Министерство образования и науки Российской Федерации
Курганский государственный университет
Кафедра математического анализа

Интегралы по поверхности. Элементы теории поля
Интегралы, зависящие от параметра. Ряды Фурье

Методические указания к изучению разделов
математического анализа для студентов
специальности 010100(010101)

Курган 2005

Кафедра: математического анализа
Дисциплина: математический анализ (специальность 010100)(010101)
Составил: доцент, кандидат пед. наук Мухин А.Е.
Составлены на основании ГОС для специальности 010100 – математика (2000г.).
Утверждены на заседании кафедры «_14_» _декабря____ 2004г.
Рекомендованы методическим
советом университета «____» ___________________ 2005г.

Введение

Разделы, перечисленные в названии, изучаются в IV семестре. Учебным планом специальности 010100(010101) – математика на изучение разделов отводится 108 часов аудиторных занятий: 54 часа лекций и 54 часа практических занятий. В конце семестра проводится экзамен.

Государственным образовательным стандартом предусматривается изучение следующих разделов:

Интегралы по поверхности; формула Остроградского; элементарная формула Стокса; условия независимости криволинейного интеграла от формы пути.

Элементы теории поля: скалярное поле; векторное поле; поток, расходимость, циркуляция, вихрь; векторная интерпретация формул Остроградского и Стокса; потенциальное поле; векторные линии и векторные трубки; соленоидальное поле; оператор «набла».

Несобственные интегралы: интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций; признаки сходимости; интегралы, зависящие от параметра; непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; несобственные интегралы, зависящие от параметра: равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру; применение к вычислению некоторых интегралов; функции, определяемые с помощью интегралов, бета- и гамма-функции Эйлера.

Ряды Фурье: ортогональные системы функций; тригонометрическая система функций; ряд Фурье; равномерная сходимость ряда Фурье; признаки сходимости ряда Фурье в точке; принцип локализации; минимальное свойство частных сумм ряда Фурье; неравенство Бесселя; достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье; сходимость в среднем; равенство Парсеваля; интеграл Фурье и преобразование Фурье.

Перечень теоретических вопросов, выносимых на экзамен

1. Поверхностные интегралы I рода: понятие, сведение к двойному (поверхность задана параметрически; поверхность задана явным уравнением).
2. Вычисление величин с помощью поверхностных интегралов I рода (вывод соответствующих формул).
3. Поверхностные интегралы II рода: понятие, сведение к двойному (поверхность задана явным уравнением; поверхность задана параметрически).
4. Формула Стокса и её применение для исследования криволинейных интегралов в пространстве.
5. Формула Остроградского (вывод).

6. Производная скалярного поля по направлению, её связь с дифференцируемостью функции в точке.
7. Градиент скалярного поля и его связь с производной по направлению.
8. Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского в векторной форме.
9. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса в векторной форме.
10. Дивергенция, ротор векторного поля, их применение для характеристики векторных полей.
11. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, их свойства, сходимость.
12. Несобственные интегралы от неограниченных функций, их свойства, сходимость.
13. Теорема о равномерной сходимости функции f(x, y) к предельной функции.
14. Теорема о непрерывности предельной функции.
15. Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.
16. Теорема о дифференцировании под знаком интеграла.
17. Теорема об интегрировании под знаком интеграла.
18. Нормированные и ортогональные функции. Нормированные и ортогональные системы функций. Доказать, что основная тригонометрическая система ортогональна на $[-\pi; \pi]$.
19. Теорема о разложении функции в тригонометрический ряд Фурье (условия Дирихле).
20. Сдвиг сегмента разложения. Привести пример на разложение функции в тригонометрический ряд Фурье с использованием сдвига сегмента разложения.
21. Изменение длины сегмента разложения. Привести пример на разложение функции в тригонометрический ряд Фурье на $[-\ell;\ell]$, выбрав конкретное значение ℓ.
22. Четные и нечетные функции. Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций. Примеры.
23. Разложение функции, заданной на $[0; \pi]$ в тригонометрический ряд Фурье. Примеры.
24. Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
25. Сходимость в среднем, ее связь с равномерной сходимостью последовательности функций.
26. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Фурье к функции f(x) в среднем. Равенство Парсеваля.
27. Полнота и замкнутость ортогональных систем функций. Примеры. Связь между полнотой и замкнутостью систем функций.
28. Характер сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Перечень практических вопросов, выносимых на экзамен

1. Вычисление поверхностных интегралов I и II рода (непосредственно и с использованием формулы Остроградского).
2. Применение формулы Стокса для вычисления криволинейных интегралов в пространстве.
3. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
4. Независимость криволинейного интеграла от формы пути интегрирования; вычисление криволинейных интегралов в этом случае.
5. Вычисление потока, дивергенции, ротора, циркуляции векторного поля.
6. Вычисление геометрических и физических величин с помощью поверхностных интегралов I и II рода.
7. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Использование разложений для вычисления сумм рядов.
8. Исследование интегралов на сходимость.
9. Вычисление несобственных интегралов.
10. Применение несобственных интегралов для вычисления величин (площадь, объем).

Список литературы, рекомендуемой для изучения разделов

1. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах: Функции нескольких переменных. – М.: Высшая школа, 1988.
2. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А. и др. Задачник по курсу математического анализа. – Ч.II. – М.: Просвещение, 1971.
3. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1979.
4. Игнациус Г.И. Теория поля. – М.: Знание, 1971.
5. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. – Ч.2. – Киев: Вища школа, 1977.
6. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1964.
7. Семянистый В.И., Цукерман В.В. Задачник-практикум по математической теории поля. – М.: Просвещение, 1976.
8. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. - Т.2. – М.: Наука, 1968.

Планы практических занятий на IV семестр

Практические занятия №1, 2

Тема: Поверхностные интегралы I рода

Литература: [1], гл. V, §2;
[5], гл. IV, §12;

[8], гл. XXII, §3.

Основные вопросы теории:

1. Определение поверхностного интеграла I рода.
2. Вычисление поверхностного интеграла I рода с помощью двойного интеграла:
   а). поверхность задана параметрическими уравнениями;
   б). поверхность задана уравнением в явном виде.

