}, так как это элементы, принадлежащие хотя бы одному из данных множеств;

г) (A∩B) ∪(D \ C) = ({10; 4; 3; 1; 2; 6}∩{1; 2; 5; 6; 8}) ∪({1; 3; 5; 7; 10} \ {3; 8; 10}) = {1; 2; 6} ∪ {1; 5; 7} = {1; 2; 5; 6; 7}.

2.2. Задача № 2

Данная задача относится к разделу «Элементы математической логики». Ее решение сводится к составлению таблиц истинности указанных формул. Таблицы истинности основных операций над высказываниями можно найти в справочных материалах (1.2). Если при всех наборах переменных формула принимает лишь истинные значения, формула является тавтологией.

Составить таблицу истинности для формулы: $A \vee \overline{B} \leftrightarrow \overline{C}$.

Решение:

Данная формула содержит 3 различные переменные и 4 символа логических операций. Число строк в таблице – $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$. Число столбцов – $3 + 4 = 7$.

Определим порядок выполнения операций: 1) отрицание $\overline{B}$; 2) отрицание $\overline{C}$; 3) дизъюнкция $A \vee \overline{B}$ и 4) эквиваленция $(A \vee \overline{B}) \leftrightarrow \overline{C}$. Нарисуем таблицу и заполним строку заголовка, начиная с элементарных формул:

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A \vee \overline{B}$	$(A \vee \overline{B}) \leftrightarrow \overline{C}$
1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1

При сравнении формул сравниваются их значения при одинаковых наборах переменных. Если все значения совпадают, то формулы являются равносиль-

ными. Пример на проверку равносильности двух формул рассмотрен в справочных материалах (1.2).

2.3. Задача № 3

Данная задача относится к разделу «Элементы теории функций многих переменных». Необходимо вывести формулу зависимости между двумя величинами, используя метод наименьших квадратов. Краткое описание метода наименьших квадратов приведено в справочных материалах (1.3).

Результаты измерения величин x и y даны в таблице:

x	- 2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, способом наименьших квадратов определить коэффициенты a и b.

Решение: Составим расчётную таблицу.

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
- 2	0,5	4	- 1
0	1	0	0
1	1,5	1	1,5
2	2	4	4
4	3	16	12
$\sum_{k=1}^{5} x_k = 5$	$\sum_{k=1}^{5} y_k = 8$	$\sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 25$	$\sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 16{,}5$

По условию n = 5. Нормальная система (2) принимает вид:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16{,}5, \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера.

Δ – определитель второго порядка, который равен разности произведений чисел, стоящих на главной диагонали (диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол), и произведения чисел, стоящих на второй диагонали.

Δ – определитель системы, т.е. определитель, составленный из коэффициентов при переменных в каждом уравнении системы $\begin{cases} k_{11} \cdot a + k_{12} \cdot b = c_1, \\ k_{21} \cdot a + k_{22} \cdot b = c_2. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = k_{11} \cdot k_{22} - k_{12} \cdot k_{21}$$

Δ_a – определитель, полученный из определителя системы заменой коэффициентов при переменной **a** на столбец свободных слагаемых.

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & k_{12} \\ c_2 & k_{22} \end{vmatrix} = c_1 \cdot k_{22} - c_2 \cdot k_{12}$$

Δ_b – определитель, полученный из определителя системы заменой коэффициентов при переменной **b** на столбец свободных слагаемых.

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & c_1 \\ k_{21} & c_2 \end{vmatrix} = k_{11} \cdot c_2 - c_1 \cdot k_{21}$$

Для нашей системы получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 25 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 125 - 25 = 100$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 16{,}5 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 16{,}5 \cdot 5 - 8 \cdot 5 = 82{,}5 - 40 = 42{,}5$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 25 & 16{,}5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 25 \cdot 8 - 5 \cdot 16{,}5 = 200 - 82{,}5 = 117{,}5$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = \dfrac{42{,}5}{100} = 0{,}425, \\ b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = \dfrac{117{,}5}{100} = 1{,}175. \end{cases}$$

Получаем: **y = 0,425x + 1,175.**

Ответ: y = 0,425x + 1,175.

2.4. Задача № 4

Данная задача относится к разделу «Элементы теории вероятностей». Решение задачи предполагает или применение различных теорем вероятностей (примеры рассмотрены в справочных материалах (1.4)) или применение классического определения вероятности события и комбинаторных формул.

В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

Решение:

Полный ответ на билет состоит из произведения двух событий: студент одновременно ответит на два вопроса (событие *A*) и решит задачу (событие *B*).

