МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КУРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основы дифференциального исчисления функций одной переменной

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению самостоятельной работы
по разделу «Дифференцирование функций»
для студентов заочной формы обучения

050501, 090105, 140211, 150202,151001, 151002,
190201, 190202, 190601, 190603, 190701, 190702,
200503, 220301, 220601, 230105, 280101

Курган 2010

Кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования

Курс: «Математика»

Составили: канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ПМиКМ Т.А. Вержбалович,

ст. преподаватель кафедры ПМиКМ Л.В. Самойлова

Методические указания составлены на основе учебных программ по курсу «Математика»

Утверждены на заседании кафедры «16» марта 2009 г.

Рекомендованы методическим советом университета

«11» января 2010г.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания содержат основные определения, формулировки теорем и правила дифференцирования функций одной переменной, а также элементарные методы отыскания их производной и дифференциала. В брошюре предложено большое количество примеров с подробным решением, упражнения для самостоятельного решения и проверочные тесты, которые способствуют успешному освоению данного раздела студентами первого курса заочной формы обучения инженерно – технических специальностей.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

►- определения;

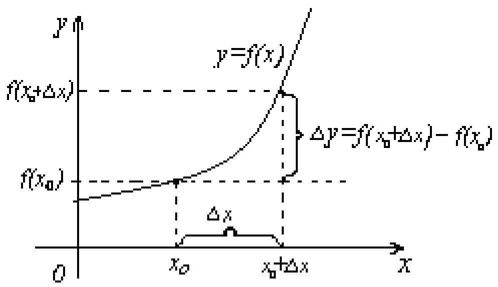
✐ - пример.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I. Производная функции

§1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X.



При каждом значении аргумента x_0 из этого промежутка функция $y = f(x)$ имеет определенное значение y_0, т.е. $y_0 = f(x_0)$.
Пусть аргумент x_0 получил некоторое приращение Δx, так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ также принадлежала промежутку X. Тогда функция y получит некоторое приращение Δy (рис 1),

Рис.1

т.е. $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это отношение показывает, во сколько раз на данном промежутке $[x_0; x_0 + \Delta x]$ приращение функции больше вызвавшего его приращения аргумента, т.е. среднюю скорость изменения функции y относительно аргумента x.

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т.е. $x \to x_0$, если он существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Замечание. Для любой непрерывной в точке x_0 функции существование этого предела связано с раскрытием неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, а следовательно, не гарантировано.

►***Производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю (если этот предел существует):**

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (1.1)$$

Таким образом, производная функции есть некоторая функция $y'(x)$, произведенная (т.е. полученная по некоторым правилам) из данной функции.

►Функция $y = f(x)$, имеющая производную в данной точке x_0, называется ***дифференцируемой*** в этой точке, а процесс её отыскания называется ***дифференцированием.***

Значение производной функции в конкретной точке $x = x_0$ обозначается одним из символов: $f'(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, y'(x_0)'; y'|_{x=x_0}$.

✐Пример 1. Найти производную функции $y(x) = C,\ C = const$.

Решение.

1. Значению x даем приращение $\Delta x \neq 0$;
2. Находим приращение функции Δy: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)=C - C =0$;
3. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

4. Следовательно, переходя к пределу, найдем производную данной функции:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \Rightarrow (C)' = 0.$$

Ответ. $C' = 0$.

✐Пример 2. Найти производную функции $y = x^2$.

Решение.

1. Значению x даем приращение Δx.
2. Находим приращение функции Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и находим его предел:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \Rightarrow (x^2)' = 2x.$$

Ответ. $\left(x^2\right)' = 2x$.

§2. Механический и геометрический смыслы производной. Уравнения касательной и нормали к кривой

Понятие производной функции в данной точке связано с понятием касательной к графику функции в этой точке.

Задача о касательной к кривой

Дадим общее определение касательной к кривой.

Возьмем на непрерывной кривой L две точки M_0 и M_1 и проведем секущую M_0M_1 (рис. 2).

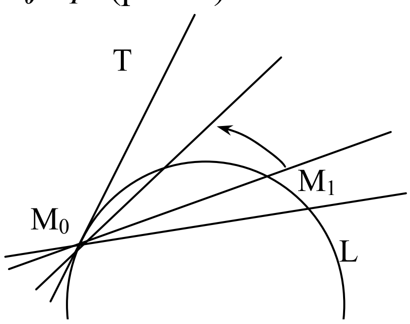


Рис. 2

Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M_0. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0T.

При неограниченном приближении точки M_1 по данной кривой к точке M_0 с любой стороны секущая стремится занять положение, определенное прямой M_0T.

►***Касательная*** есть прямая, занимающая предельное положение секущей.

Рассмотрим график непрерывной функции $y = f(x)$, имеющей в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ касательную (рис. 3). Найдем её угловой коэффициент $k = tg\ \alpha$, где α – угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

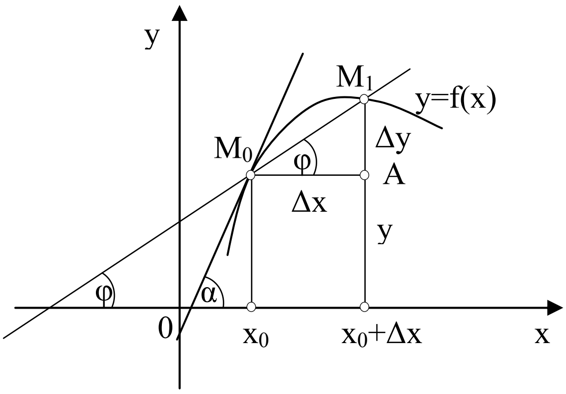


Рис. 3

При некотором значении $\boldsymbol{x = x_0}$ функция имеет значение $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$. Этим значениям на кривой соответствует точка $\boldsymbol{M_0(x_0;\ y_0)}$. Дадим аргументу $\boldsymbol{x_0}$ приращение $\boldsymbol{\Delta x}$. Новому значению аргумента $\boldsymbol{x_0 + \Delta x}$ соответствует «наращенное» значение функции $\boldsymbol{y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)}$.

Соответствующей ему точкой кривой будет точка $\boldsymbol{M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)}$. Проведем секущую $\boldsymbol{M_0M_1}$ и обозначим через $\boldsymbol{\varphi}$ угол, образованный секущей с положительным направлением оси $\boldsymbol{Ox}$.

Из прямоугольного треугольника $\boldsymbol{M_0M_1A}$ имеем:

$$k_{ńlę} = tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При $\boldsymbol{\Delta x} \to 0$ в силу непрерывности функции приращение $\boldsymbol{\Delta y}$ тоже стремится к нулю; поэтому точка $\boldsymbol{M_1}$ неограниченно приближается по кривой к точке $\boldsymbol{M_0}$, а секущая $\mathbf{M_0M_1}$, поворачиваясь около точки $\boldsymbol{M_0}$, переходит в касательную, следовательно,

угловой коэффициент касательной равен:

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (1.2)$$

$$\text{т.е. } k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (1.3)$$

Следовательно, производная функции в данной точке, с геометрической точки зрения, равна тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции в данной точке или угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке.