На занятии будут предложены задачи:

1. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} zds$, где (S) – часть параболоида $z=x^2+y^2$ при $0\le z\le 1$.
2. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} zds$, где (S) – часть гиперболического параболоида $z=xy$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=4$.
3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} yds$, где (S) – часть поверхности цилиндра $x=2y^2+1$ при $y>0$, вырезанная поверхностями $x=y^2+z^2$, $x=2$, $x=3$.
4. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} (x+y+z)ds$, где (S) – полусфера $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.
5. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} (x^2+y^2)ds$, где (S) – граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.
6. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} \frac{ds}{(1+x+y)^2}$, где (S) – граница тетраэдра, заданного неравенствами $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
7. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} (xy+yz+zx)ds$, где (S) – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=2ax$.
8. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} zds$, где (S) – часть геликоида $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ при $0\le u\le a$, $0\le v\le 2\pi$.
9. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} z^2ds$, где (S) – часть конической поверхности $x=r\cos\varphi\ \sin\alpha$, $y=r\sin\varphi\ \sin\alpha$, $z=r\cos\alpha$ при $0\le r\le a$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $a>0$, α - постоянная и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Дома рекомендуется решить задачи:

1. Сведите поверхностный интеграл $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds$ к сумме двух двойных интегралов, если (S) – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
2. Определите, на сколько отличаются друг от друга интегралы $J_1 = \iint\limits_{(S_1)} (x^2+y^2+z^2)ds$ и $J_2 = \iint\limits_{(S_2)} (x^2+y^2+z^2)ds$, где ($S_1$) – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$, (S_2) – поверхность октаэдра $|x|+|y|+|z| =a$, вписанного в эту сферу.
3. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} \sqrt{y^2-x^2}\,ds$, где (S) – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=a^2$.
4. Вычислите $\iint\limits_{(S)} |xyz|ds$, где (S) – часть поверхности $z=x^2+y^2$ при $z\le 1$.

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [5], гл. IV, §12.

Практические занятия №3, 4

Тема: Приложения поверхностных интегралов I рода

Литература: [1], гл. V, §2;
[5], гл. IV, §12;
[8], гл. XXII, §3.

Основные вопросы теории:

1. Вычисление площади поверхности:
   - поверхность задана явным уравнением;
   - поверхность задана параметрическими уравнениями.
2. Вычисление массы поверхности.
3. Вычисление статических моментов поверхности относительно координатных плоскостей.
4. Вычисление координат центра масс поверхности.
5. Вычисление моментов инерции поверхности относительно осей координат, относительно плоскостей координат, относительно начала координат.
6. Вычисление силы притяжения материальной точки материальной поверхностью.

Задачи для решения на занятии:

1. Вычислите площадь той части поверхности 6x+3y+2z=12, которая заключена в первом октанте.
2. Вычислите площадь части поверхности параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 – y^2$.
3. Оси двух равных прямых круговых цилиндров, у которых поперечные сечения имеют радиус r, пересекаются под прямым

углом. Найдите площадь части поверхности одного цилиндра, вырезаемой другим.

4. Вычислите массу части поверхности z=$\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ при $z\le 1$, плотность которой в точке M(x,y,z) равна z.
5. Вычислите статические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки x+y+z=a, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, плотности ρ_0.
6. Вычислите момент инерции относительно оси Oz части однородной конической поверхности $x^2+z^2=y^2$, y>0, плотности ρ_0, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.
7. Вычислите координаты центра масс однородной поверхности (S) – части конической поверхности z=$\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=ax$.
8. Определите, с какой силой однородная поверхность x=r $\cos\varphi$, y=r $\sin\varphi$, z=r, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le b\le r\le a$, плотности ρ_0 притягивает материальную точку массы m, помещенную в начало координат.

Дома рекомендуется решить задачи:

1. Вычислите площадь части поверхности $z^2=2xy$, находящейся над прямоугольником, лежащим в плоскости XoY и ограниченным прямыми x=0, x=3, y=0, y=6.
2. Вычислите массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ при $z\ge 0$, плотность которой в точке M(x, y, z) равна $\frac{z}{a}$.
3. Вычислите момент инерции относительно начала координат однородной поверхности (S) плотности 1, где (S) – поверхность куба с центром в начале координат и ребром 2a.
4. Вычислите координаты центра масс однородной поверхности (S) – части поверхности z=$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ при $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le a$.

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [5], гл. IV, §12.

Практические занятия № 5, 6

Тема: Поверхностные интегралы II рода

Литература: [1], гл. V, §3;
[5], гл. IV, §12;
[8], гл. XXII, §4.

Основные вопросы теории:

1. Двусторонние и односторонние поверхности.
2. Определение поверхностного интеграла II рода.

3. Вычисление поверхностного интеграла II рода с помощью двойного интеграла:
   - поверхность задана параметрическими уравнениями;
   - поверхность задана явным уравнением.
4. Связь между поверхностными интегралами I и II рода.

Задачи для решения на занятии:

1. Вычислите поверхностные интегралы второго рода $\iint\limits_{(S)} dxdy$, $\iint\limits_{(S)} dydz$, $\iint\limits_{(S)} dzdx$, где (S) – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.
2. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{(S)} dxdy$, где (S) – нижняя сторона части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $0 \le z \le 1$.
3. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{(S)} ydzdx$, где (S) – верхняя сторона части параболоида $z=x^2+y^2$ при $0 \le z \le 2$.
4. Вычислите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где (S) – внешняя сторона сферы.
5. Вычислите поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_{(S)} (\frac{\cos\alpha}{x} + \frac{\cos\beta}{y} + \frac{\cos\gamma}{z})ds$, где (S) – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
6. Вычислите поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_{(S)} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy$, где (S) – внешняя сторона параллелепипеда $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, f(x), g(y), h(z) – непрерывные функции.

Дома рекомендуется решить задачи:

1. Выразите поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_{(S)} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) f(x,y,z)ds$ через сумму двойных интегралов, где (S) – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $\vec{n}$(M)={$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$} – ее внешняя нормаль.
2. Вычислите поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_{(S)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где (S) – внешняя сторона поверхности куба {(x,y,z): $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$}. Определите, чему равен этот интеграл, если (S) – внутренняя сторона поверхности куба.

3. Вычислите поверхностный интеграл II рода $\iint\limits_{(S)} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$, где (S) – нижняя сторона канонической поверхности z = $\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le h$.