Число всех возможных комбинаций из 56 вопросов по два составляет

$$C_{56}^2 = \frac{56!}{54!2!} = \frac{55 \cdot 56}{2!} = 1540.$$

Так как студент подготовил только 50 вопросов, то число благоприятных исходов равно

$$C_{50}^2 = \frac{50!}{48!2!} = \frac{50 \cdot 49}{2!} = 1225. \qquad P(A) = \frac{1225}{1540}.$$

Вероятность события *B* определяется тем, что студент знает 22 задачи из 28 возможных $P(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1225}{1540} \cdot \frac{11}{14} = 0{,}625.$$

2.5. Задача № 5

Данная задача относится к разделу «Элементы математической статистики». Алгоритм решения приведен в справочных материалах (1.5).

Известны данные о пределе текучести у 50 марок стали (кг/мм^2):

71	77	76	76	47	36	50	49	62	40	106	109	109	110	111
68	88	141	136	129	126	96	100	95	118	107	120	114	113	123
94	84	73	107	94	107	99	100	104	88	84	94	142	98	77
88	94	76	84	125										

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Решение:

1. Среди данных определим самое маленькое значение и самое большое:

$$x_{min} = 36, \ x_{max} = 142.$$

2. Вычислим ширину интервалов статистического распределения h:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n} = \frac{142 - 36}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 50} \approx 16,$$ n – объём выборки, т.е. количество измерений данных по условию задачи.

3. Составим статистическое распределение:

x_i	$(28; 44]$	$(44; 60]$	$(60; 76]$	$(76; 92]$	$(92; 108]$	$(108; 124]$	$(124; 140]$	$(140; 156]$	
n_i	2	3	7	8	15	9	4	2	n = 50
x_i'	36	52	68	84	100	116	132	148	
$\frac{n_i}{h}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	

4. Построим полигон (рис. 9) и гистограмму (рис. 10) полученного статистического распределения.