Если точка касания $\boldsymbol{M_0}$ имеет координаты $\boldsymbol{(x_0;\ y_0)}$, то, пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении $\boldsymbol{(y - y_0 = k(x - x_0))}$, можно записать ***уравнение касательной к графику функции***:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \qquad (1.4)$$

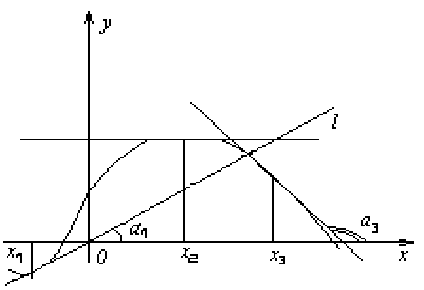


Рис. 4

Проведем касательные к графику функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3 (рис.4) и отметим углы, которые они образуют с положительным направлением оси абсцисс. Мы видим, что угол α_1 острый, что соответствует монотонному возрастанию функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в правой полуокрестности точки x_1; α_3 тупой, что соответствует монотонному убыванию функции

$y=f(x)$ в окрестности точки x_3, а угол $\alpha_2=0$, что соответствует случаю y=*Const* в окрестности точки x_2, так как график параллелен оси ***Ox.*** Тангенс острого угла положителен, тупого – отрицателен, а $tg0=0$.

Поэтому $f'(x_1)>0, f'(x_2)=0, f'(x_3)<0$.

Наряду с касательной к кривой в данной точке часто рассматривается нормаль этой кривой в точке.

►***Нормалью*** к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно к касательной в этой точке.

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то её угловой коэффициент связан с угловым коэффициентом касательной следующим равенством $k_{îîđě}\cdot k_{ęŕń}=-1$, т.е.

$$k_{îîđě}=-\frac{1}{k_{ęŕń}}=-\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{1.5}$$

►Поэтому ***уравнение нормали*** имеет вид: $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. (1.6)

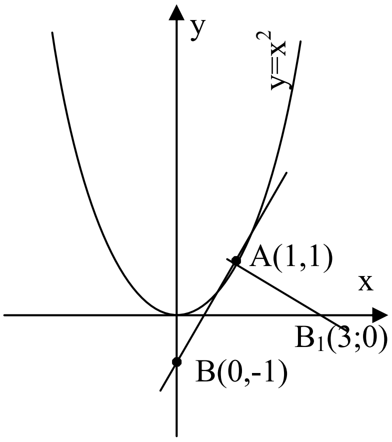


Рис. 5

✐Пример 3. Написать уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2$ в точке $A(1;1)$. Провести эти прямые.

Решение. Находим производную функции $y'=2x$.

Вычисляем согласно равенству (1.3) угловой коэффициент касательной в точке A:

$k=2\cdot1=2$.

Пользуясь уравнением (1.4), записываем уравнение касательной к параболе в точке A:

$y-1=2(x-1)$ или $y=2x-1$.

Чтобы построить эту касательную, используем данную точку $A(1;1)$ и вспомогательную точку, например, точку пересечения касательной с осью ординат $B(0;-1)$.

x	1	0
y	1	-1

Через эти две точки проведем прямую – касательную к данной параболе в точке $A(1;1)$ (рис. 5).

Используя уравнение (1.6), найдем уравнение нормали к параболе в точке $A(1;1)$:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{или} \quad x+2y-3=0.$$

Для построения нормали также достаточно иметь две точки: $A(1;1)$ и $B_1(3;0)$. Через эти точки строим нормаль к данной параболе в точке $A(1;1)$.

x	1	3
y	1	0

Задача о скорости прямолинейного движения

Пусть материальная точка (некоторое тело) ***M*** движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени ***t*** соответствует определенное расстояние
OM = S до некоторой фиксированной точки ***O***. Это расстояние зависит от истекшего времени ***t***, т.е. ***S=S(t)***. Это равенство называют ***законом движения точки***.

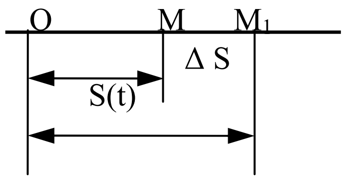


Рис. 6

Требуется найти скорость движения точки. Если в некоторый момент времени точка занимает положение ***M*** (рис. 6), то в момент времени $t + \Delta t$ (Δt – приращение времени) точка займет положение M_1, где $OM_1 = S + \Delta S$.
ΔS – приращение расстояния.

Таким образом, перемещение точки ***M*** за время Δt , будет

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает ***среднюю скорость*** движения точки за время Δt:

$$V_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент.

►Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется ***скоростью движения точки в данный момент времени*** (или мгновенной скоростью). Обозначив эту скорость через ***V=V(t)***, получим

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \tag{1.7}$$

В задаче про скорость прямолинейного движения было получено

$V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t$, ***т.е. скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.***

Обобщая, можно сказать, что если функция ***f(x) = y*** описывает какой-либо физический процесс, то ***производная*** y' ***есть скорость протекания этого процесса.*** В этом состоит ***физический смысл производной.***

§3.Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Существует односторонняя связь между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции. Непрерывность лишь необходимое условие дифференцируемости, но недостаточное.

Теорема 3.1. Если функция имеет производную в некоторой точке x_0**, то она непрерывна в этой точке.**

Обратная теорема неверна: непрерывная функция может не иметь производной.

Известно, что в математике для отрицания некоторого утверждения достаточно привести лишь один контрпример. Примером такой функции является функция

$$y=|x|=\begin{cases} x, \text{íńëč } x \ge 0 \\ -x, \text{íńëč } x < 0 \end{cases}$$

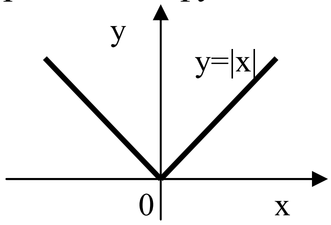


Рис. 7

Изображенная на рис. 7 функция непрерывна в точке x=0, но не дифференцируема в ней. Действительно, в точке x= 0 имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases} 1, \text{íńëč } \Delta x \ge 0 \\ -1, \text{íńëč } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т.е. функция $y=|x|$ не имеет производной в точке x =0, а график функции не имеет касательной в этой точке.

Таким образом, требование дифференцируемости функции в точке является более сильным, чем требование непрерывности, поскольку из первого автоматически вытекает второе.

Замечание. 1. Существуют так называемые односторонние производные.

►***Правой (левой) производной функции*** в точке называется предел справа (слева) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю справа (слева). Они обозначаются соответственно $f'_+(x)\,(f'_-(x))$.

Теорема 3. 2. Для того, чтобы функция имела производную в точке необходимо и достаточно, чтобы были равны односторонние производные

Замечание 2. Производная непрерывной функции сама не обязательно является непрерывной. Например, $y=\sqrt{x}$ непрерывна в точке x =0, но $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ имеет разрыв в этой точке.

►Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную $y'=f'(x)$ в некотором интервале, то функция там называется ***гладкой.***

§4. Алгоритмы дифференцирования

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Составим **таблицу производных** простейших элементарных функций.

Таблица 1

1.1. $(C)'=0$;

1.2. $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, в частности $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$;

1.3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$, в частности $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;

1.4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, в частности $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

1.5. $\left(\sin x\right)' = \cos x$; 1.6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

1.7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 1.8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

1.9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 1.10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 1.12. $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Поскольку производная любой элементарной функции есть также элементарная функция, то результат операции дифференцирования не выводит из класса элементарных функций

Пример 4. Найдите производные функций:

а) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Решение.

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}},\ y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$ (1.2 из табл.1).

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

Решение.

$$y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = x^{-\frac{3}{5}},$$

$$y' = \left(x^{-\frac{3}{5}}\right)' = -\frac{3}{5}x^{-\frac{3}{5}-1} = -\frac{3}{5}x^{-\frac{8}{5}} = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^8}} = -\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}$$ (1.2 из табл. 1).