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [5], гл. IV, §12.

<u>Практическое занятие №7</u>

<u>Тема:</u> Формула Стокса и ее применения

<u>Литература:</u> [1], гл. V, §4;
[5], гл. IV, §13;
[7], §10;
[8], гл. XXII, §4.

<u>Основные вопросы теории</u>

1. Согласование ориентации поверхности с направлением обхода ее границы.
2. Формула Стокса.
3. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования в пространстве.

<u>Задачи для решения на занятии:</u>

1. Пусть на сфере $x^2+y^2+z^2=1$ выбрана ее внешняя сторона. Контур (L): $x^2+y^2+z^2=1$, x=y является границей полусферы, содержащей точку M(1,0,0). Укажите на контуре (L) положительное направление, согласованное с ориентацией данной полусферы.
2. Вычислите двумя способами криволинейный интеграл $\oint\limits_{(L)} ydx + z^2dy + x^2dz$, где (L) – окружность, по которой пересекаются сфера $x^2+y^2+z^2=4$ и плоскость z=$\sqrt{3}$, причем направление обхода контура (L) выбирается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,2). В формуле Стокса в качестве ориентированной поверхности (S), которую ограничивает окружность (L), возьмите верхнюю сторону части сферы z=$\sqrt{4-x^2-y^2}$ при $\sqrt{3} \le z \le 2$.
3. Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{(OA)} yzdx + 3xzdy + 2xydz$, где (OA) – кривая x=t cost, y=t sint, $z=t^2$, $0 \le t \le 2\pi$, O(0,0,0), A($2\pi;0;4\pi^2$).
4. Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции трех переменных и вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_{AB} (15x^2y+3z^2)dx + (5x^3-2yz)dy + (6xz-y^2)dz$, где A(1,2,1), B(2,3,2).

5. Вычислите $\oint\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$, где (L) – окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки (a, 0, 0).
6. Найдите функцию u(x,y,z), если $du(x,y,z)=(2xyz+y^2z+yz^2)dx+(2xyz+x^2z+xz^2)dy+(2xyz+x^2y+xy^2)dz$.

Дома рекомендуется решить задачи:
1. Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл II рода $\oint\limits_{(L)} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, где (L) – граница тела, заданного неравенствами: $x+y+z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, причем контур (L) обходится против хода часовой стрелки, если смотреть из точки (2, 0, 0).
2. Пусть $P(x,y,z)=2xy+z$, $Q(x,y,z)=x^2+z^2$, $R(x,y,z)=2yz+x$. Докажите, что выражение $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$ является полным дифференциалом некоторой функции трех переменных, и найдите эту функцию. Определите, чему равен $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$, где A(-1, 1, 1), B(1,-1, 1).
3. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$, где (L) – виток винтовой линии x=cost, y=sint, z=t, $0 \le t \le 2\pi$, пробегаемый в направлении от точки (1,0,0) до точки (1;0;2π).

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [5], гл. IV, §13.

Практическое занятие №8

Тема: Формула Остроградского-Гаусса и ее применение

Литература: [1], гл. V, §5;
[5], гл. IV, §14;
[7], §7;
[8], гл. XXII, §2.

Основные вопросы теории

1. Формула Остроградского-Гаусса.
2. Следствие из формулы Остроградского-Гаусса: формула для вычисления объема тела с помощью интеграла по его поверхности.

Задачи для решения на занятии:

1. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где (S) – внешняя сторона сферы $(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 + + (z\text{-}c)^2=R^2$.
2. Вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где (S) – нижняя сторона части параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью z=2x.
3. Вычислите интегралы:

   а). $\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где (S) – сфера $x^2+y^2+z^2=x$.

   б). $\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где (S) – поверхность куба $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

   в). $\iint\limits_{(S)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, где (S) – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.
4. Докажите, что объем конуса, ограниченного гладкой конической поверхностью F(x,y,z)=0 и плоскостью Ax+By+Cz+D=0, равен $V = \frac{SH}{3}$, где S – площадь основания конуса, расположенного в этой плоскости, H – его высота.

   Дома рекомендуется решить задачи:

1. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислите интеграл $\iint\limits_{(S)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где (S) – внешняя сторона поверхности тетраэдра, заданного неравенствами: $x+y+z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.
2. Вычислите объем конуса $z^2=x^2+y^2$ при $0 \le z \le h$, используя формулу Остроградского-Гаусса.

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [5], гл.IV, §14.

Практическое занятие №9

Тема: Самостоятельная работа на тему: «Поверхностные интегралы»

Примерные варианты самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислите $\iint\limits_{(S)} -4zdydz + (y - x + z)dzdx + (3x - z)dxdy$, если (S): 2x-y+2z=-2.
2. Вычислите $\int\limits_{(L)} (x-2)dx + (x+y)dy - 2zdz$, если (L) – периметр треугольника с вершинами в точках A(1;0;0), B(0;1;0) и C(0;0;1).

3. Найдите U(x,y,z), если du=$(2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2xz+y^2)dz$, и вычислите интеграл $\int\limits_{AB}(z^2+2xy)dx+(x^2+2yz)dy+(y^2+2xz)dz$, если A(1;0;2), B(-1;-2;0).

Вариант 2

1. Вычислите $\iint\limits_{(S)}(x+y)dydz+(x-z)dzdx+(2y-2z)dxdy$, если (S): 2x-3y+2z+6=0.

2. Вычислите $\int\limits_{(L)}xzdx-yz^2dy+xydz$, если (L) – замкнутая линия:

$$\begin{cases} x^2-y^2+2a^2=z, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

3. Найдите U(x,y,z), если du=(y-z)dx+(-z+x)dy+(-x-y)dz, и вычислите интеграл $\int\limits_{(AB)}(y-z)dx+(x-z)dy+(-x-y)dz$, если A(0;1;2), B(-1;-4;0).

Вариант 3

1. Вычислите $\iint\limits_{(S)}(x+y-z)dydz-2zdxdz+(x+7z)dxdy$, если (S): 3x+2y-z-6=0.

2. Вычислите $\int\limits_{(L)}xdx+xzdy+zdz$, если (L) – линия пересечения поверхности z^2=4-x-y с плоскостями координат.