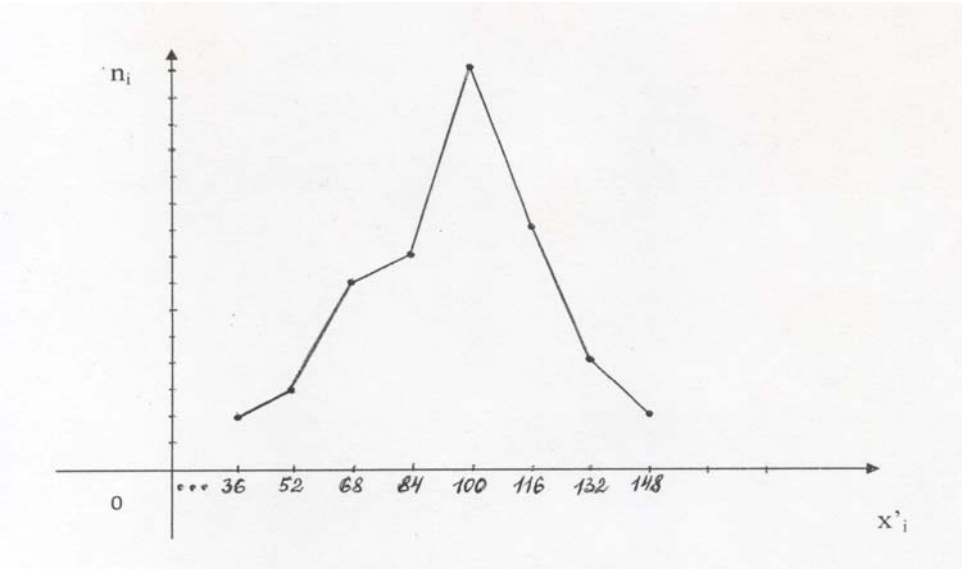


Рис. 9. Полигон статистического распределения

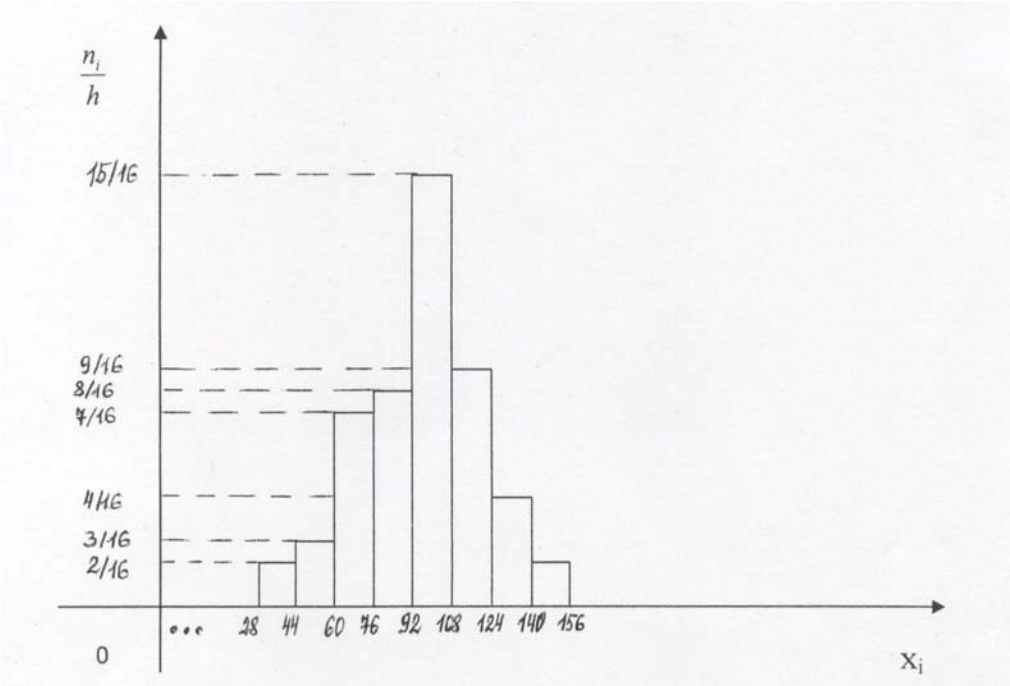


Рис. 10. Гистограмма статистического распределения

5. Найдём основные математические характеристики:

а) Мода $M_0 = 100$, т.к. это значение x'_i соответствует наибольшей частоте $n_i = 15$.

б) Медиана $M_e = \frac{84+100}{2} = 92$, т.к. количество интервалов в распределении чётное (k = 8), то в качестве медианы берём среднее арифметическое двух центральных значений x'_i.

в) Среднее арифметическое M:

$$M = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i$$

$$M = \frac{1}{50}\cdot(36\cdot 2 + 52\cdot 3 + 68\cdot 7 + 84\cdot 8 + 100\cdot 15 + 116\cdot 9 + 132\cdot 4 + 148\cdot 2) =$$

$$= \frac{1}{50}(72+156+476+672+1500+1044+528+296) = \frac{4744}{50} \approx 95.$$

г) Дисперсия $D = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - M)^2$

$$D = \frac{1}{50}\cdot(2\cdot(36-95)^2 + 3\cdot(52-95)^2 + 7\cdot(68-95)^2 + 8\cdot(84-95)^2 +$$

$$+ 15\cdot(100-95)^2 + 9\cdot(116-95)^2 + 4\cdot(132-95)^2 + 2\cdot(148-95)^2) =$$

$$= \frac{1}{50}\cdot(6962 + 5547 + 5103 + 968 + 375 + 3969 + 5476 + 5618) =$$

$$= \frac{34018}{50} = 680{,}36.$$

д) Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D}$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{680{,}36} \approx 26.$$

ОТВЕТ: а) $M_0 = 100$; б) $M_e = 92$; в) M =95; г) D = 680,36; д) $\sigma \approx 26$.

3. Контрольная работа

Вариант 0

1. Даны множества A = {0; 4; 3; 1; 2; 6; 5}, B = {1; 2; 6; 8}, C = {3}, D = {1; 3; 5; 7; 9}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $(X \wedge Y) \vee \left(X \wedge \overline{Y}\right)$ и $X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \overline{Z} \vee X \wedge \overline{Y}$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	–3	2	0	1	4
y	5	2	6	6	1

4. В ящике 10 кубиков, среди которых 6 окрашенных. Наудачу извлекают 4 кубика. Найти вероятность того, что извлечённые кубики окажутся окрашенными.

5. Известны данные о посевных площадях картофеля (тыс. гектаров) по районам Курганской области: (h = 0,2)

1,5	1,5	0,5	1,2	0,9	0,9	0,8	0,5	1,2	1,1	0,6	1,1
1,2	0,9	1,5	1,2	0,8	0,4	1,0	0,1	1,1	0,8	0,1	1,5
0,5	1,2	0,8	0,3	0,4	1,3	0,7	0,1	0,3	1,6	0,8	

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 1

1. Даны множества A = {10; 11; 13; 14; 15; 20; 32}, C = {11; 13}, B = {8; 10; 12; 14; 16; 18; 20}, D = {8; 9; 10}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $(X \vee Y) \wedge \left(X \vee \overline{Y}\right)$ и $(X \Leftrightarrow Y) \wedge (X \vee Y)$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	1	–1	2	0	3
y	6	7	8	4	5

4. В группе 25 студентов, из них отлично успевают 5 человек, хорошо – 12 , удовлетворительно – 6 и слабо – 2. Преподаватель, незнакомый с группой, вызывает по списку одного из студентов. Определить вероятность того, что вызванный студент будет отличник или хорошо успевающий.