4.1. Общие теоремы дифференцирования

Теорема 4.1 Если функции *u(x)* и *v(x)* дифференцируемы в точке *x*, то их сумма, разность, произведение и частное (последнее при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; (1.8)

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$; (1.9)

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$. $(v \neq 0)$. (1.10)

Следствие. 1. *Производная произведения нескольких дифференцируемых функций равна сумме произведений производной каждого из этих сомножителей на все остальные*, т.е. $(u\cdot v\cdot w)' = u'\cdot v\cdot w + u\cdot v'\cdot w + u\cdot v\cdot w'$.

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*, т.е.

$$(C\cdot u)' = C\cdot u'. \qquad (1.11)$$

3. $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{1}{C}\cdot u', \quad C = const. \qquad (1.12)$

4. $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{C\cdot v'}{v^2}, C = const. \qquad (1.13)$

✐Пример 5. Найдите производные функций:

а) $y = x + \sin x$.

Решение. Обозначим $u(x) = x$ и $v(x) = \sin x$. Воспользуемся формулами (1.2 и 1.5) из табл.1: $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos x$.

По формуле (1.8) из теоремы 4.1 получим

$$y' = (x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$$

б) $y = x^2 - \cos x + 2$.

Решение. Обозначим $u(x) = x^2, v(x) = \cos x$, C=2. Тогда по формулам (1.1,1.2 и 1.6) из табл.1 $u'(x) = 2x$; $v'(x) = -\sin x; (C)' = 0$.

По формуле (1.8) из теоремы 4.1, получим

$$y' = \left(x^2 - \cos x + 2\right)' = \left(x^2\right)' - (\cos x)' + (2)' = 2x + \sin x.$$

в) $y = x\cdot\sin x$.

Решение. Обозначим $u(x) = x$ и $v(x) = \sin x$.

Согласно формуле (1.9) из теоремы 4.1 имеем

$$y' = (x\cdot\sin x)' = (x)'\cdot\sin x + (\sin x)'\cdot x,$$

но $u'(x) = 1$; $v'(x) = \cos x$ (1.2 и 1.5 из табл.1), поэтому

$$y' = (x\cdot\sin x)' = 1\cdot\sin x + \cos x\cdot x = \sin x + x\cos x.$$

г) $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$.

Решение. Обозначим $u(x) = x^2$ и $v(x) = x^3 - 1$.

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^3-1}\right)' = \frac{\left(x^2\right)'\left(x^3-1\right) - \left(x^2\right)\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)^2}$$ (формула 1.10, теорема 4.1),

$\left(x^2\right)' = 2x$ и $\left(x^3 - 1\right)' = \left(x^3\right)' - (1)' = 3x^2 - 0 = 3x^2$

(1.1 и 1.2 из табл.1,1.8 теорема 4.1).

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^3 - 1} \right)' = \frac{2x(x^3 - 1) - (x^2)(3x^2)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 2x - 3x^4}{(x^3 - 1)^2} = \frac{-2x - x^4}{(x^3 - 1)^2}.$$

д) $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$.

Решение. Используем

$$y' = (x^4 - 3x^2 + 2x - 1)' = (x^4)' - (3x^2)' + (2x)' - (1)' =$$

$$= 4x^3 - 3(x^2)' + 2(x)' - 0 = 4x^3 - 6x + 2$$

(1.8 и 1.11 из теоремы 4.1, 1.2 из табл. 1).

4.2. Производная сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $\varphi(x) = u$, тогда $y = f[\varphi(x)]$- суперпозиция двух функций, где y зависит от x, через промежуточную переменную u, т.е. функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема 4.2. Если функция $\varphi(x)=u$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке $\varphi(x)=u$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет производную y'_x в точке x, которая находится по формуле

$$f'_x[\varphi(x)] = y'_u \cdot u'_x . \qquad (1.14)$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x . \qquad (1.15)$$

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая обратную функцию $x = \varphi(y)$.

Теорема 4.3. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x=\varphi(y)$,также имеет производную $\varphi'(y)$,в соответствующей точке, определяемую равенством

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{или} \qquad x'(y) = \frac{1}{y'_x}. \qquad (1.16)$$

Таким образом, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

✐Пример 6. Найти производную функции $y = \sin^3 2x$.

Решение. Данная функция является сложной. Её можно представить в виде суперпозиции «простых» функций: $y=u^3$, где $u = \sin z$, $z = 2x$.

По правилу дифференцирования сложной функции и табл. 1 (1.2; 1.5) получаем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_x$$

$$y'_x = 3u^2 \cdot \cos z \cdot z' = 3\sin^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 6\sin^2 2x \cdot \cos 2x.$$

✎Пример 7. Найти производную функции $y = (arctg 2x)^3$.

Решение.

$$y' = \left((arctg 2x)^3\right)' = 3 arctg^2 2x \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{6}{1+4x^2} \cdot arctg^2 2x.$$

(1.2 из табл. 1 и 2.2 и 2.11 из табл. 2 на стр.14).

✎Пример 8. Найти производную y'_x функции $y = \sqrt[3]{x-1}$, пользуясь правилом дифференцирования обратной функции.

Решение. Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$ (табл.1,1.2). Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

С другой стороны, найдем производную функции $y(x)$ по правилам дифференцирования сложной функции, т.е. представим её в виде суперпозиции «простых» функций: $y = u^{\frac{1}{3}}$, где $u = x - 1$, тогда получим следующую производную

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$y'_x = \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3 \cdot (x-1)^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

4.3. Сводка формул дифференцирования сложных функций

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций, поэтому в приведенной табл. 1 формул дифференцирования простейших элементарных функций аргумент x заменен на промежуточный аргумент $u = u(x)$.

Таблица 2

2.1. $(C)' = 0$;

2.2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, в частности $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$;

2.3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

2.4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

2.5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

2.6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

2.7. $(tg u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

2.8. $(ctg u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

2.9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 2.10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

2.11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 2.12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

Так как при $u = x$, $u' = 1$, то табл. 2 обобщает табл. 1.

Пример 9. Найдите производные функций:

а) $y = \cos^5 x$.

Решение. Обозначим $u(x) = \cos x$. Тогда $y = u^5$. По формулам 2.2 табл. 2 и 1.6 из табл. 1 находим производную функции

$$y' = 5u^4 \cdot u' = 5\cos^4 x \cdot (\cos x)' = 5\cos^4 x \cdot (-\sin x).$$

б) $y = \ln \sin x$.

Обозначим $u(x) = \sin x$,тогда $y = \ln u$. По формулам 2.4 из табл. 2, 1.5 из табл. 1 находим производную $y' = \frac{1}{u} u' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$.

в) $y = \ln\cos(x^4 + 3)$.

Решение.

Обозначим $u(x) = \cos(x^4 + 3)$, $z = x^4 + 3$,тогда $y = \ln u$,где $u = u(z)$. По формулам 2.4 и 2.6 из табл. 2, 1.2 из табл. 1 находим производную $y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_x$

$$y' = \left(\ln\cos(x^4 + 3)\right)' = \frac{1}{\cos(x^4+3)} \cdot \left(-\sin(x^4+3)\right) \cdot 4x^3 = -4x^3 \cdot tg(x^4+3).$$

(1.2 из табл.1 и 2.4 и 2.6 из табл. 2).

г) Найти производную функции $y = \log_2^3 tgx^4$.

Решение.

Данная функция является сложной. Её можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y=u^3$, где $u = \log_2 z$, $z = tgq$, $q = x^4$.