3. Найдите U(x,y,z), если du=yzdx+xzdy+xydz, и вычислите интеграл $\int\limits_{(AB)}yzdx+xzdy+xydz$, если A(2;1;3), B(5;1;0).

Вариант 4

1. Вычислите $\iint\limits_{(S)}(2y+z)dydz+(x-y)dxdz+(y-2z)dxdy$, если (S): x-y+z+2=0.

2. Вычислите $\int\limits_{(L)}x^2y^3dx+dy+zdz$, если (L): $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$

3. Найдите U(x,y,z), если du=$xdx+y^2dy-z^3dz$, и вычислите интеграл $\int\limits_{(AB)}xdx+y^2dy-z^3dz$, если A(-1;1;2), B(2;3;0).

Практическое занятие №10

Тема: Скалярное поле и его характеристики

Литература: [1], гл. VI, §1;
[5], гл. IV, §15;
[7], §1; §2; §3;
[8], гл. XXII, §4.

Основные вопросы теории:

1. Понятие скалярного поля. Примеры скалярных полей. Линии и поверхности уровня.
2. Производная скалярного поля по направлению; ее связь с дифференцируемостью скалярного поля в точке.
3. Вычисление производной скалярного поля по направлению. Физический смысл производной по направлению.
4. Градиент скалярного поля, его связь с производной по направлению.

Задачи для решения на занятии.

1. Найдите и изобразите линии уровня скалярного поля u=xy. Вычислите и изобразите на чертеже градиент этого скалярного поля в точках (1;1) и (1;-1).
2. Найдите градиент скалярного поля u=xyz в точке M(-2;3;4). Определите, чему равна в этой точке производная поля и в направлении вектора $\vec{a}=\{3;-4;12\}$.
3. Найдите градиент сферического скалярного поля u=$\varphi(r)$, r=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (т.е. зависящего только от расстояния точки (x,y,z) до начала координат).
4. Найдите линии или поверхности уровня скалярных полей:
   а) $u=\sqrt{9-x^2-y^2}$;
   б) u=arcsin$\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$;
   в) u=arctg$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$;
   г) u=$\dfrac{1}{2x+3y-4z+1}$.
5. Найдите и изобразите линии уровня скалярного поля u=min(x,y). Вычислите и изобразите вектор gradu в точках A(2;1) и B(1;2).
6. Вычислите производные скалярного поля u=x^2+y^2 в точке M(1;1) по направлениям векторов: $\vec{l_1}=\{1;1\}$, $\vec{l_2}=\{0;1\}$, $\vec{l_3}=\{-1;1\}$. Найдите gradu в точке M и сравните $|gradu|$ с найденными значениями производных по направлениям векторов $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$, $\vec{l_3}$.
7. Определите, в каких точках градиент скалярного поля u=x^3+y^3+z^3-3xyz:
   а) параллелен оси Oz;
   б) перпендикулярен оси Oz;
   в) равен нулю.
8. Найдите угол между градиентами скалярного поля u=$\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках M(1;2;2) и N(-3;1;0).
9. Докажите справедливость формул:

а). grad(u+v)=gradu+gradv;

б). grad $\frac{u}{v}=\frac{v gradu - u gradv}{v^2}$;

в). grad f(u)= $f'(u)$ gradu;

г). grad f(u,v)=$\frac{\partial f}{\partial u} gradu + \frac{\partial f}{\partial v} gradv$,

где u и v – скалярные поля.

10. Установите характер изменения скалярного поля u=xyz в точке A(5;1;-8) по направлению, идущему от этой точки к точке B(9;4;4).
11. Найдите направление наискорейшего возрастания скалярного поля $u=x^2-y^2+2xy+z^2$ в точке P(1;1;0).
12. Найдите производную скалярного поля $u=\ln(x^2+y^2)$ в точке M_0 $(x_0;y_0)$ по направлению, перпендикулярному к линии уровня скалярного поля, проходящей через эту точку.
13. Найдите наибольшую скорость возрастания скалярного поля:
    а). $u=\ln(x^2+4y^2)$ в точке (6;4);
    б). $u=x^2-y^2+x+y$ в точке (1;1).

<u>Дома рекомендуется решить задачи:</u>

1. Найдите производную скалярного поля $u=\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}$ в точке A(0;0;0) по направлению: а) оси Ox; б) оси Oy; в) вектора $\vec{l}=\{1;1;1\}$.
2. Для скалярного поля из задачи 1 найдите gradu в точке A(0;0;0). Составьте направление gradu с указанными в задаче 1 направлениями и значение $|gradu(A)|$ с производными скалярного поля u в точке A по этим направлениям.
3. Найдите и изобразите линии уровня скалярного поля $u=(x-y)^2$. Вычислите и изобразите вектор grad u в точках A(-1;1) и B(1;1).
4. Определите, в каких точках градиент скалярного поля $u=x^2+y^2-2xy$:
   а) перпендикулярен прямой y=x; б) равен нулю.
5. Найдите производную скалярного поля $u=xy^2+z^3-xyz$ в точке M(1;1;2) по направлению, образующему с осями координат соответственно углы 60^0, 45^0, 60^0.
6. Исследуйте характер изменения скалярного поля $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ по направлению вектора $\vec{a}=8\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k}$ в точке P(1;1;1).
7. Найдите градиент скалярного поля u=(x-1)(y-2)(z-3) в точке M(2;3;4).

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в: [5], гл.IV, §15; [7], §§1-3.

<u>Практические занятия №11,12,13</u>

<u>Тема:</u> Векторные поля и их характеристики

<u>Литература</u>: [1], гл. VI, §1, §3;
[5], гл. IV, §15;

[7], §5-7; §9-10; §12;
[8], гл. XXIII, §4.

Основные вопросы теории:

1. Понятие векторного поля, примеры векторных полей; векторные линии, примеры векторных линий.
2. Дивергенция векторного поля. Источники; стоки; мощность источника (стока). Соленоидальное векторное поле.
3. Поток векторного поля через поверхность. Интерпретация потока для случая векторного поля скоростей текущей жидкости (поверхность является замкнутой).
4. Связь между потоком векторного поля через замкнутую поверхность и дивергенцией векторного поля. Поток соленоидального поля через замкнутую поверхность.
5. Ротор (вихрь) векторного поля. Потенциальное поле, потенциал векторного поля, эквипотенциальные поверхности.
6. Циркуляция векторного поля. Формула Стокса в векторной форме. Связь между циркуляцией и ротором векторного поля.
7. Свойства соленоидальных и потенциальных векторных полей.