5. На 10 мая 1982 года по районам Пермской области было посеяно яровых культур (в процентах к площади): (h = 9)

61	58	55	32	41	45	36	43	51	50	34	27
22	22	16	29	22	17	20	27	13	45	15	13
6	9	15	4	15	20	13	3	4	7	6	6 11

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 2

1. Даны множества A = {20; 30; 40; 50}, B = {1; 5; 10; 20}, C = {15; 30; 45; 50}, D = {1; 10; 20}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, является ли данная формула тавтологией:
$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((X \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \wedge Z)))$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	1	2	3	4	5
y	235	250	270	292	300

4. Студент знает 21 из 30 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

5. При сверлении отверстий одним и тем же сверлом и последующем измерении диаметров получены следующие данные (в мм): (h = 0,03)

40,25	40,35	40,45	40,35	40,37	40,35	40,44
40,35	40,33	40,41	40,35	40,30	40,28	40,30
40,40	40,36	40,29	40,33	40,31	40,33	40,41
40,40	40,33	40,37	40,35	40,34	40,32	40,34
40,28	40,46	40,39	40,37	40,29	40,39	40,37
40,44	40,27	40,38				

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 3

1. Даны множества A = {2; 7; 8; 9; 11; 12; 13}, B = {1; 2; 3; 7; 9}, D = {11; 13}, C = {1; 3; 5; 7; 9}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; г) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $\overline{\left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)} \vee \left(\overline{X} \vee Y \vee Z\right)$ и $((X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \vee Z))$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	0	1	1,5	2,1	4
y	2,9	6,3	7,9	10	13,2

4. Из колоды, содержащей 36 карт, вытягивают подряд три карты, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что все выбранные карты окажутся червовой масти.

5. Имеются данные о размерах основных фондов (в млн. руб.) 30 предприятий: (h = 0,20)

0,42	0,24	0,49	0,67	0,45	0,27	0,39	0,21	0,58
0,40	0,28	0,73	0,44	0,66	1,21	0,62	0,70	0,81
1,07	0,68	0,94	0,76	0,63	0,88	0,65	1,14	0,46
1,38	0,72	0,91						

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 4

1. Даны множества A = {2; 6; 8; 10; 14}, B = {1; 2; 3; 4; 5}, C = {6; 7; 8; 10}, D = {2; 3; 5}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы:
$\left(X \wedge \overline{Y}\right) \vee \left(\left(Y \vee \overline{Z}\right) \vee (Y \wedge Z)\right) \vee Y \vee Z$ и $X \vee Y \vee Z$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	–2	–1	0	1	2
y	2,5	3	4,5	4	5

4. В урне находятся 15 шаров, из них 9 красных и 6 синих. Найти вероятность того, что вынутые наудачу два шара оба окажутся красными.

5. Имеются данные интервалов между разрядами нейрона зрительной коры кролика в м/сек: (h = 38)

200	8	14	53	256	56	74	35	23	19	39
15	11	18	63	19	30	30	15	5	13	50
25	4	42	26	16	46	36	27	50	10	130
70	43	5	45	2	8	19	44	54	49	32
55	53	47	73	11	58	121	144	53	265	9
57	75	108	65	14	11	7	98	140		

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 5

1. Даны множества A = {1; 3; 5}, B = {1; 2; 3}, C = {4}, D = {1; 2; 3; 4; 5}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $(X \Rightarrow Y) \wedge \overline{X} \Rightarrow \overline{Y}$ и $\overline{Y} \vee X$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	1	2	3	5	6
y	–5	–1	–2	3	1

4. Два стрелка, для которых вероятность попадания в мишень равна соответственно 0,65 и 0,75, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

5. Имеются данные о величине латентного периода (в сек.) механического ответа при даче светового сигнала в первом предъявлении: (h = 0,10)

0,11	0,54	0,30	0,33	0,36	0,61	0,23	0,25
0,48	0,28	0,57	0,29	0,29	0,41	0,35	0,36
0,51	0,74	0,35	0,44	0,27	0,36	0,34	0,34
0,38	0,31	0,33	0,32	0,37	0,30	0,36	0,35
0,37	0,35	0,40	0,37	0,39	0,39	0,53	0,45
0,28	0,34						

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 6

1. Даны множества A = {1; 2; 3; 4; 5}, B = {1; 3; 5}, C = {2; 4; 5}, D = {5}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы:
$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$ и $X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow X \wedge Y \Rightarrow Z$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	3	–2	1	4	–1
y	–3	10	4	5	1

4. Студент знает 18 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором два вопроса.