По правилу дифференцирования сложной функции и табл. 1(1.2, 1.4;1.7) получаем:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x$$

$$y'_x = 3\log_2^2 tgx^4 \cdot \frac{1}{tgx^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3 \cdot$$

д) $y = 7^{tgx}$.

Решение. Обозначим $u(x) = tgx, u' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y' = \left(7^{tgx}\right)' = \left(7^u\right)' = 7^u \ln 7 \cdot u' = 7^{tgx} \cdot \frac{\ln 7}{\cos^2 x}.$$

(1.7 из табл.1 и 2.3 из табл.2).

Приобретя некоторый опыт, эти замены можно делать мысленно, не записывая их.

е) $y = sin^3 \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$y' = \left(sin^3 \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 3 sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(sin \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = 3 sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot cos \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)' =$$

$$= -3 sin^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot cos \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(1.2 из табл.1 и 2.2 и 2.5 из табл. 2).

ж) $y = 3 arccos \sqrt{1 - x^2}$.

Решение.

$$y' = \left(3 arccos \sqrt{1 - x^2} \right)' = -\frac{3}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = 3 \frac{x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \left| \sqrt{x^2} = |x| \right| = \pm \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(1.11 из теоремы 4.1, 1.2 из табл. 1 и 2.2 и 2.10 из табл. 2).

з) $y = e^{-x^2}$.

Решение.

$$y' = \left(e^{-x^2} \right)' = e^{-x^2} \cdot \left(-x^2 \right)' = -2x \cdot e^{-x^2}.$$

(1.2 из табл. 1 и 2.3 из табл. 2)

✎Пример 10. Найти производную функции $y = \frac{2x^3}{tgx}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{2x^3}{tgx} \right) = 2 \cdot \frac{(x^3)' \cdot tgx - x^3 \cdot (tgx)'}{(tgx)^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 \cdot tgx - x^3 \cdot \frac{1}{cos^2 x}}{(tgx)^2}.$$

(1.10 и 1.11 из теоремы 4.1, 1.2 и 1.7 из табл. 1).

✎Пример 11. Найти производную функции $y = cos(ln^{12} 2x)$.

Решение. Данную функцию можно представить следующим образом:

$$y = cos\, u,\ u = t^{12},\ t = ln\, z,\ z = 2x,$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_t \cdot t'_z \cdot z'_x \Rightarrow y'_u = (cos\, u)' = -sin\, u,\ u'_t = \left(t^{12} \right)' = 12t^{11},$$

$$t'_z = (ln\, z)' = \frac{1}{z},\ z'_x = (2x)' = 2.$$

$$y'_x = -\sin u \cdot 12 \cdot t^{11} \cdot \frac{1}{z} \cdot 2 \Rightarrow y'_x = -\sin t^{12} \cdot 12(\ln z)^{11} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = -\sin(\ln z)^{12} \cdot 12\ln^{11} z \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y'_x = -12\sin(\ln^{12} 2x) \cdot \ln^{11} 2x \cdot \frac{1}{x}.$$

(1.11 из теоремы 4.1, 1.2 из табл. 1 и 2.2 и 2. 4 из табл. 2).

✐Пример 12. Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}\right)' =$$

$$= \frac{2}{15}\frac{(3x^3 + 4x^2 - x - 2)' \cdot \sqrt{1+x} - (\sqrt{1+x})' \cdot (3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{(\sqrt{1+x})^2} =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot \frac{(9x^2 + 8x - 1) \cdot \sqrt{1+x} - 1/(2\sqrt{1+x}) \cdot (3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{1+x} =$$

$$= \frac{2}{15} \cdot \frac{2 \cdot (9x^2 + 8x - 1)(1+x) - (3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{2 \cdot (1+x) \cdot \sqrt{1+x}} = (1+x)^{1/2} \cdot x.$$

(1.8,1.10 и 1.12 из теоремы 4.1, 1.2 из табл.1 и 2.2 и 2.10 из табл. 2).

б) $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$.

Решение.

$$y' = (\sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a})' = (\sqrt{x})' \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) +$$

$$+ \sqrt{x} \cdot (\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}))' - (\sqrt{x+a})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) +$$

$$+ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+a}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+a}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{x+a}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}).$$

(1.9 из теоремы 4.1, 1.2 из табл.1 и 2.4 табл.2).

в) $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.

Решение.

$$y' = \left(\sin\sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}\right)' = (\sin\sqrt{3})' + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sin^2 3x)' \cdot \cos 6x - \sin^2 3x \cdot (\cos 6x)'}{\cos^2 6x} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot \cos 6x + 6 \cdot \sin^2 3x \cdot \sin 6x}{\cos^2 6x} =$$

$$=\frac{\sin 6x\cdot\cos 6x+2\sin^2 3x\cdot\sin 6x}{\cos^2 6x}=\left|\sin^2 3\tilde{o}=\frac{1-\cos 6\tilde{o}}{2}\right|=$$

$$=\frac{\sin 6x\cdot\cos 6x+(1-\cos 6x)\sin 6x}{\cos^2 6x}=\frac{\sin 6x}{\cos^2 6x}.$$

(1.8 и 1.10 из теоремы 4.1, 1.1, 1.2 из табл.1 и 2.2 ,2.5 и 2.6 из табл.2).

г) $y=arctg\,\frac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}$.

Решение.

$$y'=\left(arctg\,\frac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{tgx-ctgx}{\sqrt{2}}\right)'=$$

$$=\frac{2}{2+tg^2x-2tgx\cdot ctgx+ctg^2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\sqrt{2}\,\frac{1}{tg^2x+ctg^2x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\sqrt{2}\,\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$$

(1.10 из теоремы 4.1, 1.7 и 1.8 из табл.1 и 2.11из табл.2).

✎Пример 13. Найти производную функции $y=\left(x^4+3x^2+2x+3\right)^{20}$ и вычислить её значение в точке: $x_0=0$.

Решение.

$$y'=\left(\left(x^4+3x^2+2x+3\right)^{20}\right)'=20\left(x^4+3x^2+2x+3\right)^{19}\cdot\left(4x^3+6x+2\right).$$

$$y'(0)=20\cdot 3^{19}\cdot 2=40\cdot 3^{19}$$

Зная правила дифференцирования и таблицу производных, сможем найти уравнения касательной и нормали к любой кривой в данной точке.

✎Пример 14. Составить уравнение нормали к данной кривой $y=\frac{(4x-x^2)}{4}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Уравнение нормали: $y=y(x_0)-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$.

Подставляя в уравнение параболы заданную абсциссу x_0=1, найдем её ординату

$$y(x_0)=y(1)=\frac{3}{4}.$$

Найдем производную функции и значение производной в точке x_0=1.

$$y' = \left(\frac{1}{4}(4x - x^2)\right)' = \frac{1}{4}(4 - 2x)$$

.

$$y'(1) = \frac{1}{2}$$

Итак, уравнение нормали имеет вид $y = \frac{3}{4} - 2(x-1)$ *èëè* $y = -2x + \frac{11}{4}$.

✐Пример 15. Составить уравнение касательной к данной кривой $y = \sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой x_0 =-3.

Решение. Уравнение касательной имеет вид: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Подставляя в уравнение кривой заданную абсциссу x_0=-3, найдем её ординату

$$y(x_0) = y(-3) = 1.$$

Найдем производную функции и значение производной в точке x_0=-3.

$$y' = \left(\sqrt{x+4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}; \qquad y'(-3) = \frac{1}{2}.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 1 + \frac{1}{2}(x+3)$ или $x - 2y + 5 = 0$.

4.4. Неявно заданная функция

Напомним, что функция называется ***явной***, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной.