Задачи для решения на занятиях:

1. Найдите векторные линии векторного поля $\vec{a} = grad u$, где u=xyz.
2. Найдите векторные линии поля $\vec{a} = ax\vec{i} - ay\vec{j} - 2az\vec{k}$ (a=const).
3. Вычислите дивергенцию векторного поля:

а) $\vec{a} = e^{xy} \cdot \cos z \cdot \vec{i} + arctg\dfrac{x}{y} \cdot \sin z \cdot \vec{j} + ctgz \cdot \vec{k}$ в точке М(-1;1;$\frac{\pi}{2}$);

б) $\vec{a} = \ln\dfrac{xy}{z} \cdot \cos y \cdot \vec{i} + \arcsin\dfrac{y}{x} \cdot \vec{j} + \dfrac{1}{x} \cdot \ln\dfrac{z}{y} \cdot \vec{k}$ в точке М($\frac{5}{9}\pi;-\frac{\pi}{3};-2$);

в) $\vec{a} = \sqrt{1 - \ln^2 xyz} \cdot \vec{i} + \arccos\dfrac{x}{5z} \cdot \vec{j} + \dfrac{\ln z}{\sqrt[5]{x}} \cdot \vec{k}$ в точке М(e;1;$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$).

4.Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = (x - y) \cdot \vec{i} + (3y - z) \cdot \vec{j} + (2z - x) \cdot \vec{k}$ через треугольник, полученный при пересечении плоскости 6x + 2y + 3z – 6 = 0 с плоскостями координат (нормаль составляет с осями координат острые углы).

5. Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = (x - 2y) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (3y + z) \cdot \vec{k}$ через часть сферической поверхности единичного радиуса с центром в начале координат, расположенную в первом октанте.

6. С помощью формулы Остроградского – Гаусса вычислите поток векторного поля $\vec{a} = 3x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ через полную поверхность конуса $(9 - z)^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 9$.

7. Вычислите двумя способами поток векторного поля $\vec{a} = 3x \cdot \vec{i} + 3y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k}$ через полную поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2, 0 \le z \le H$.

8. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = zy \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + \vec{k}$ через верхнюю половину сферы $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9, z \ge 0$ в сторону внешней нормали.

9. Вычислите ротор векторного поля:
   а) $\vec{a} = \sin(2x - y - z)(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$;
   б) $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

10. Вычислите ротор векторного $\vec{a} = e^{x+2y+3z} \cdot (3x\vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k})$ в точке P(3;-3;1).

11. Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xy \cdot \vec{i} + yz \cdot \vec{j} + zx \cdot \vec{k}$ вдоль контура (L): $x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1$ по направлению, соответствующему
положительному обходу проекции контура (L) на плоскость XOY.

12. Вычислите двумя способами (непосредственно и с помощью формулы Стокса) циркуляцию поля $\vec{a} = x^2 y^3 \cdot \vec{i} + \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$.

13. Вычислите циркуляцию поля $\vec{a} = (x - y + 3z) \cdot \vec{i} + (y - 3x + z) \cdot \vec{j} + (x - 3y + z) \cdot \vec{k}$ вдоль линии пересечения плоскости 2x + 3y + 6z – 3 = 0 с координатными плоскостями (направление обхода контура соответствует
положительному обходу проекции на плоскость XOY).

14.Проверьте, что векторное поле
$\vec{a} = (2xy + z^2) \cdot \vec{i} + (2yz + x^2) \cdot \vec{j} + (2zx + y^2) \cdot \vec{k}$
является потенциальным. Найдите потенциал поля $\vec{a}$, беря в качестве контура (L) прямолинейный отрезок.

15. Выясните, являются ли векторные поля соленоидальными:
   а) $\vec{a} = x(2z - x) \cdot \vec{i} + y(2x - y) \cdot \vec{j} + z(2y - z) \cdot \vec{k}$;
   б) $\vec{a} = (x^2 - z^2) \cdot \vec{i} + (y^2 - x^2) \cdot \vec{j} + (z^2 - y^2) \cdot \vec{k}$;
   в) $\vec{a} = \dfrac{2x}{(y^2 + z^2)^2} \cdot (z \cdot \vec{j} - y \cdot \vec{k})$.

15.Докажите, что циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

17. Докажите, что для потенциального поля $\vec{a}$ $rot\vec{a} = 0$.

18. Докажите, что если поле $\vec{a}$ обладает векторным потенциалом, то поток поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

19. Докажите, что поле $\vec{a}$, обладающее векторным потенциалом, является соленоидальным.

20. Пусть $\vec{a}$ - соленоидальное поле в области (V). Докажите, что если

область (V_1), ограниченная замкнутой поверхностью (S), целиком содержится в (V), то поток поля $\vec{a}$ через поверхность (S) равен нулю.

<u>Задачи для решения дома:</u>

1. Докажите, что поток постоянного векторного поля $\vec{a}$ через любую замкнутую кусочно – гладкую поверхность равен нулю.
2. Найдите поток радиуса – вектора $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ через произвольную замкнутую кусочно – гладкую поверхность (S), ограничивающую область (G) объема V.
3. Докажите, что векторное поле $\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} + 2xy \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ является потенциальным, и найдите его потенциал.
4. Найдите работу силового поля $\vec{a} = y^2 \cdot \vec{i} + 2xy \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ вдоль отрезка линии (L) – линии пересечения цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$, проходящего от точки A(-a; -a; 0) через точку C(0; 0; a) до точки B(a; a; 0).
5. Применяя формулу Остроградского – Гаусса, вычислите поток векторного поля $\vec{a} = (x - y) \cdot \vec{i} + (z - y) \cdot \vec{j} + (z - x) \cdot \vec{k}$ через поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ в сторону внешней нормали.
6. Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = x \cdot \cos y \cdot \vec{i} - \sin y \cdot \vec{j} + (z-1)^2 \cdot \vec{k}$ через боковую поверхность цилиндра, ограниченную поверхностями: $x^2 + y^2 = 1, z = 2, z = 4$ в сторону внешней нормали.
7. Вычислите поток векторного поля $\vec{a} = y \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + x \cdot \vec{k}$ через круг при пересечении шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ и плоскости $x + y + z = 0$ в сторону той нормали к плоскости, которая образует острый угол с осью OY.
8. Найдите дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xy^2 \cdot \vec{i} + x^2 y \cdot \vec{j} + z^3 \cdot \vec{k}$ в точке A(1; -1; 3).
9. Проверьте, что поле $\vec{p} = yz \cdot (4x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{k})$ является соленоидальным.
10. Проверьте, что векторного поле $grad u$, где $u = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[4]{z}$ является потенциальным.
11. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = -y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ вдоль замкнутой линии ABCA, образованной пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с координатными плоскостями.
12. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = arctg(x - y + z) \cdot (\vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k})$.
13. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = \sin(x + 2y + 3z) \cdot (x^2 \vec{i} + y^2 \cdot \vec{j} + z^2 \cdot \vec{k})$ в точке M (3; -3; 1).