5. Имеются данные измерения длины плеча (в мм) мухоловки-пеструшки на 5-й день жизни: (h = 1,2)

13,7	14,3	10,3	13,0	13,0	12,0	17,3	13,4
12,1	10,1	14,0	11,3	16,3	11,7	13,0	10,4
15,0	14,1	13,1	16,3	11,6	11,5	13,2	14,3
13,5	10,4	12,3	11,3	11,0	13,1		

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 7

1. Даны множества A = {2; 6; 1}, B = {1; 3}, C = {1; 2; 3}, D = {5; 6}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $(X \Rightarrow Y) \wedge X \wedge \overline{Y}$ и $X \wedge Y \wedge \overline{X \vee Y}$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	–2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

4. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Три карточки вынимают наудачу одна за другой и укладывают на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «мяч».

5. Имеются данные измерения (в сек.) скорости механического ответа при комплексном свето-звуко-тактильном раздражении: (h = 0,04)

0,44	0,28	0,41	0,36	0,32	0,39	0,35	0,39	0,29
0,30	0,38	0,34	0,29	0,35	0,51	0,40	0,37	0,31
0,30	0,33	0,34	0,34	0,36	0,41	0,41	0,31	0,42
0,35	0,43	0,38						

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 8

1. Даны множества A = {2; 3; 5; 7; 9; 11}, B = {3; 7; 12}, C = {1; 2; 3}, D = {5; 6; 8}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, равносильны ли следующие формулы: $X \wedge Y \vee \overline{X} \wedge Y \vee \overline{X} \wedge \overline{Y}$ и $Y \vee \overline{X}$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

4. В урне находятся 15 шаров, из них 8 красных и 7 синих. Найти вероятность того, что вынутые наудачу два шара оба окажутся синими.

5. Имеются данные измерения величин интенсивности порогового раздражения глаз при длительности дачи света в 0,002 сек: (h = 0,83)

0,76	2,37	2,70	3,64	4,45	4,71	4,78	4,81
5,08	5,11	6,27	1,19	1,22	1,29	1,44	1,50
1,56	1,64	1,70	1,85	1,94	1,96	2,00	2,11
2,18	2,34	2,20	3,98	4,12	4,25	4,34	3,20
3,28	3,51	2,76	2,80	2,81	2,92	2,95	2,97
2,90	3,02	3,07	3,11	3,14	3,15	2,83	2,76
3,13	2,76						

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

Вариант 9

1.Даны множества A = {20; 35; 42; 55; 60; 68; 70}, B = {20; 60; 70}, C = {20; 60; 55; 70}, D = {35; 15; 55}. Найти: а) A∩D; б) B\D; в) $\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{D}$; *г*) $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{C})$.

2. Проверить, является ли данная формула тавтологией:
$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Z \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \wedge Z \Rightarrow Y))$.

3. Используя метод наименьших квадратов, вывести формулу $y = ax + b$, если

x	4	5	6	8	9
y	20	24	29	35	50

4. Два стрелка, для которых вероятность попадания в мишень равна соответственно 0,85 и 0,7, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

5. Имеются данные измерения латентных периодов механического ответа (в сек.) при даче светового сигнала во втором предъявлении: (h = 0,07)

0,39	0,41	0,61	0,19	0,23	0,20	0,34
0,42	0,21	0,19	0,37	0,25	0,24	0,27
0,66	0,22	0,35	0,24	0,29	0,31	0,38
0,20	0,36	0,26	0,28	0,32	0,24	0,28
0,25	0,27	0,30	0,33	0,27	0,29	0,26
0,30	0,33	0,29	0,31	0,33	0,32	0,33

Построить статистическое распределение выборки; построить полигон и гистограмму частот; дать характеристику распределения признака, вычислив для этого: а) медиану; б) моду; в) среднее арифметическое; г) дисперсию; д) среднее квадратичное отклонение.