Например, функция $y = \sin x + x^3$ - явная.

►Если функция $y=f(x)$,определенная на сегменте [$a; b$] такова, что уравнение **F(x; y)=0** при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, то данная функция ***y=f(x) задана неявно.***

Всякую явно заданную функцию $y = f(x)$ можно записать как неявно заданную уравнением $f(x) - y = 0$, но не наоборот.

Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно y (например, $y + 2x + \cos y - 1 = 0$ или $2^y - x + y = 0$). В таком случае функцию y приходится изучать пользуясь непосредственно уравнением, определяющим эту функцию.

Известно, что равенство в общем случае нельзя дифференцировать почленно. Предполагая, что в данном уравнении вместо y подставлено его явное выражение, получим тождество $F(x, y) \equiv 0$, причем здесь y есть функция от x. Очевидно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому взяв производные от обеих частей тождества и применив правило дифференцирования сложной функции, получим линейное уравнение относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

При дифференцировании неявной функции используются все правила дифференцирования сложной функции и таблица производных.

✐Пример 16. Найти производные функций y, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. Дифференцируя по x, получим выражение

$$3x^2 + 3\cdot y^2 \cdot y' - 3(1\cdot y + x\cdot y') = 0.$$

Сгруппируем слагаемые с y': $y^2 y' - xy' = y - x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$.

б) $\cos(xy) = x$.

Решение.

$$\left(\cos\left(\mathrm{xy}\right)\right)' = \mathrm{x}' \Rightarrow -\sin\left(\mathrm{xy}\right)\left(\mathrm{x}'\mathrm{y} + \mathrm{xy}'\right) = 1 \Rightarrow -\sin\left(\mathrm{xy}\right)\left(\mathrm{y} + \mathrm{xy}'\right) = 1 \Rightarrow \mathrm{y}' = -\frac{1 + \text{ó}\sin\left(\text{õó}\right)}{\text{õ}\sin\left(\text{õó}\right)}.$$

в) $e^{\frac{x}{y}} - x^2 y = 0$;

Решение.

$$\left(e^{\frac{x}{y}}\right)' - \left(x^2 y\right)' = 0 \Rightarrow \left(l^{\frac{x}{y}}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)' - 2xy - x^2 y' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x}{y}} \frac{y - xy'}{y^2} - 2xy - x^2 y' = 0 \Rightarrow \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} - \frac{e^{\frac{x}{y}} xy'}{y^2} - 2xy - x^2 y' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}}\cdot x}{y^2} + x^2\right) = \frac{e^{\frac{x}{y}} - 2xy^2}{y} \Rightarrow y'\left(\frac{e^{\frac{x}{y}} x + x^2 y^2}{y^2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{y}} - 2xy^2}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(e^{\frac{x}{y}} - 2xy^2\right)\cdot y}{x\, e^{\frac{x}{y}} + x^2 y^2}.$$

4.5. Функция, заданная параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{t}); \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{t}), \end{cases} \qquad (1.17)$$

где t - вспомогательная переменная, называемая ***параметром***.

Уравнения 1.17, вообще говоря, определяют y как сложную функцию от x. В самом деле, если возможно, исключим параметр и разрешим первое уравнение системы относительно параметра t, $t = \varphi\left(x\right)$, подставим во второе уравнение, следовательно, $y = y[\varphi(x)]$. На практике это бывает затруднительным, а иногда невозможным.

Найдем производную y'_x, считая, что функции ***x=x(t)*** и ***y=y(t)*** имеют производные и функция ***x=x(t)*** имеет обратную функцию ***t=φ (x).***

По правилу дифференцирования обратной функции (теорема 4.3)

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}. \tag{1.18}$$

Функцию ***y = f(x),*** определяемую параметрическими уравнениями (1.17), можно рассматривать как сложную функцию ***y=y(t)***, где $t = \varphi(x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции: $y'_x = y'_t \cdot t'_x$.

С учетом равенства (1.18) получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{1.19}$$

Полученная формула позволяет находить производную y'_x от функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости ***y*** от ***x***.

Пример 17. Пусть $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение: имеем $x'_t = 3t^2$, $\quad y'_t = 2t \Rightarrow y'_x = \dfrac{2t}{3t^2} = \dfrac{2}{3t}$.

В этом можно убедиться, если исключить параметр t, т.е. найти непосредственно зависимость ***y*** от ***x***. Действительно,

$$t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y = \frac{2}{3t}.$$

Пример 18. Пусть $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение: имеем

$$x'_t = 2 \cdot 2\cos t \cdot (-\sin t) = -2\sin 2t, \quad y'_t = 3 \cdot 2\sin t \cdot \cos t = 3\sin 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3\sin 2t}{2\sin 2t} = -\frac{3}{2}.$$

В этом можно убедиться, если исключить параметр t, т.е. найти непосредственно зависимость ***y*** от ***x***. Действительно,

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \cos^2 t \\ + \\ \dfrac{y}{3} = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \sin^2 t + \cos^2 t \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

- это уравнение прямой линии, которая наклонена к положительному направлению оси Ox под постоянным углом $\varphi = arctg\left(-\frac{3}{2}\right)$для всех x, о чем говорит значение найденной производной.

✐Пример 19. Пусть $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$. Найти y'_x.

Решение: имеем

$$x' = e^{-2t} \cdot (-2), \quad y'_t = e^{4t} \cdot 4 \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{4e^{4t}}{2e^{-2t}} = -2e^{6t} .$$

4.6. Логарифмическое дифференцирование

Логарифмическое дифференцирование применяется при дифференцировании –функции вида $y=f(x)^{\varphi(x)}$, а также частного или произведения нескольких функций:

Логарифмируем обе части данного уравнения, т.е. $\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)}$ и используем свойства логарифмов $\ln y = \varphi(x)\ln f(x)$.

1. Затем дифференцируем обе части, полученного равенства, как тождество, где $\ln ó$, есть сложная функция от x: $\frac{ó'}{ó} = \varphi'(ő)\ln f(ő) + \frac{\varphi(ő)f'(ő)}{f(ő)}$.

2. Выражаем y': $y' = \left(\varphi'(ő)\ln f(ő) + \frac{\varphi(ő)f'(ő)}{f(ő)}\right).y$

3. Заменяем y его выражением через x и определяем $ó'$:

$$ó' = \left[\varphi'(ő)\ln f(ő) + \frac{\varphi(ő)f'(ő)}{f(ő)}\right]ó. \qquad (1.20)$$

✐Пример 20. Найти производные функций: а) $y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Решение. Можно найти $ó'$ с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование.

1. Логарифмируем функцию

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

2. Дифференцируем обе части, полученного равенства по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

3. Выражаем $ó'$:

$$y' = \frac{\left(x^2+2\right)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}\right).$$

б) $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$.

Решение. Пользуясь формулой (1.20), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \left[\ln \sin 2x \cdot 2x + \frac{(x^2+1)}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 \right].$$

в) $y = (arctgx)^{\frac{1}{2} \ln arctgx}$.

Решение.

1. $\ln y = \frac{1}{2} \ln arctgx \cdot \ln arctgx$.

2. $(\ln y)' = \frac{1}{2}((\ln arctgx)^2)'$.

3. $\frac{y'}{y} = \frac{\ln arctgx}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

4. $y' = \frac{\ln arctgx}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot (arctgx)^{\frac{1}{2} \ln arctgx}$.

4.7. Производные высших порядков

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$, есть также функция от x и называется *производной первого порядка*.

►Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная называется ***производной второго порядка*** и обозначается

$$y'' = (y')' \left(\text{čëč} \ \ f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2} \right). \tag{1.21}$$

Вторая производная от пути $S(t)$ по времени t есть ***величина ускорения прямолинейного движения точки*** – это ***механический смысл производной второго порядка***, т.е.

$$S_t'' = a . \tag{1.22}$$

►***Производной n –го порядка (или n-ой производной)*** называется производная от производной (n - 1) порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'. \tag{1.23}$$

Производные порядка выше первого называют ***производными высших порядков***.

Начиная с производной четвертого порядка производные обозначаются римскими цифрами или числами в скобках ($y^{(5)}$ ***čëč*** y^V).

Нахождение производных высших порядков производится по тем же правилам и таблицам, что и нахождение производной 1-го порядка.

Для вычисления производной n-го порядка от произведения двух функций используют формулу Лейбница:

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)}.$$

✐Пример 21. Найти n-ю и 13-ю производные функции $y=ln\left(x+1\right)$.

Решение: $y=ln\left(x+1\right)$

$$y'=\left(ln\left(x+1\right)\right)'=\frac{\left(x+1\right)'}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

$$y''=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=-\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$$

$$y'''=\left(-\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\right)'=\frac{1\cdot 2}{\left(x+1\right)^3}.$$

Можно доказать, что для любого номера n

$$y^{(n)}=\frac{\left(-1\right)^{n+1}\cdot\left(n-1\right)!}{\left(x+1\right)^n}.$$

В частности, $y^{(13)}=\frac{\left(-1\right)^{13+1}\cdot\left(13-1\right)!}{\left(x+1\right)^{13}}=\frac{12!}{\left(x+1\right)^{13}}$.

✐Пример 22. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x=cos\,2t, \\ y=sec^2\,t. \end{cases}$

Решение.

Используем следующие формулы для нахождения производной второго порядка от функции, заданной параметрически:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{и} \quad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'}=\frac{y''x'-x''y'}{\left(x'\right)^3}.$$

1. $x'_t=(cos\,2t)'=-2\,sin\,2t=-4\,cos\,t\,sin\,t$, $y'_t=\left(\frac{1}{cos^2\,t}\right)'=2\frac{sin\,t}{cos^3\,t}$.

2. $y'_x=\frac{2\frac{sin\,t}{cos^3\,t}}{-4\,cos\,t\,sin\,t}=-\frac{1}{2\,cos^4\,t}$.

3. $(y'_x)'_t=\left(-\frac{1}{2\,cos^4\,t}\right)'=-\frac{2\,sin\,t}{cos^5\,t}$.

4. $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \dfrac{2\sin t}{\cos^5 t(-4)\cos t \cdot \sin t} = \dfrac{1}{2\cos^6 t}$.

✎Пример 23.Найти пятую производную от функции $y = \left(2x^2 - 7\right)\ln\left(x-1\right)$.

Решение.

Для нахождения пятой производной применим формулу Лейбница при $n = 5$:

$$y^{(5)} = (uv)^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v' + 10u^{(3)}v'' + 10u''v^{(3)} + 5u'v^{(4)} + uv^{(5)}.$$

Найдем пять производных от функций $u = 2x^2 - 7$ и $v = \ln\left(x-1\right)$.

$$u' = 4x;\;\; u'' = 4;\;\; u''' = u^{(4)} = u^{(5)} = 0.$$

$$v' = \frac{1}{x-1};\; v'' = -\frac{1}{(x-1)^2};\; v''' = \frac{2}{(x-1)^3};\; v^{(4)} = -\frac{6}{(x-1)^4};\; v^{(5)} = \frac{24}{(x-1)^5}.$$

Так как третья, четвертая и пятая производные от u равны нулю, то получим следующее выражение:

$$y^{(5)} = 10u''v''' + 5u' \cdot v^{(4)} + u \cdot v^{(5)} =$$

$$= \frac{10 \cdot 4 \cdot 2}{(x-1)^3} - \frac{5 \cdot 4x \cdot 6}{(x-1)^4} + \frac{(2x-7) \cdot 24}{(x-1)^5} = 8 \cdot \frac{10x^2 - 29x + 4}{(x-1)^5}.$$

Раздел II. Дифференциал функции

§ 1. Понятие дифференциала функции

Замечено, что приращение дифференцируемой функции Δy, вызванное достаточно малым приращением её аргумента Δx, представимо в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно Δx (пропорционального Δx) и нелинейного относительно Δx. При $\Delta x \to 0$ оба слагаемых являются бесконечно малыми, а предел отношения второго слагаемого к Δx равен нулю, т.е.

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + 0(\Delta x), \qquad (1.24)$$

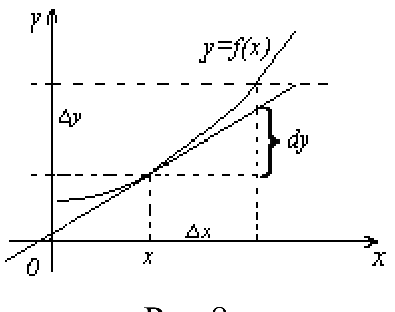


Рис 8

где A – постоянная, не зависящая от *Δő*,но, вообще говоря, зависящая от x.

► **Если приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x может быть представлено по формуле (1.24), то главная линейная часть приращения функции $A \cdot \Delta x$,пропорциональная приращению аргумента, называется *дифференциалом* этой функции.**

Таким образом, можно сказать, что дифференциал функции представляет собой главную линейную часть бесконечно малого приращения функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается символом dy (рис. 8).

По определению

$$df(x) = A\Delta x. \tag{1.25}$$

Данная функция может иметь только один дифференциал.

Между существованием производной и существованием дифференциала существует взаимная связь.

Теорема 5.1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела дифференциал в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела производную.

Итак, понятия дифференциала и дифференцируемости функции равносильны.

Если функция имеет производную в точке ***ő***$_0$, то $f'($***ő***$_0) = A$,а $f'(x_0)\cdot \Delta x$ – есть *дифференциал* функции в точке ***ő***$_0$, т.е.

$$f'(x_0)\cdot \Delta x = dy. \tag{1.26}$$

Условимся называть дифференциалом независимой переменной дифференциал функции равной x, т.е. будем считать, что дифференциал независимой переменной равен её приращению, $dx = \Delta x$.

Тогда выражение (1.26) заменим выражением

$$dy = f'(x)dx. \tag{1.27}$$

Выразим производную из (1.27) и получим

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{1.28}$$

Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

Часто это отношение рассматривается просто как символ, обозначающий производную функции по x.

§ 2. Основные правила дифференцирования

1. $dC = 0$.

2. $d(Cu) = Cdu$.

3. $u(x)$ *и* $v(x)$ – дифференцируемые функции от *x*.

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

б) $d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv$.

в) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}$, при $v \neq 0$.

Теорема 5.2. Дифференциал сложной функции $y = f\left[\varphi(x)\right]$ равен произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента.

Это свойство дифференциала сложной функции называется ***инвариантностью (неизменностью) формы дифференциала.***

►Дифференциал от дифференциала данной функции называется ***дифференциалом 2-го прядка.***

$$d^2y=d^2f\left(x\right)=d\left(dy\right)=d\left(f'_x dx\right)=\left[\left(f'_x\right)' dx\right]dx=f''dx^2 . \tag{1.29}$$

✐Пример 24.Найти дифференциал функции

$$f\left(x\right)=3x^2-sin\left(1+2x\right).$$

Решение: по формуле (1.27) находим

$$dy=\left(3x^2-sin(1+2x)\right)' dx=\left(6x-2\,cos(1+2x)\right)dx .$$

✐Пример 25. Найти дифференциал функции $y=ln\left(1+e^{10x}\right)+\sqrt{x^2+1}$ и вычислить его при x =0 и dx =0,1:

Решение.