14. Вычислите с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(x+z)\cdot\vec{i}+(y-z)\cdot\vec{j}+(y-x)\cdot\vec{k}$ вдоль окружности $(x-3)^2+(y-2)^2=4, z=0$ (вектор положительной нормали $\vec{n}=\vec{k}$).

Образцы решения задач по теме занятий можно найти в [5], гл. IV, §15.

Практическое занятие № 14

Тема: Самостоятельная работа по теме «Теория поля»

Примерные варианты самостоятельной работы

Вариант 1

1. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=(y+2z)\cdot\vec{i}+(x+2z)\cdot\vec{j}+(x-2y)\cdot\vec{k}$ через треугольник, вырезанный координатными плоскостями из плоскости $2x+2y+z-2=0$, в том направлении нормали к плоскости, которое образует с осью ОХ острый угол.
2. Найдите поток вектора $\vec{r}$ через боковую поверхность конуса $x^2+y^2\le z^2 (0\le z\le a)$.
3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=x\cdot\cos y\cdot\vec{i}+\sin y\cdot\vec{j}+(z-1)^2\cdot\vec{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $\vec{r}(t)=\cos t\cdot\vec{i}+\sin t\cdot\vec{j}+\dfrac{z}{\pi}\cdot\vec{k}$ от точки A(0;0;0) до точки B(0;0;2) ($0\le t\le 2\pi$).
4. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a}=\left(\dfrac{x^2}{2}-xy\right)\cdot\vec{i}+\left(\dfrac{y^2}{2}-yz\right)\cdot\vec{j}+\left(\dfrac{z^2}{2}-xz\right)\cdot\vec{k}$ соленоидальным. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}$ через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.
5. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a}=(y+z)\cdot\vec{i}+(z+x)\cdot\vec{j}+(x+y)\cdot\vec{k}$ потенциальным. Вычислите циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль окружности $x^2+z^2=1$, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки M (0; 1; 0).

Вариант 2

1. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=(z-x)\cdot\vec{i}+(z+x)\cdot\vec{j}+(x+2y+z)\cdot\vec{k}$ через треугольник, вырезанный координатными плоскостями из плоскости $2x+y+2z-2=0$, в том направлении нормали к плоскости, которое образует с осью ОУ острый угол.
2. Найдите поток вектора $\vec{r}$ через основание конуса $x^2+y^2\le z^2 (0\le z\le h)$
3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(y-x)\cdot\vec{i}+(z-y)\cdot\vec{j}+(x-z)\cdot\vec{k}$ вдоль окружности, получающейся при

пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскости $x+y+z=\alpha$ и пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки М (0; 0; 2).

4. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a}=x^2\cdot\vec{i}+y^2\cdot\vec{j}+z^2\cdot\vec{k}$ соленоидальным. Вычислите поток поля $\vec{a}$ через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.
5. Выясните, является ли поле $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ потенциальным. Вычислите циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль окружности $x^2+z^2=1$, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки М(0;1;0).

<u>Вариант 3</u>

1. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=z\cdot\vec{i}+(z+x)\cdot\vec{j}+(y+z)\cdot\vec{k}$ через треугольник, вырезанный координатными плоскостями из плоскости $3x+3y+z-3=0$, в том направлении нормали к плоскости, которое образует с положительным направлением оси OZ острый угол.
2. Найдите поток радиуса– вектора $\vec{r}$ через поверхность $z=1-\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$
3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y\cdot\vec{i}+z\cdot\vec{j}+x\cdot\vec{k}$ вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскости $x+y+z=0$ и пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки М (0; 2; 0).
4. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a}=x^2\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$ соленоидальным. Вычислите поток поля $\vec{a}$ через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.
5. Выясните, является ли поле $\vec{a}=z\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}+y\cdot\vec{k}$ потенциальным. Вычислите циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль окружности $x^2+z^2=1$, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки М(0;1;0).

<u>Вариант 4</u>

1. Вычислите поток векторного поля $\vec{a}=(x-z)\cdot\vec{i}+(y+x)\cdot\vec{j}+(y+z)\cdot\vec{k}$ через треугольник, вырезанный из плоскости $x+y+2z-4=0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которое образует с осью ОХ острый угол.
2. Найдите поток векторного поля $\vec{a}=x^3\cdot\vec{i}+y^3\cdot\vec{j}+z^3\cdot\vec{k}$ через сферу $x^2+y^2+z^2=x$.
3. Вычислите циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(z-x^2)\cdot\vec{i}+(x-y^2)\cdot\vec{j}+(y-z^2)\cdot\vec{k}$ вдоль треугольного контура, образованного пересечением плоскости $x+y+z=1$ с

координатными плоскостями и пробегаемой по часовой стрелке, если смотреть из начала координат.

4. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a} = f_1(y,z)\cdot\vec{i} + f_2(z,x)\cdot\vec{j} + f_3(x,y)\cdot\vec{k}$ соленоидальным. Вычислите поток поля $\vec{a}$ через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.
5. Выясните, является ли поле $\vec{a} = f_1(x)\cdot\vec{i} + f_2(y)\cdot\vec{j} + f_3(z)\cdot\vec{k}$ потенциальным. Вычислите циркуляцию поля $\vec{a}$ вдоль окружности $x^2 + z^2 = 1$, пробегаемой против хода часовой стрелки, если смотреть из точки М(0;1;0).