4. Вопросы к экзамену

1. Множество, основные понятия, виды множеств.
2. Основные операции над множествами: пересечение, объединение, разность, прямое произведение.
3. Элементы математической логики: высказывания, операции над высказываниями, таблицы истинности, законы логики высказываний.
4. Матрица, основные виды матриц.
5. Основные операции над матрицами: сложение, вычитание, умножение на число, произведение матриц, нахождение обратной матрицы.
6. Определители 2-го и 3-го порядков; определение, свойства.
7. Решение систем 2-хлинейных уравнений с двумя неизвестными.
8. Методы решения систем трехлинейных уравнений с тремя неизвестными.
9. Функция нескольких переменных, определение, основные понятия.
10. Метод наименьших квадратов.
11. Элементы комбинаторики: правила сложения и умножения, виды комбинаторных соединений.
12. Виды событий, классическое определение вероятности события.
13. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
14. Элементы математической статистики: совокупность, выборка, полигон, гистограмма.
15. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке: $\overline{x}_r$, $\overline{x}_B$, $M\left(\overline{x}\right)$, D_r, D_B, σ_B, σ_r.

5. Тестовые задания на проверку теоретических знаний

1. Совокупность элементов, объединённых вместе по некоторому правилу или закону, называется …

а) подмножеством; б) множеством; в) объединением; г) пересечением.

2. Множество, элементы которого принадлежат одновременно всем данным множествам, называется …

а) объединением; б) разностью; в) подмножеством; г) пересечением.

3. Множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из данных множеств, называется …

а) объединением; б) разностью; в) подмножеством; г) пересечением.

4. Множество, элементы которого принадлежат первому множеству и не принадлежат второму множеству, называется …

а) объединением; б) разностью; в) подмножеством; г) пересечением.

5. Общее свойство всех элементов данного множества называется …

а) числовым; б) характеристическим; в) конечным; г) равным.

6. Множества, элементами которых являются числа, называются…

а) конечными; б) бесконечными; в) числовыми; г) пустыми.

7. Множества, элементы которых можно пересчитать, называются…

а) конечными; б) бесконечными; в) числовыми; г) пустыми.

8. Множества, элементы которых нельзя пересчитать, называются…

а) конечными; б) бесконечными; в) числовыми; г) пустыми.

9. Повествовательное предложение, о содержании которого можно сказать, истинно оно или ложно, называется …

а) тождеством; б) высказыванием; в) неравенством, г) тавтологией.

10. Высказывание, которое принимает истинные значения при любых наборах значений переменных, называется …

а) тождеством; б) высказыванием; в) неравенством, г) тавтологией.

11. Если n – количество переменных в данной формуле, k – количество знаков операций в формуле, то число строк в таблице истинности равно …

а) $n + k$; б) $2^n + 1$; в) 2^n; г) $n – k$.

12. Логическая операция, связывающая высказывания логической связкой «и», называется …

а) дизъюнкцией; б) эквиваленцией; в) конъюнкцией; г) импликацией.

13. Логическая операция, связывающая высказывания логической связкой «или», называется …

а) дизъюнкцией; б) эквиваленцией; в) конъюнкцией; г) импликацией.

14. Логическая операция, связывающая высказывания логической связкой «если, то», называется …

а) дизъюнкцией; б) эквиваленцией; в) конъюнкцией; г) импликацией.

15. Логическая операция, связывающая высказывания логической связкой «тогда и только тогда, когда», называется …

а) дизъюнкцией; б) эквиваленцией; в) конъюнкцией; г) импликацией.

16. Расположения данных **n** элементов в различном порядке называются …

а) размещениями; б) множествами; в) сочетаниями; г) перестановками.

17. Различные подмножества данного множества, содержащие **m** элементов из данных **n** элементов, называются …

а) размещениями; б) множествами; в) сочетаниями; г) перестановками.

18. Различные упорядоченные подмножества данного множества, содержащие **m** элементов из данных **n** элементов, называются …

а) размещениями; б) множествами; в) сочетаниями; г) перестановками.

19. Число сочетаний без повторений из **n** элементов по **m** элементов вычисляются по формуле …

а) $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$; б) $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$; в) $C_n^m = \frac{n!}{m!}$; г) $C_n^m = \frac{m!}{n!\cdot(n-m)!}$.

20. Число размещений без повторений из **n** элементов по **m** элементов вычисляются по формуле …

а) $A_n^m = n!$; б) $A_n^m = \frac{n!}{m!}$; в) $A_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$; г) $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

21. Число перестановок без повторений из **n** элементов по формуле …

а) $P_n = n$; б) $P_n = \frac{n!}{(n-1)}$; в) $P_n = n!$; г) $P_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

22. В данное определение вставьте пропущенное слово:

n! *(«эн-факториал») – это … последовательных натуральных чисел от* ***1*** *до* ***n****.*

а) сумма; б) разность; в) произведение; г) частное.

23. Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, называется …

а) испытанием; б) сочетанием; в) вероятностью; г) событием.

24. Результат действия или наблюдения называется …

а) вероятностью; б) событием; в) испытанием; г) комбинаторикой.

25. Событие, которое в данном опыте обязательно наступит, называется …

а) достоверным; б) невозможным; в) случайным; г) совместимым.

26. Событие, которое в данном опыте наступить не может, называется …

а) достоверным; б) случайным; в) невозможным; г) совместимым.

27. Событие, которое в данном опыте может как наступить, так и не наступить, называется …

а) достоверным; б) невозможным; в) случайным; г) совместимым.

28. Число, равное отношению числа событий, благоприятствующих данному событию, к числу всех возможных событий, называется …

а) сочетанием; б) комбинаторикой; в) событием; г) вероятностью.

29. Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий и вычисляется по формуле …

а) $P(A + B) = P(A) + P(B)$; б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$; в) $P(A\cdot B) = P(B)\cdot P_B(A)$; г) $P(AB)=P(B)\cdot P(A)$

30. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий, т. е. вычисляется по формуле ...

а) $P(A + B) = P(A) + P(B)$; б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

в) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$; г) $P(AB) = P(B) \cdot P(A)$

31. Вероятность наступления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме их вероятностей и вычисляется по формуле …

а) $P(A + B) = P(A) + P(B)$; б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

в) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$; г) $P(AB) = P(B) \cdot P(A)$

32. Вероятность произведения двух совместных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло, т.е. вычисляется по формуле…

а) $P(A + B) = P(A) + P(B)$; б) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$;

в) $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$; г) $P(AB) = P(B) \cdot P(A)$

33. Ломаная, которая соединяет точки с координатами $(x_i; n_i)$ или $(x_i; \frac{n_i}{n})$, называется …

а) гистограммой; б) полигоном; в) медианой; г) модой.

34. Совокупность прямоугольников, основаниями которых являются интервалы значений наблюдаемой величины, а высотой величина $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{p_i}{h}$, называется …

а) гистограммой; б) полигоном; в) медианой; г) модой.

35. Значение наблюдаемого признака, который встречается чаще всего, т.е. обладает наибольшей частотой, называется …

а) гистограммой; б) полигоном; в) медианой; г) модой.

36. Значение наблюдаемого признака, которое находится посередине статистического распределения выборки или совокупности, называется …

а) гистограммой; б) полигоном; в) медианой; г) модой.

37. Среднее арифметическое статистического распределения вычисляется по формуле:

а) $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i-1}^{k} n_i (x_i - M)^2}$; б) $n = \sum_{i=1}^{k} x_i$; в) $M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$; г) $P(A) = \frac{m}{n}$.

38. Среднее квадратическое отклонение статистического распределения вычисляется по формуле …

а) $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i-1}^{k} n_i (x_i - M)^2}$; б) $n = \sum_{i=1}^{k} x_i$; в) $M = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}$; г) $P(A) = \frac{m}{n}$.

39. Некоторая совокупность объектов, которые являются однородными по структуре и изучаются по одному и тому же качественному или количественному признаку, называется ...

а) генеральной статистической совокупностью; б) выборкой; в) модой; г) медианой.

40. Для изучения свойств всей генеральной совокупности чаще всего выбирают лишь часть объектов, эта часть называется …

а) генеральной статистической совокупностью; б) выборкой; в) модой; г) медианой.

41. Если выделить некоторые количественные или качественные признаки для конкретной выборки и провести изучение выборки по выделенным признакам, то их значение принято называть …

а) вариантой; б) выборкой; в) модой; г) медианой.