По формуле (1.28) находим:

$$dy=(ln(1+e^{10x})+\sqrt{x^2+1})'dx=\left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx.$$

Подставив x =0 и dx = 0,1, получим $dy\big|_{x=0,dx=0,1}=\left(\frac{10}{2}+0\right)0{,}1=0{,}5.$

✐Пример 26. Найти дифференциал dy: $y=\sqrt{1+2x}-ln\left(x+\sqrt{1+2x}\right)$.

Решение.

$$dy=\left(\sqrt{1+2x}-ln(x+\sqrt{1+2x})\right)'dx=\left(\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}-\frac{1+\frac{2}{2\sqrt{1+2x}}}{x+\sqrt{1+2x}}\right)dx=$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+2x}\left(x+\sqrt{1+2x}\right)}dx.$$

§ 3. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Пусть известно значение функции и её производной в точке x_0. Покажем, как найти значение функции в некоторой близкой к x_0 точке x.

Пусть функция $f(x)=y$ имеет производную в точке x_0 . Тогда справедливо равенство

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x+0\left(\Delta x\right)\Rightarrow\Delta y=dy+0\left(\Delta x\right). \tag{1.30}$$

Отбрасывая бесконечно малую $0(\Delta x)$ более высокого порядка малости, чем Δx, получаем приближенное равенство

$$\Delta y\approx dy . \tag{1.31}$$

Данная формула важна в задачах, когда известны значения функции и её производной в точке x_0 и требуется вычислить значение функции в некоторой близкой к x_0 точке x.

Подставляя в равенство (1.31) значения Δy и dy, получим

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x$$

или

$$\boxed{f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x} \qquad (1.32)$$

Формула (1.32) используется для вычислений приближенных значений функций.

✐Пример 27. Найти приближенное значение приращения функции $y=x^3-2x+1$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

Решение. Применяем формулу (1.31):

$$\Delta y\approx dy=\left(x^3-2x+1\right)'\cdot\Delta x=\left(3x^2-2\right)\cdot\Delta x.$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}}=\left(3\cdot4-2\right)\cdot0{,}001=10\cdot0{,}001=0{,}01.\ \text{Итак, } \Delta y\approx0{,}01.$$

Найдем абсолютную погрешность, вычислив точное приращение функции:

$$\Delta y=\left((x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+1\right)-\left(x^3-2x+1\right)=$$

$$=x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\cdot\Delta x+1-x^3+2x-1=$$

$$=\Delta x\left(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2-2\right);$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0{,}001}}=0{,}001\left(3\cdot4+3\cdot2\cdot0{,}001+0{,}001^2-2\right)=0{,}010006.$$

Абсолютная погрешность приближения равна

$$\left|\Delta y-dy\right|=\left|0{,}010006-0{,}01\right|=0{,}000006=6\cdot10^{-6}.$$

✐Пример 28. Вычислить приближенно ***arctg*** 1,05.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x)=arctg\,x.$ По формуле (1.32) имеем:

$$arctg(x+\Delta x)\approx arctg\,x+(arctg\,x)'\cdot\Delta x,$$

$$\text{т.е. } arctg(x+\Delta x)\approx arctg\,x+\frac{\Delta x}{1+x^2}.$$

Так как $x+\Delta x=1{,}05,$ то при x=1 и Δx=0,05 получаем:

$$arctg1{,}05\approx arctg1+\frac{0{,}05}{1+1}=\frac{\pi}{4}+0{,}025\approx0{,}810.$$

Можно показать, что абсолютная погрешность формулы (1.32) не превышает величины $M\cdot(\Delta x)^2$, где M – наибольшее значение $\left|f''(x)\right|$ на сегменте $[x;x+\Delta x]$.

✐Пример 29. Какой путь пройдет тело при свободном падении на Луне за 10,04 с. от начала падения. Уравнение свободного падения тела $H=\frac{g_{Ë}\cdot t^2}{2}$, $g_Л$= 1,6 м/с^2.

Решение: Требуется найти H(10,04). Воспользуемся приближенной формулой (1.32)

$$H(t+\Delta t)\approx H(t)+H'(t)\cdot\Delta t.$$

При t=10 с и $\Delta t=dt$=0,04 с, $H'(t)=g_Л t$, находим

$$H(10{,}04)\approx\frac{1{,}6\cdot 100}{2}+1{,}6\cdot 10\cdot 0{,}04=80+0{,}64=80{,}64\,(\text{ě}\,).$$

✎Пример 30. Вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в точке x=7,76.

Решение: используем формулу нахождения приближенного значения функции в данной точке (1.32).

Будем рассматривать $f(x)=\sqrt[3]{7{,}76}$ как частное значение функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$ при

x = 7,76. Пусть x_0 = 8 и Δx = 7,76 - 8= - 0,24, тогда $f(8)=\sqrt[3]{8}=2$,

$$f'(x_0)=\left.\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right|_{x_0=8}=\frac{1}{12}.$$

Подставляя в формулу (1.32), получим $\sqrt[3]{7{,}76}\approx 2-\frac{1}{12}\cdot 0{,}24=1{,}98.$

Раздел III

§1.Задачи для самостоятельного решения

✎Пример 31. Найдите производную данной функции:

а) $y(x)=4x^{\frac{7}{3}}+5x^{\frac{5}{2}}+\sqrt{x}+1$;

б) $y(x)=\dfrac{3}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{8}{x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}+2$.

✎Пример 32. Найдите производную данной функции и вычислите её значение в точке x_0:

а) $y=\left(x^2+2x+2\right)\cdot arcsin(0.5+x),\ x_0=0$;

б) $y=\dfrac{1+sin\,2x}{3+4x},\ x_0=0$;

в) $y=\dfrac{cos\,x+sin\,x}{3-cos\,x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

✎Пример 33. Найдите производные данных функций:

а) $y=\sqrt{2}\,sin^5 2x;$ б) $y=ln\,cos\,4x$; в) $y=3^{tg2x}$; г) $y=cos^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

✎Пример 34. Найти производные следующих функций, предварительно их прологарифмировав:

а) $y(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4}\cdot\sqrt{(x+3)^5}}$; б) $y(x)=e^x\cdot sin\,2x\cdot cos\,3x\cdot tg5x$;

в) $y(x)=(ln\,x)^{\sqrt[3]{x}}$; г) $y(x)=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

✎Пример 35.Найдите производные второго порядка от следующих функций:

а) $f(x)=\frac{1}{12}ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|$; б) $f(x)=\frac{1}{3}arcsin\frac{3}{4}x$; в) $f(x)=\frac{1}{6}arctg\frac{3}{2}x$.

✐Пример 36. Найти y'_x от следующих функций, заданных параметрически:

а) $\begin{cases} x = arccos\,2t \\ y = arcsin(t^2-1) \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = a\,sin\,t + b\,cos\,t \\ y = 4tg^2\frac{t}{2} \end{cases}$.

✐Пример 37. Найти y'_x от следующих функций, заданных неявно следующими уравнениями:

а) $x^4+y^4-3x^2y^2=1$; б) $sin\,y=1+xy^2$.

✐Пример 38. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции:

а) $y=3x^4-5x^2+4$ при $x_0=-1$;

б) $y=3x^2+4x+5$ при $x_0=-2$.

✐Пример 39. Дан закон движения материальной точки по оси Ox: $x(t)=2t+t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t=2$.