Практические занятия № 15, 16

Тема: Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, их свойства и сходимость

Литература: [8], гл.XVII, §1;§3.

[9]: Берман Т.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука,1977.

Основные вопросы теории:

1. Определение несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования, их геометрическая интерпретация в случае сходимости несобственного интеграла.
2. Вычисление несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Применение формулы Ньютона – Лейбница к вычислению несобственных интегралов.
3. Свойства несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования. Аналогии с рядами.
4. Сходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования в случае, когда подынтегральная функция положительна.
5. Сходимость несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования в случае, когда подынтегральная функция является произвольной по знаку. Абсолютная сходимость несобственного интеграла.
6. Признаки сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.

Задачи для решения на занятии:

1. [9], №2366 – 2385 (четные).
2. [9], №2386 – 2393 (четные).
3. [9], №2512 – 2517 (четные).

Задачи для решения дома:

[9], №2366 – 2385 (нечетные); №2386 – 2393 (нечетные); № 2512 – 2517 (нечетные).

Образцы решения задач по теме занятий можно найти в книге: Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. – Ч. I. – М.: Просвещение, 1971.

Практические занятия № 17, 18

Тема: Несобственные интегралы от неограниченных функций

Литература: [8], гл. XVII, §§ 2,3.
[9], гл. VII, §3.

Основные вопросы теории:

1. Определение несобственных интегралов от неограниченных функций, их геометрическая интерпретация в случае сходимости и расходимости несобственного интеграла.
2. Вычисление несобственных интегралов от неограниченных функций. Применение формулы Ньютона – Лейбница к вычислению несобственных интегралов.
3. Свойства несобственных интегралов от неограниченных функций. Аналогии с рядами.
4. Сходимость несобственных интегралов от неограниченных функций в случае, когда подынтегральная функция положительна.
5. Сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции в случае, когда подынтегральная функция знакопеременна. Абсолютная интегрируемость функции.
6. Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций.
7. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственных интегралах.

Задачи для решения на занятиях:

1. [9], № 2394 – 2411 (четные).
2. [9], № 2412 – 2417(нечетные).
3. [9], №2421, 2424, 2432, 2450, 2454.

Задачи для решения дома:

[9], № 2394 – 2411 (нечетные); №2412 – 2417 (четные); №2425, 2451.

Образцы решения задач по теме занятий можно найти в книге: Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. – Ч. I – М.: Просвещение, 1971.

Практическое занятие №19

Тема: Самостоятельная работа по несобственным интегралам

Примерные варианты самостоятельной работы

Вариант №1

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость: а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^3}$; г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$; д) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\ln x}$ е) $\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

2. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$; в) $\int\limits_{1,5}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cos 5x}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.

3. Найдите площадь фигуры, заключенной между кривой $y=e^{-\frac{x}{3}}$ и осями координат (при $x \geq 0$).

<u>Вариант №2</u>

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{x}dx$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$; в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$;

г) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; д) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; е) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\ +1}{\sqrt[5]{x^3}}dx.$

2. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$; в) $\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{2\sin 4x}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

3. Найдите объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ (при $x \geq 0$) вокруг ее асимптоты.

<u>Вариант №3</u>

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость: а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^6}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$; г) $\int\limits_{1}^{2}\frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$; д) $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

е) $\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

2. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^4}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$; в) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\cos 7x}{\sqrt[5]{x^7}}dx.$

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее асимптотой.

Вариант №4

1. Вычислите несобственные интегралы или докажите их расходимость: а) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$;

в) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}dx$; г) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; д) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{x^2-4x+3}$;

е) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$.

2. Исследуйте сходимость интегралов:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^7}}dx$.

3. Найдите площадь фигуры, заключенной между линией $xy^2 = 8-4x$ и ее асимптотой.

Практическое занятие №20

Тема: Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Литература: [8], гл. XVI, §1,2.

Основные вопросы по теории:

1. Понятие функциональной последовательности и ее сходимости.
2. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности и ее геометрическая интерпретация.
3. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости функциональной последовательности (с доказательством).
4. Непрерывность предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности. Теорема Дини (с доказательством)
5. Предельный переход под знаком интеграла (интегрирование предельной функции). Доказать соответствующую теорему.
6. Дифференцирование предельной функции сходящейся функциональной последовательности (с доказательством).

Задачи для решения на занятии:

1. Приведите примеры функциональных последовательностей: а) сходящихся на всей числовой прямой; б) расходящихся всюду на числовой прямой; в) сходящихся в одной точке; г) имеющих как точки сходимости, так и точки расходимости.
2. Исследуйте на равномерную сходимость:

   а) $(f_n(x)),\ f_n(x)=\dfrac{1}{x^4+n}$;

   б) $(f_n(x)),\ f_n(x)=x^n,\ x\in[0;1]$;

   в) $(f_n(x)),\ f_n(x)=x^n,\ x\in[0;a]\subset[0;1)$.
3. Проверьте, что для последовательности функций *($f_n(x)$), $f_n(x)=n^2x^n(1-x)$* на [0;1] не выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$. Почему это происходит?
4. Покажите, что условие равномерной сходимости функциональной последовательности не является необходимым для выполнения равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx$.
5. Докажите, что для равномерной сходимости на множестве X функциональной последовательности *($f_n(x)$)* к предельной функции *f(x)* необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{x\in X} r_n(x))=0$, где

   $r_n(x)=\left|f(x)-f_n(x)\right|$.
6. Исследуйте на равномерную сходимость функциональные последовательности:

   а) ($f_n(x)$), $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$, $x\in[0;1]$;

   б) $(f_n(x)),\ f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n+x},\ x\in[0;1]$.

   в) $(f_n(x)),\ f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}},\ x\in(-\infty;+\infty)$.
7. Определите, при каких значениях параметра α последовательность $(f_n(x)),\ f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$:

   а) сходится на отрезке [0;1];

   б) сходится равномерно на [0;1];

   в) возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

Задачи для решения дома:

1. Покажите, что функциональная последовательность
$(f_n(x)),\ f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на отрезке [0;1],
однако $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx.$

2. Докажите, что функциональная последовательность
$(f_n(x)),\ f_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$ сходится на [0;1], но сходимость является неравномерной.

<u>**Практическое занятие № 21,22**</u>

<u>Тема:</u> Интегралы, зависящие от параметра
<u>Литература:</u> [5], гл. III;
[8], гл. XVIII.

<u>Основные вопрос теории:</u>

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра:
   а) понятие;
   б) равномерное стремление к предельной функции; теорема Дини;
   в) предельный переход под знаком интеграла;
   г) дифференцирование под знаком интеграла; д) интегрирование под знаком интеграла.
2. Равномерная сходимость интегралов с бесконечным верхним пределом:
   а) определение равномерной сходимости интегралов;
   б) условие и признаки равномерной сходимости интегралов;
   в) предельный переход под знаком интеграла;
   г) интегрирование интеграла по параметру;
   д) дифференцирование интеграла по параметру.
3. Применение интегралов, зависящих от параметра для вычисления
   несобственных интегралов.
4. Эйлеровы интегралы:
   а) Эйлеров интеграл I рода;
   б) Эйлеров интеграл II рода.

<u>Задачи для решения на занятиях:</u>

1. Найдите: а) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$; б) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$; г) $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\Theta}d\Theta$;

2. Выясните, можно ли совершить предельный переход под знаком

интеграла: $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$.

3. Найдите $F'(\alpha)$, если: а) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)dx$;

б) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2)dy$.

4. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, (a>0, b>0); б) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$;

в) $\int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, (a>0, b>0).

Задачи для решения дома:

1. Исследуйте на равномерную сходимость интегралы:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2} dx$ ($-\infty < \alpha < +\infty$); б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}$ ($0 \le \alpha < +\infty$);

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$ ($0 \le \alpha < +\infty$); г) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^p x}{x\sqrt{x}} dx$ ($0 \le p \le 10$).

2. Вычислите интегралы:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, (\alpha > 0, \beta > 0)$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} \sin mx \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, (\alpha > 0, \beta > 0)$.

3. Рассмотрите применение Эйлеровых интегралов I и II рода.

Практические занятия № 23 – 26

Тема: Тригонометрические ряды Фурье

Литература: [3], гл. 8, 9;
[5], гл. I, § 6;
[6], гл. I, § 1 – 2;
[8], гл. XXIV, § 1 – 2.

Основные вопросы теории:

1. Норма функции. Нормированные функции.
2. Ортогональные функции.
3. Нормированные и ортогональные системы функций.
4. Нормировка системы функций.
5. Ряды и коэффициенты Фурье. Тригонометрический ряд Фурье.
6. Условие Дирихле. Теорема о разложении функции в ряд Фурье. Разложение периодических функций.
7. Сдвиг сегмента разложения.

8. Изменение длины сегмента разложения.
9. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.
10. Разложение в ряд Фурье функций на [0; π].
11. Характер сходимости рядов Фурье.
12. Разложение функций в комплексный ряд Фурье.

<u>Задачи для решения на занятиях:</u>

1. Докажите, что основная тригонометрическая система функций: 1, cosx, sinx,…, cosnx, sinnx, … является ортогональной на [-π; π], но не является нормированной. Нормируйте ее.
2. [9]: Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. №4372 – 4395.

<u>Задачи для решения дома:</u>

[10]: Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. – М.: Просвещение, 1971. № 1.8 – 15.8.

Образцы решения задач по теме занятия можно найти в [10].

Практическое занятие №27

<u>Тема:</u> Самостоятельная работа по тригонометрическим рядам Фурье

<u>Вариант 1</u>

Разложите в тригонометрические ряды Фурье:

а) $f(x)=\begin{cases} x, -\pi < x \le 0, \\ 0, 0 < x < \pi \end{cases}$ на (-π; π);

б) $f(x)=\dfrac{\pi - x}{2}, x\in(0;2\pi)$;

в) $f(x)=\begin{cases} 0.3, 0 < x < 0.5, \\ -0.3, 0.5 < x < 1 \end{cases}$ только по синусам и только по косинусам;

г) $f(x)=sign(\cos x)$;

д) $f(x)=x^2, x\in(a;a+2e)$.

<u>Вариант 2</u>

Разложите в тригонометрические ряды Фурье:

а) $f(x)=\dfrac{\pi-2x}{4}$ на $x\in(0;\pi)$;

б) $f(x)=x^2, x\in(0;2\pi)$;

в) $f(x)=\begin{cases} 2, 0 < x < 0.5, \\ -2, 0.5 < x < 1 \end{cases}$ только по синусам и только по косинусам;

г) $f(x)=\arcsin(\cos x)$;

д) $f(x)=\begin{cases} 3x, -\pi < x \le 0, \\ 0, 0 < x < \pi. \end{cases}$ на (-π; π).

<u>Вариант 3</u>

Разложите в тригонометрические ряды Фурье:

а) $f(x)=x^2, x\in(-1;1)$;

б) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in(0;\pi)$;

в) $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, 0\le x<\pi.\end{cases}$ $x\in(-\pi;\pi).$;

г) $f(x)=\begin{cases}-3, 0<x<1,\\ 3, 1<x\le 2.\end{cases}$ только по синусам и только по косинусам;

д) $f(x)=sign(\sin x)$.

<u>Вариант 4</u>

Разложите в тригонометрические ряды Фурье:

а) $f(x)=2+|x|, x\in(-1;1)$;

б) $f(x)=1-\frac{x}{2}, x\in(-2;2)$;

в) $f(x)=\begin{cases}-2, 0<x<\pi,\\ -3, \pi\le x<2\pi.\end{cases}$ в (0; 2π) только по синусам и только по косинусам;

г) $f(x)=x^2+x, x\in(0;2)$;

д) $f(x)=\arccos(\sin x)$.

Содержание

Мухин Александр Ефимович

Интегралы по поверхности. Элементы теории поля.
Интегралы, зависящие от параметра. Ряды Фурье

Методические указания к изучению разделов
математического анализа для специальности 010100(010101)

Редактор Н.М.Кокина

Подписано к печати		Бумага тип. №1
Формат 60×84 1/16	Усл. печ. л.2,0	Уч. изд. л. 2,0
Заказ	Тираж 50	Цена свободная

Издательство Курганского государственного университета.
640669, г. Курган, ул. Гоголя, 25.
Курганский государственный университет, ризограф