6. Темы рефератов

1. Основные этапы становления современной математики.
2. Аксиоматический метод. Математические доказательства.
3. Геометрия Евклида как первая из естественнонаучных теорий.
4. Элементы математической логики, её символы.
5. Элементы дискретной математики, теории графов.
6. Элементы теории множеств, основные понятия, операции над множествами.
7. Комплексные числа и действия над ними.
8. Матрицы, действия над ними.
9. Определители второго и третьего порядка, свойства, методы вычисления.
10. Линейные уравнения и системы, методы их решения.
11. Неравенства с одной переменной, их виды и методы их решения.
12. Векторы, операции над ними, применение векторов к решению задач.
13. Метод координат на плоскости и в пространстве, его развитие и применение.
14. Прямая линия на плоскости и в пространстве, основные задачи на прямую.
15. Симметрия в математике и в жизни.
16. Золотое сечение в математике и в жизни.
17. Линии второго порядка.
18. Поверхности второго порядка.
19. Движения, их виды, определение, свойства, применение движений к решению задач.
20. Преобразования плоскости, их виды, определение, свойства, применение движений к решению задач.
21. Что изучает проективная геометрия?
22. Геометрия Лобачевского.
23. Знакомство с топологией.
24. Число, история возникновения счёта, числовые множества.
25. Элементы теории функций одной переменной, определение, свойства, обзор элементарных функций.
26. Производная функции, её применение.
27. Неопределённый интеграл, определение, свойства, методы вычисления.
28. Понятие определённого интеграла и его приложения.
29. Дифференциальные уравнения, их виды и методы решения. (Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.)
30. Теория функций нескольких переменных, метод наименьших квадратов.
31. Элементы комбинаторики.
32. Элементы теории вероятностей: вероятность события, теоремы сложения и умножения вероятностей.
33. Случайные величины, их математические характеристики, примеры законов распределения. (Непрерывные и дискретные случайные величины.)
34. Основные понятия математической статистики.
35. Понятие о математическом моделировании, примеры моделей.

36. Знаменитые учёные и их вклад в развитие математики (Пифагор, Евклид, Декарт Р., Ферма П., Паскаль Б., Гюйгенс Х., Эйлер Л., Лагранж Ж., Гаусс К., Лобачевский Н. И., Абель Н., Галуа Э., Чебышев П. Л., Пуанкаре А., Гильберт Д., Виноградов И. М., Даламбер Ж., Диофант, Кантор Г., Клейн Ф., Ковалевская С. В., Лейбниц Г., Монж Г., Ньютон И., Остроградский М. В., Платон, ал-Хорезми).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Баврин И. И. Высшая математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2002.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие. – 12-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006.
3. Лобоцкая Н. Л. Основы высшей математики. – Минск: Высшая школа, 1978.

Дополнительная литература

1. Барт А. Г. Анализ медико-биологических систем. Метод частично обратных функций.- СПб: СпбГУ, 2003.
2. Бирхгофф Г. Математика и психология. – М., 1977.
3. Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.
4. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2003.
5. Виленкин Н. Я. и др. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1996.
6. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1984.
7. Гильде В. Зеркальный мир. – М.: Мир, 1982.
8. Гильдерман Ю. И. Лекции по высшей математике для биологов/ Отв. ред. Г. П. Акимов. – Новосибирск: «Наука», 1974.
9. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1985.
10. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1983.
11. Гнеденко Б. В. Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985.
12. Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М.: Знание, 1991.
13. Демидович Б. П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие для вузов. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2004.
14. Депман И. Я., Виленкин Н. Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1989.
15. Ильин В. А. Высшая математика. – М.: Проспект, 2002.
16. Ильин В. А., Куркина А. В. Высшая математика. – М.: ТК Велби, изд-во Проспект,2004.
17. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1984.
18. История математики/ Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970-1972.- Т. 1-3.
19. Крянев Ф. В., Лукин Г. В. Математические методы обработки неопределённых данных. – М.: Физматлит, 2004.

20. Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии. – М.: Наука, 1991.
21. Комацу М. Многообразие геометрии. – М.: Знание, 1981.
22. Курант Р., Робинс Г. Что такое математика? – М.: Просвещение, 1967.
23. Маркович Э. С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высшая школа, 1982.
24. Математика в понятиях и терминах/ Под ред. Л. В. Сабинина.– М.: Просвещение, 1978, 1982. - Т. 1,2.
25. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
26. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
27. Радемахер О., Теплиц Г. Числа и фигуры. – М.: Наука, 1966.
28. Ризниченко Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – М.: РХД, 2002.
29. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. – М.: Просвещение, 1987.
30. Самарский А. Математическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002.
31. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Физматлит, 1987.
32. Суходольский Г. В. Основы математической статистики для психологов. – СПб., 1998.
33. Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. – Киев, 1988.
34. Фомин С. В. Системы счисления. – М.: Наука, 1987.
35. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. Как рисовать математические картинки. – М.: Мир, 1991.
36. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1972.
37. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. – СПб.: Издательство «Лань», 2003.
38. Юшкевич А. П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.
39. Яглом И. М. Почти простые числа // Квант. - 1981. - №9.

Коростелева Светлана Михайловна

МАТЕМАТИКА

Контрольные задания для студентов первого курса заочного отделения факультета ПВС направления 030300.62 «Психология»

Редактор А.С. Мокина

Подписано в печать	Формат 60x84 1/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л.3,25	Уч.- изд. л. 3,25
Заказ	Тираж 50	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.