(x дается в сантиметрах, t – в секундах)

✐Пример 40. Найдите дифференциал функции $y(x)$, если:

а) $y(x)=\frac{1}{x^2}$; б) $y(x)=ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|$; в) $y(x)=arcsin\frac{x}{6}$.

✐Пример 41. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите, округлив до 0, 0001:

а) $\sqrt{4{,}012}$; б) $arctg1{,}05$; в) $e^{2{,}01}$.

ОТВЕТЫ

31. а) $y'=\frac{28}{3}x^{\frac{4}{3}}+\frac{25}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; б) $y'=-\frac{8}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}-\frac{30}{x^3\cdot\sqrt[4]{x^3}}$.

32. а) $\frac{\pi}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $-\frac{4}{9}$.

33. а) $y'=10\sqrt{2}\,sin^4x\,cos\,x$; б) $y'=-4tgx$;

в) $y'=2\,ln3\frac{3^{tg2x}}{cos^2 2x}$; г) $y'=-\frac{3}{2}cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot sin\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

34. а) $y'=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^4}\cdot\sqrt{(x+3)^5}}\cdot\left(\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{3(x+2)}-\frac{5}{2(x+3)}\right)$;

б) $y'=e^x\cdot sin2x\cdot cos3x\cdot tg5x\cdot\left(1+2ctg2x-3tg3x+\frac{5}{tg5x}\cdot\frac{1}{cos^2 5x}\right)$;

в) $y'=(ln\,x)^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{ln\,ln\,x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}\frac{1}{x\,ln\,x}\right)$;

г) $y' = \left(\sqrt{x}\right)^x \left(\frac{1}{2} ln\, x + \frac{1}{2}\right)$.

35. а) $\frac{18x}{\left(4 - 9x^2\right)^2}$; б) $\frac{9x}{\sqrt{\left(16 - 9x^2\right)^3}}$; в) $-\frac{18x}{\left(4 + 9x^2\right)^2}$.

36. а) $-\frac{t\sqrt{1 - 4t^2}}{\sqrt{2t - t^4}}$; б) $\frac{4tg\,\frac{t}{2}}{cos^2\frac{t}{2}\left(a\,cos\,t - b\,sin\,t\right)}$.

37. а) $-\frac{2x^3 - 3xy^2}{2y^3 - 3x^2 y}$; б) $\frac{y^2}{cos\,y - 2xy}$.

38. а) $2x + y = 0, x - 2y + 5 = 0$; б) $8x + y + 7 = 0, x - 8y + 74 = 0$.

39. $V = 14\,\text{cĕ}/\text{ń};\ a = 12\,\text{cĕ}/\text{ń}^2$.

40. а) $dy = -\frac{2}{x^3}dx$; б) $dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}dx$; в) $dy = \frac{1}{\sqrt{36 - x^2}}dx$.

41 а) 2, 003; б) 0,81; в) 7,463.

§2. **Проверочные тесты**

1	Найти производную функции	
	а) $y = 5x^4 - 8x$.	1) $y' = 20x^3 - 8$; 2) $y' = 20x^3 + 8$; 3) $y' = 5x^3 - 8x$; 4) $y' = 4x^3 + 8$
	б) $y = e^{2x}\, ln(2x - 1)$	1) $y' = 2e^{2x}\left(ln(2x-1) - \frac{1}{2x-1}\right)$; 2) $y' = 2e^{2x}\left(ln(2x-1) + \frac{1}{2x-1}\right)$; 3) $y' = e^{2x}\left(ln(2x-1) - \frac{2}{2x-1}\right)$; 4) $y' = e^{2x}\left(2\,ln(2x-1) + \frac{1}{2x-1}\right)$
	в) $y = cos\,2x + 2\,sin\,x$	1) $y' = 2\,sin\,2x - 2\,cos\,x$; 2) $y' = -sin\,2x - 2\,cos\,x$; 3) $y' = -2\,sin\,2x + 2\,cos\,x$; 4) $y' = sin\,2x - cos\,x$
	г) $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{arctgx}$	1) $y' = \frac{xarctgx - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \cdot arctg^2 x}$;

7		2) $y' = \dfrac{x^2 arctgx + 1}{\sqrt{x^2+1} \cdot arctgx}$; 3) $y' = \dfrac{xarctgx + 1}{\sqrt{x^2-1} \cdot arctgx}$; 4) $y' = \dfrac{xarctgx - 1}{\sqrt{x^2+1} \cdot arctgx}$
	д) $y = ln3 - \sqrt[3]{x} + tg2x$	1) $y' = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\cos x^2}$; 2) $y' = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{2}{\cos^2 x}$; 3) $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{\cos^2 2x}$; 4) $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{\cos^2 2x}$
2	Среди заданных функций укажите ту, производная которой имеет вид $y' = -\dfrac{1}{2x^2} + \sin x$	1) $y = \sqrt{x} - \sin x$; 2) $y = \dfrac{4}{x} + \cos x$; 3) $y = 2\sqrt{x} + \sin x$; 3) $y = \dfrac{1}{2x} - \cos x$
3	Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3\cos x - \sin x$ в точке $x_0 = \pi$	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) -3
4	Найдите значение производной функции $y = \sin^4 \dfrac{x}{2} - \cos^4 \dfrac{x}{2}$ в точке $x_0 = 17\pi$	1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 17
5	При каких значениях аргумента касательная к графику функции $y = x^3 - 2x^2 + 6x$ будет составлять с положительным направлением оси OX угол 135°	1)1;3; 2) 0;-14; 3) нет таких значений; 4) 1;0
6	Чему равно наименьшее значение функции $y = ln(e^2 - x^2)$ на отрезке $[-1;1]$	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 2
7	Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = (x^2-2)(x^2+2)$	1) 1; 2) -1; 3) 2; 4) 0
8	Найти значение производной функции $y = e^{2x} ln(2x-1)$ в точках, в которых	1) $2e^2$; 2) -$2e^2$; 3) 1; 4) 0

	значение этой функции равно 0:	
9	Пусть $f(x) = 3x - \sqrt{x} + 7$.Найдите значения x при которых $f'(x) = 2$	1) 1; 2) $-\frac{1}{49}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 0
10	Сравните значения функций $y = \cos 3x - 2\sin\frac{x}{2} + 2\ln(1+x)$ в точке $x_0 = 0$ со значением производной в этой же точке	1) $y'(0) = y(0)$; 2) $y'(0) = 2y(0)$; 3) $3y'(0) = y(0)$; 4) $y'(0) = 3y(0)$

ОТВЕТЫ

№	1а	1б	1в	1г	1д	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ответ	1	2	3	1	3	3	1	3	3	4	4	1	3	1

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа. Ч. 1. 1980.
4. Руководство и решение задач по высшей математике/Под общей редакцией Е.И. Гурского Минск: Высшая школа, 1989. Ч. 1.
5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 3-е изд. М.: Айрис-пресс,2005.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.

Вержбалович Тамара Александровна
Самойлова Людмила Владимировна

Основы дифференциального исчисления функций одной переменной

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению самостоятельной работы
по разделу «Дифференцирование функций»
для студентов заочной формы обучения

050501, 090105, 140211, 150202,151001, 151002,
190201, 190202, 190601, 190603, 190701, 190702,
200503, 220301, 220601, 230105, 280101

Редактор Н.М. Устюгова

Подписано в печать	Формат 60х 84/16	Бумага тип. № 1
Печать трафаретная	Усл. печ. л. 2,25	Уч. - изд. л.2,25
Заказ	Тираж 100	Цена свободная

Редакционно-издательский центр КГУ.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет.